



РУТМАН Юрий Лазаревич

Доктор технических наук, профессор, член Федерации космонавтики, член научно-технического совета по сейсмостойкому строительству при Российской академии архитектурно-строительных наук, обладатель знака «Изобретатель СССР»

1956–2011 гг. – работал в ракетно-космической отрасли (конструкторское бюро специального машиностроения). С 2011 г. – профессор на кафедре строительной механики в Санкт-Петербургском архитектурно-строительном университете.

Ю. Л. Рутман – специалист в области динамики и прочности конструкций. Получил ряд новых научных результатов в строительной механике и механике твердого деформируемого тела. Эти результаты применяются для решения задач сейсмостойкости и сейсмозащиты.



ОСТРОВСКАЯ Надежда Владимировна

Кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики Санкт-Петербургского архитектурно-строительного университета

В 2008 г. окончила Санкт-Петербургский морской технический университет и с 2009 г. начала преподавать на кафедре сопротивления материалов. С 2007 г. под руководством Ю. Л. Рутмана осуществляет научно-исследовательскую деятельность в области динамики и прочности сооружений.

«В монографии освещены все основные методики расчета сооружений на ветровые и сейсмические нагрузки. Подробно рассмотрен вопрос о способах защиты сооружений от сейсмических воздействий... Монография актуальна и будет полезна для проектировщиков, инженеров-исследователей, аспирантов, студентов строительных вузов».

А. М. Уздин, профессор, доктор технических наук, профессор кафедры «Механика и прочность материалов и конструкций» ПГУПС, член Российской и Европейской ассоциаций по сейсмостойкому строительству, член EERI (США)

«Монография рассматривает проблемы динамики сооружений в новом, отличном от других книг по этой теме аспекте».

Т. А. Белаш, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Здания» ПГУПС

Ю. Л. Рутман,
Н. В. Островская

Ю. Л. Рутман, Н. В. Островская

ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ: СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ, СЕЙСМОЗАЩИТА, ВЕТРОВЫЕ НАГРУЗКИ

Монография

ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ: СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ,
СЕЙСМОЗАЩИТА, ВЕТРОВЫЕ НАГРУЗКИ



Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

Ю. Л. Рутман, Н. В. Островская

**ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ:
СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ, СЕЙСМОЗАЩИТА,
ВЕТРОВЫЕ НАГРУЗКИ**

Монография

Санкт-Петербург
2019

УДК 699.841, 699.842

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор А. М. Уздин (ПГУПС);

д-р техн. наук, профессор Т. А. Белаш (ПГУПС)

Рутман, Ю. Л.

Динамика сооружений: сейсмостойкость, сейсмозащита, ветровые нагрузки: моногр. / Ю. Л. Рутман, Н. В. Островская; СПбГАСУ. – СПб., 2019. – 253 с.

ISBN 978-5-9227-0929-3

Задача монографии – проследить связь современных алгоритмов и программ динамического расчета сооружений с теоретическими основами теории колебаний.

Работа состоит из двух частей. В первой части, включающей пять глав, изложены методы теории колебаний, на которых базируется динамика сооружений. Рассмотрены основы линейной теории, численные методы расчета нелинейных моделей, основы стохастического анализа.

В шестой, седьмой и восьмой главах (в составе второй части) показано, как приведенные в первой части методы используются для решения задач динамики сооружений. Рассмотрены три основных вида динамических расчетов сооружений: сейсмостойкости, сейсмоизоляции, ветровых нагрузок.

Ил. 161. Табл. 25. Библиогр.: 82 назв.

ISBN 978-5-9227-0929-3

© Ю. Л. Рутман, Н. В. Островская, 2019

© Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 2019

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время есть ряд прекрасных монографий по динамике сооружений. Прежде всего, это книги под редакцией А. Ф. Смирнова, А. В. Александрова, А. М. Масленникова, Д. Ж. Пензиена и Р. Клафа. Написать новую книгу на эту тему авторов побудила следующая причина. В указанных монографиях акцент сделан на общие теоретические основы динамики сооружений. Практическое приложение теории иллюстрируется лишь примерами. В то же время в ряде случаев читателю важно знать целиком весь «технологический» процесс расчетов строительных конструкций на основные динамические нагрузки: ветровые и сейсмические. Знать не формальную алгоритмическую сторону этого процесса, а его математические и физические основы на всех основных шагах. Раскрыть эти основы практических динамических расчетов сооружений – и есть та задача, которую поставили себе авторы данной монографии.

Исходя из этой задачи, книгу разделили на две части. В первой части описаны основные методы теории колебаний, которые лежат в основе динамических расчетов сооружений. Учитывая наличие вышеуказанных монографий, этот раздел написан очень сжато, без подробных выводов формул. Акцент сделан на физическом объяснении этих формул. Во второй части авторы стремились показать, как описанные в первой части математические модели трансформируются в конкретные алгоритмы динамических расчетов. Цель второй части монографии – «вдохнуть» физический и математический смысл в формализм основных динамических расчетов и описываемых ими процессов. Насколько это удалось авторам, судить читателям.

Монография предназначена для магистрантов, аспирантов строительных вузов и для инженеров-расчетчиков, проектировщиков, обеспечивающих стойкость строительных конструкций к динамическим воздействиям.

Глава 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Рожденный пустыней,
Колеблется звук,
Колеблется синий
На ветке паук.
Колеблется воздух,
Прозрачен и чист,
В сияющих звездах
Колеблется лист.

Н. А. Заболоцкий. «Утро»

1.1. Основные понятия и определения

1.1.1. Колебательные процессы играют огромную роль в самых различных природных явлениях, в технических устройствах и системах. Механика, оптика, акустика, радиотехника, электротехника, атомная физика и т. д. – все эти отрасли техники и человеческих знаний развивались и развиваются в значительной мере на основе понимания механизма колебательных процессов и эффектов.

Чрезвычайно важное значение имеет исследование колебательных процессов в строительных конструкциях. Основными динамическими нагрузками на строительные конструкции являются ветровые и сейсмические. Эти нагрузки вызывают интенсивные колебания зданий, гидротехнических сооружений, мостов и т. д. Поэтому все основные параметры, характеризующие прочность этих конструкций при действии указанных нагрузок, определяются с помощью теории колебаний.

С помощью теории колебаний удастся не только вскрыть сложную природу происходящих в сооружениях динамических процессов, но и определить конструктивные параметры, при которых сводятся к минимуму вредные последствия этих процессов или оптимизируются условия эксплуатации [2].

1.1.2. Классификация динамических колебательных систем и процессов может быть произведена по различным независимым признакам. Такими признаками являются:

А. Число степеней свободы динамической системы, то есть число независимых координат, полностью определяющих положение системы в пространстве в любой момент времени t .

Как правило, рассматривают следующие типы механических систем:

- системы с одной степенью свободы;
- системы с конечным числом степеней свободы, большим единицы;
- системы с бесконечным числом степеней свободы.

Б. Тип математической модели системы. Обычно различают:

- линейные системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями;
- нелинейные системы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями.

В. Причины возникновения колебаний. Колебания могут быть свободными, вынужденными, параметрическими и самовозбуждающимися.

Колебания, которые совершаются при отсутствии переменного внешнего воздействия и без поступления энергии в систему, называются свободными. Они происходят за счет первоначально накопленной потенциальной и кинетической энергии, величины которых определяются перемещениями и скоростями, заданными системе в некоторый начальный момент времени. Причиной таких колебаний является действие на материальные тела системы восстанавливающих (упругих) сил.

Колебания, которые вызываются переменным внешним воздействием, заданным в виде явных функций времени, называют вынужденными колебаниями.

Параметрические колебания – это колебания, причиной которых являются изменения во времени параметров динамической системы (например, жесткости или массы). Параметрические колебания – это колебания в так называемых нестационарных системах, то есть в системах, свойства которых меняются во времени.

Самовозбуждающиеся колебания (автоколебания) возникают и поддерживаются от источника энергии неколебательной природы, который включен в систему. Поступление энергии регулируется самой системой. Свободные колебания и автоколебания – это колебания в так называемых автономных системах. Вынужденные колебания – это колебания в неавтономной системе (то есть в системе, на которую действуют внешние факторы).

Ясно, что в одной системе могут одновременно возникнуть колебания от нескольких вышеперечисленных причин. Тогда возникают колебания смешанного типа: вынужденные колебания совместно с автоколебаниями и собственными колебаниями и т. п.

Г. Характер изменения полной энергии системы. Система называется консервативной, если ее полная механическая энергия остается постоянной при свободных колебаниях. При отсутствии такого свойства система называется неконсервативной. В свою очередь, среди неконсервативных систем можно выделить диссипативные и автоколебательные системы. Система называется диссипативной, если ее полная механическая энергия в отсутствии внешних воздействий при любых движениях убывает. Систему называют автоколебательной, если в ней возможно самовозбуждение колебаний (за счет источника энергии, включенного в систему).

Д. Характер происходящих в системе процессов. Процессы могут быть установившимися (стационарными) и неустойчивым (нестационарными), детерминированными и случайными.

Если процесс задан как вполне определенная (неслучайная) функциональная зависимость некоторой величины от времени, он называется детерминированным. Для такого процесса стационарные колебания можно определить, как колебания, происходящие около постоянного среднего значения, причем максимальные и минимальные значения колеблющейся величины, достигаемые на достаточно большом отрезке времени, мало изменяются при перемещении этого отрезка по временной оси. Периодические колебания есть частный случай стационарных колебаний (периодические колебания – это всегда, сумма гармонических колебаний, частоты которых находятся в рациональном отношении). Стационарный процесс необязательно является периодическим. Примером стационарных процессов, не являющихся периодическими, могут служить почти периодические колебания. Как правило, эти колебания представляют собой сумму гармонических колебаний, частоты которых находятся в иррациональном отношении.

Наглядным примером неустановившихся процессов являются затухающие и расходящиеся колебания.

Случайный процесс – это функция времени, значения которой есть случайные величины. Случайный процесс называется стационарным, если статистические характеристики составляющих его случайных величин не зависят от времени. В противном случае он называется: нестационарным.

1.1.3. Выше перечислены основные типы моделей динамических систем и происходящие в них процессы. Некоторые из этих моделей достаточно просты, наглядны, допускают исследование сравнительно несложными математическими методами, но описывают лишь приближенные закономерности реальных явлений. Другие, напротив, более точны и подробны, но громоздки, плохо обозримы, требуют сложного компьютерного обеспечения и, главное, трудны для поиска оптимальных решений. Так, например, исследование случайного процесса в нелинейной системе со многими степенями свободы сопряжено с большими методическими и вычислительными трудностями. Однако грубый качественный анализ такого процесса часто можно провести, заменив сложную модель более простой, например, линейной системой с одной степенью свободы. Использование той или иной модели связано с тем, насколько упрощается, схематизируется реальная система или процесс. В каждом конкретном случае модель выбирается исходя из задачи исследования (какие параметры требуется определить и влияние каких факторов отразить), а также из требований к точности модели. Необходимо также всегда соизмерять точность и подробность модели с точностью исходной информации. Если исходные данные, нужные для расчетов, известны приближенно, то, очевидно, нет смысла использовать подробную и сложную модель. Простые модели эффективны также и тогда, когда требуется получить грубую оценку исходных параметров или качественно исследовать явление.

Составителя моделей подстерегают две опасности: первая – увязнуть в подробностях, вторая – слишком огрубить явление. Поэтому построение моделей требует опыта, который приобретается постепенно.

1.2. Примеры различных динамических систем, уравнений и процессов

1.2.1. Самыми простыми динамическими системами являются системы с одной степенью свободы. Примеры таких систем приведены на рис. 1.1–1.4.

На рис. 1.1 положение массы определяет координата x , инерционные свойства упругого и вязкого элементов не учитываются. На рис. 1.2 диск может поворачиваться только в своей плоскости вокруг оси вала. Таким образом, его положение однозначно определяет угол поворота φ . Массой вала в этой расчетной схеме пренебрегают. На рис. 1.3, 1.4 также показаны системы с одной степенью свободы. Если жидкость в трубке (рис. 1.3) несжимаема, то положение жидкости описывается одной координатой x . На рис. 1.4 положение жесткого стержня, закрепленного в точке O цилиндрическим шарниром, полностью описывается углом поворота φ .

Системы с одной степенью свободы

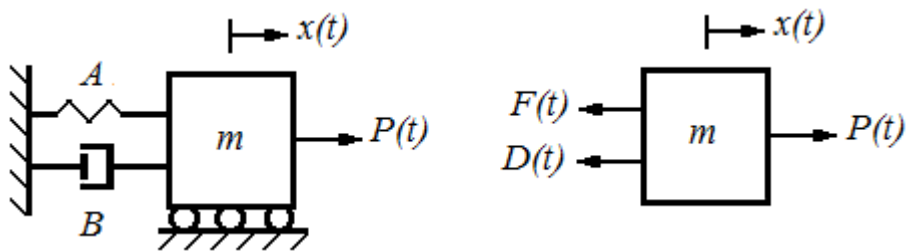


Рис. 1.1. Масса,двигающаяся вдоль оси

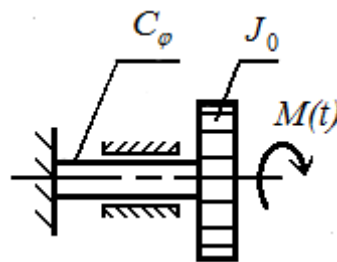


Рис. 1.2. Диск, вращающийся вокруг оси

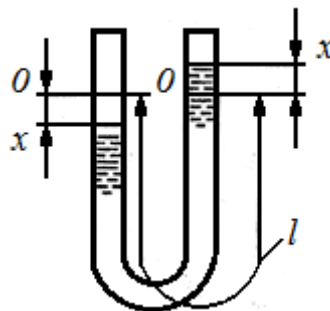


Рис. 1.3. Жидкость, колеблющаяся в трубке

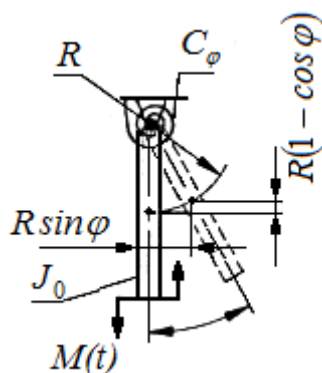


Рис. 1.4. Стержень, вращающийся вокруг оси

Из приведенных примеров видно, что расчетные схемы (физические модели) систем с одной степенью свободы весьма разнообразны. Однако соответствующие этим расчетным схемам математические модели оказываются однотипными. Колебательные системы с одной степенью свободы называются осцилляторами.

Следует иметь в виду, что модель осциллятора очень важна для качественного понимания колебательных процессов. Многие присущие осциллятору свойства универсальны. В этой связи можно сослаться на знаменитого американского физика Р. Фейнмана, который писал: «...уравнение колебаний гармонического осциллятора непрерывно встречается в физике и других науках и описывает многие явления. Такое уравнение описывает колебания грузика на пружинке, колебания заряда, текущего по электрической цепи, колебания камертона, порождающие звуковые волны, колебания электронов в атоме, порождающие световые волны. Добавьте сюда действия регуляторов, например, поддерживающих заданную температуру термостата, сложные взаимодействия в химических реакциях и (уже совсем неожиданно) рост колоний бактерий и т. д. и это очень неполный список явлений, которые описываются почти теми же уравнениями, что и механический осциллятор».

Системы с числом степеней свободы большим единицы

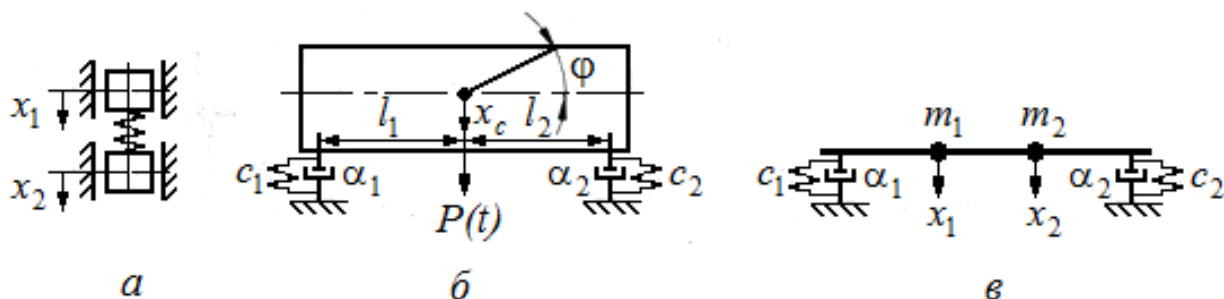


Рис. 1.5. Системы с двумя степенями свободы:

а – две массы,двигающиеся по вертикали;

б – тело, совершающее вертикальные колебания в плоскости; *в* – две массы, колеблющиеся за счет упругости опор и балки (с нулевой погонной массой)



Рис. 1.6. Система с бесконечным числом степеней свободы: балка с непрерывно распределенной массой (μ) и жесткостью (EI)

1.2.2. В рассмотренных примерах (рис. 1.1–1.5) расчетные схемы состоят из абсолютно твердых материальных тел (то есть тел, не обладающих упругими и вязкими свойствами), а также упругих и вязких элементов, не обладающих инерционными свойствами. Так как число степеней свободы материального тела равно 6, то в таких системах число степеней свободы не может превышать $6n$, где n – количество материальных тел.

Возможны расчетные схемы, содержащие элементы с непрерывно распределенными упруго-вязкими и инерционными параметрами. Такими элементами являются стержни, пластины, оболочки, упругие тела. Расчетные схемы, включающие в себя элементы такого типа, являются динамическими системами с бесконечным числом степеней свободы. Например, системой с бесконечным числом степеней свободы является изгибаемая балка на упругих и вязких опорах (рис. 1.6) с погонной массой μ и жесткостью EI .

Из приведенных примеров видно, что число степеней свободы зависит не только от структуры исследуемой системы, но и от требований к точности расчета. При приближенном исследовании число степеней свободы стараются уменьшить за счет:

- неучета некоторых видов движений;
- пренебрежения упругостью или массой отдельных узлов конструкции.

Вид расчетной схемы зависит от задач исследования и требований к его точности.

1.2.3. С различными типами уравнений движения механических систем можно познакомиться на примере уравнений движения систем с одной степенью свободы.

Рассмотрим систему, показанную на рис. 1.1. В соответствии со вторым законом Ньютона уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x} = P(t) - F - D, \quad (1.1a)$$

где m – масса тела; F – сила упругости в элементе A ; D – сила в вязком элементе B ; $P(t)$ – внешняя (возмущающая) сила.

Пусть A и B – так называемые линейные элементы, то есть сила упругости линейно зависит от x , а сила вязкого сопротивления линейно зависит от \dot{x} :

$$F = cx, D = \alpha\dot{x}.$$

Тогда вместо (1.1а) имеем

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = P(t). \quad (1.1б)$$

Если рассматриваются вертикальные колебания массы, то внешняя сила $P(t)$ включает в себя и постоянную весовую составляющую: $P(t) = mg + Q(t)$.

Уравнение (1.1б) есть дифференциальное уравнение второго порядка. Точно такой же вид имеет уравнение колебаний диска, закрепленного на валу (см. рис. 1.2):

$$J_0\ddot{\phi} = -\beta\dot{\phi} - C_\phi\phi + M(t), \quad (1.2а)$$

или

$$J_0\ddot{\phi} + \beta\dot{\phi} + C_\phi\phi = M(t), \quad (1.2б)$$

где J_0 – момент инерции диска относительно центра; C_ϕ – угловая жесткость вала (то есть величина момента, вызывающего закручивание вала на угол ϕ); β – коэффициент, учитывающий вязкие (диссипативные) свойства вала; $M(t)$ – внешний (возмущающий) момент, приложенный к диску.

В расчетной схеме на рис. 1.4 ситуация та же, что и в расчетной схеме на рис. 1.2, – вращение тела вокруг точки О. Однако в этой схеме, помимо упругого восстанавливающего момента $C_\phi\phi$, надо учесть также весовой восстанавливающий момент $M_g = -mgL \cdot \sin \phi$.

Таким образом, уравнение колебаний стержня вокруг точки О (уравнение маятника) имеет вид

$$J_0\ddot{\phi} + \beta\dot{\phi} + C_\phi\phi + mgL \cdot \sin \phi = M(t). \quad (1.3)$$

Если к точке О прикреплена нить длиной L , на конце нити закреплена масса m , внешних воздействий нети диссипацию не учитываем, то для этой расчетной схемы в уравнении (1.3) надо принять

$$J_0 = mL^2, \quad C_\phi = 0, \quad \beta = 0, \quad M(t) = 0.$$

Тогда вместо (1.3) получаем

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{L} \sin \phi = 0. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) это общеизвестное уравнение колебаний массы, подвешенной на нити длиной L .

Уравнения (1.1б), (1.2б) называются линейными, так как в эти уравнения неизвестные функции x или φ , а также их производные входят в первой степени (линейно). Уравнения (1.3), (1.4) нелинейны из-за слагаемого $mgL \cdot \sin\varphi$.

Нелинейность математической модели может иметь самые разные причины. Так, например, если диссипативная сила есть сила сухого трения, то при выводе уравнения (1.1а) имеем

$$D = d \cdot \text{sign } \dot{x};$$

вместо (1.1б) получаем

$$m\ddot{x} + d \cdot \text{sign } \dot{x} + cx = P(t). \quad (1.5)$$

Гидравлические демпферы часто имеют характеристику, показанную на рис. 1.7. На участке ОА эту характеристику можно аппроксимировать параболой:

$$D = k\dot{x}^2.$$

Вместо (1.1б) получаем

$$m\ddot{x} + k\dot{x}^2 \text{sign } \dot{x} + cx = P(t). \quad (1.6)$$

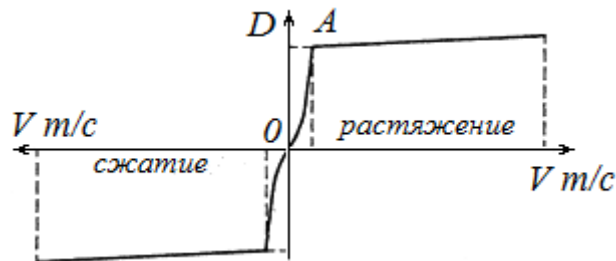


Рис. 1.7. Силовая характеристика гидравлического демпфера с клапаном предельного давления

Нелинейные уравнения точнее описывают исследуемые процессы и явления, так как все реальные конструкции в той или иной степени нелинейны. Однако основная часть практических расчетов выполняется на основе линейных моделей, потому что они существенно проще и в то же время приводят к удовлетворительным результатам.

Примером перехода от нелинейной модели к линейной может служить уравнение (1.3). Если принять $\sin\varphi \approx \varphi$ (это верно для малых углов), то уравнение (1.3) превращается в линейное:

$$J_0\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + (C_\varphi + mgL)\varphi = M(t). \quad (1.7)$$

1.2.4. Уравнения (1.1)–(1.6) – это уравнения вынужденных колебаний системы, так как в правой части уравнений присутствуют обобщенные силы (усилия или моменты), заданные как явные функции времени. Однако решение этих уравнений зависит не только от вида правой части, но и от того, какие перемещения и скорости были у системы в некоторый начальный момент времени, то есть от начальных условий.

Для уравнений (1.1), (1.5), (1.6) эти условия имеют вид

$$x(0) = x_0; \dot{x}(0) = \dot{x}_0; \quad (1.8a)$$

а для уравнений (1.2)–(1.4), (1.7) –

$$\varphi(0) = \varphi_0; \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0. \quad (1.8б)$$

Только знание условий (1.8a) или (1.8б) делает решения (1.1)–(1.7) полностью определенными.

Ненулевые начальные условия являются, как указывалось выше (п. 1.1.2), причиной свободных колебаний, то есть колебаний при отсутствии внешних воздействий.

В случае свободных колебаний вместо уравнения (1.1б) имеем:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = 0, \quad (1.9)$$

$$x(0) = x_0; \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \text{ и т. д.}$$

Уравнения вынужденных колебаний непосредственным образом переходят в уравнения свободных колебаний, если функции в правых частях уравнений вынужденных колебаний имеют ненулевые значения лишь на конечном интервале $t \leq T$. Тогда при $t > T$ колебания становятся свободными.

1.2.5. Примером параметрических колебаний могут служить колебания маятника переменной длины.

Рассмотрим массу m , подвешенную на нити, длина которой периодически меняется: $L = L(t)$. Выведем уравнение колебаний такого маятника. Следуя [1], воспользуемся теоремой о моменте количества движения: производная по времени от момента количества движения системы равна моменту внешних сил. Момент количества движения маятника относительно точки подвеса равен $mgL \cdot \dot{\varphi} \cdot L = mg \cdot L^2 \cdot \dot{\varphi}$, а момент силы тяжести $M_g = -mgL \cdot \sin\varphi$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt} [mL^2(t) \cdot \dot{\phi}] = 2mL \cdot \dot{L} \cdot \dot{\phi} + mL^2 \cdot \ddot{\phi} = -mgL \cdot \sin\phi,$$

или

$$\ddot{\phi} + \frac{2\dot{L}(t)}{L(t)} \dot{\phi} + \frac{g}{L(t)} \sin\phi = 0. \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) отличается от уравнения (1.4), во-первых, тем, что в (1.10) есть дополнительный член со множителем $\dot{\phi}$. Но главное отличие (1.10) от (1.4) заключается в том, что коэффициенты при неизвестной ϕ и её производной в уравнении (1.10) есть периодические функции. В [1] показано, что параметрическое возмущение периодическое изменение длины нити может привести к неограниченной раскачке такого маятника. В качестве примера в [1] рассмотрена раскачка качелей, которая происходит ритмическим сгибанием и выпрямлением стоящего на качелях тела. Оказывается, что возрастание энергии качелей при такой раскачке происходит в геометрической прогрессии. Интересно отметить, что объяснение раскачки на основе элементарных физических и геометрических соображений приведено в книге Я. И. Перельмана «Знаете ли Вы физику» (Ленинград, ОНТИ, 1935) [1].

Уравнение колебаний с периодически меняющимися коэффициентами и есть уравнение параметрических колебаний.

1.2.6. Для автоколебательной системы характерно наличие источника энергии (не обладающего колебательными свойствами), из которого в систему поступает энергия, возмещающая неизбежные энергетические потери и при определённых условиях приводящая к значительному росту амплитуд колебаний (к «раскачке» системы). Примеры автоколебательных систем чрезвычайно разнообразны:

- балансир часов, получающий энергию от часовой пружины;
- скрипичная струна, получающая энергию от движущегося смычка;
- крыло самолета, энергия колебаний которого связана с энергией набегающего на крыло воздушного потока;
- энергия колебаний моста/здания, взаимодействующих с ветровым потоком и т. д.

Автоколебания маятника Фроуда

Наглядным и простым примером автоколебаний может служить маятник Фроуда, изображенный на рис. 1.8, а. Маятник подвешен на оси, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω . Между муфтой маятника и вращающейся осью возникает момент трения, значение которого зависит от величины скорости вращения муфты маятника относительно оси. Зависи-

мость между моментом трения $M_{тр.}$ и относительной угловой скоростью $\dot{\phi}_{отн.}$ находится из эксперимента. Примерный вид этой зависимости показан на рис. 1.8, б. Момент трения имеет наибольшее значение, когда относительная скорость равна нулю (трение покоя). С возрастанием скорости трение уменьшается до некоторого минимального значения, а затем снова начинает незначительно возрастать.

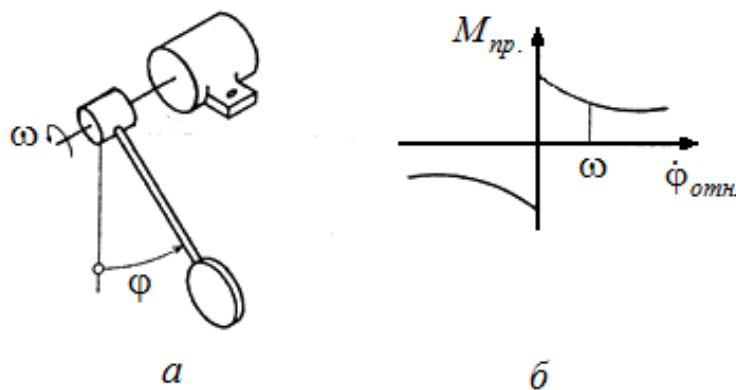


Рис. 1.8. Маятник с сухим трением (маятник Фроуда):
 а – принципиальная схема для расчета автоколебаний;
 б – характеристика сухого трения

Спадающая часть кривой трения может явиться причиной автоколебаний. Действительно, работа момента трения

$$A = \int_0^t M_{тр.} \cdot \dot{\phi} dt,$$

где ϕ – абсолютный угол поворота маятника.

Если бы момент трения был постоянен, то работа за период при симметричных колебаниях равнялась бы нулю. Однако $M_{тр.}$ является функцией относительной угловой скорости $\dot{\phi}_{отн.} = \omega - \dot{\phi}$. В соответствии с рис. 1.8, б при $\dot{\phi} > 0$, то есть при $\dot{\phi}_{отн.} < \omega$, развивается больший момент трения, чем при $\dot{\phi} < 0$, то есть при $\dot{\phi}_{отн.} > \omega$. Поэтому работа, совершаемая моментом трения за время, при котором $\dot{\phi} > 0$, больше работы, затрачиваемой на преодоление этого момента за время, при котором $\dot{\phi} < 0$. Таким образом, за время полного колебания работа момента трения отлична от нуля, и к маятнику подводится энергия. Если эта энергия достаточно велика, чтобы преодолеть имеющиеся в системе силы демпфирования, то избыток энергии идет на «раскачку» системы (увеличение амплитуды маятника), что и означает появление автоколебаний. Источником энергии в рассматриваемом случае является энергия вращающегося вала.

Уравнение колебаний маятника Фроуда можно составить так же как уравнение колебаний маятника на рис. 1.4, убрав из (1.3) член $C_\phi \dot{\phi}$ и добавив в правую часть (1.3) момент трения $M_{\text{тр}} = f(\omega - \dot{\phi})$:

$$J_0 \ddot{\phi} + \beta \dot{\phi} + mgR \cdot \sin \phi = f(\omega - \dot{\phi}). \quad (1.11)$$

В это уравнение не входит возмущающий момент как функция времени, а входит функция $f(\omega - \dot{\phi})$, определяющая взаимодействие осциллятора с источником энергии через параметры системы. Поэтому (1.11) – уравнение автоколебаний.

1.2.7. Важными характеристиками динамических систем являются их энергетические свойства. Любые реальные динамические системы содержат механизм диссипации – рассеивания механической энергии. В математической модели этот механизм проявляется через введение в модель сил демпфирования колебаний. В моделях (1.1б), (1.2б) этим силам соответствуют члены $\alpha \dot{x}$, $\beta \dot{\phi}$, в модели (1.4) – член $d \cdot \text{sign } \dot{x}$, в модели (1.5) – $k \dot{x}^2 \text{sign } \dot{x}$ и т. д. Если в указанных системах убрать силы демпфирования (приняв коэффициенты α , β , k равными нулю), их свободные колебания будут происходить без изменения полной механической энергии. Такие системы, в которых суммарная механическая энергия остается постоянной, называются консервативными.

Закон сохранения энергии для свободных колебаний механического осциллятора гласит: сумма кинетической и потенциальной энергий осциллятора является постоянной величиной. Это легко установить из уравнения свободных колебаний осциллятора (1.8), если принять $\alpha = 0$:

$$m\ddot{x} + cx = 0,$$

$$x(0) = x_0; \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (1.9б)$$

Умножив это уравнение почленно на x , получаем

$$m\ddot{x}x + cx\dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{cx^2}{2} \right) = 0. \quad (1.12)$$

Проинтегрировав (1.12), имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{cx^2}{2} \right) = E_0. \quad (1.13)$$

Так как $\frac{m\dot{x}^2}{2}$ – кинетическая энергия, а $\frac{cx^2}{2}$ – потенциальная энергия, то соотношение (1.13) есть закон сохранения энергии, где

$$E_0 = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} + \frac{cx_0^2}{2} = \text{const} \text{ – начальная энергия.}$$

Можно еще более наглядно проинтерпретировать равенство (1.13). Известно, что решение (1.11) имеет вид

$$x = A \cos(\omega t + \phi), \quad (1.14)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – частота колебаний осциллятора; $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}$ – амплитуда колебаний; $\phi = \arctg \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}$ – начальная фаза колебаний (см. п. 3.1.2).

Подставляя (1.14) в (1.13), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{c}{2} A^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \\ & = A^2 \frac{m}{4} \omega^2 [1 - \cos(2\omega t + 2\phi)] + A^2 \frac{c}{4} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Из (1.15) видно, что колебания каждого вида энергии происходят с удвоенной частотой 2ω , причем сумма двух видов энергий остается постоянной.

Если рассмотреть вынужденные колебания осциллятора без демпфирования

$$m\ddot{x} + cx = P(t), \quad (1.16)$$

то, повторяя предшествующие выкладки, вместо (1.13) получим

$$\frac{m\dot{x}}{2} + \frac{cx}{2} = \int P(\xi) \dot{x}(\xi) d\xi + E. \quad (1.17)$$

Таким образом, при вынужденных колебаниях начальная энергия не сохраняется. Соотношение (1.17) означает: изменение начальной механической энергии системы равно работе внешней силы, действующей на осциллятор. Эта работа может иметь как положительное, так и отрицательное значение.

Работа демпфирующих (диссипативных) сил всегда отрицательна. За счет диссипативных сил механическая энергия системы уменьшается, рассеивается, переходя в другие виды энергии (тепловую, звуковую и др.). Поэтому свободные колебания системы, в которой есть силы демпфирования, всегда затухающие.

При вынужденных периодических колебаниях при наличии диссипации работа возмущающих сил за период равна абсолютному значению работы сил демпфирования за этот же промежуток времени, то есть рассеянная механическая энергия компенсируется приращением энергии за счет работы внешних сил. Та же ситуация возникает и при установившемся режиме автоколебаний: приращение энергии системы за счет имеющегося у нее источника энергии компенсирует рассеявшуюся энергию.

1.2.8. Характер происходящих в различных динамических системах процессов зависит как от свойств самой системы, так и от условий ее нагружения. Поэтому типизацию процессов производят исходя не из свойств системы, в которой они возникают, а из особенностей самих процессов. Как указывалось, процессы делятся на два основных класса: нестационарные и стационарные. К нестационарным относятся, в первую очередь, кратковременные процессы (рис. 1.9).

Легко представить себе модели бесконечных нестационарных процессов – это затухающие и расходящиеся процессы (рис. 1.10).

Формально о характере процесса судят по виду огибающих линий, полученных соединением точек, в которых рассматриваемая величина принимает максимальные и минимальные значения. Если огибающие с увеличением t приближаются к оси абсцисс, то процесс затухающий (рис. 1.10, *а*). Если огибающие увеличиваются по абсолютным значениям, то процесс расходящийся (нарастающий) – рис. 1.10, *б*.

Как связан характер процесса с типом системы и условиями ее нагружения? Если консервативная система совершает свободные колебания, то они имеют стационарный характер. В неконсервативных диссипативных системах свободные колебания всегда затухающие, то есть являются нестационарными процессами. Вынужденные колебания в любых системах тоже будут нестационарными, если нестационарны возмущающие силы. Если возмущающие силы или изменения параметров системы имеют стационарный характер, в системе после некоторого переходного нестационарного процесса также возникают стационарные колебания (рис. 1.11). Та же ситуация создается при автоколебаниях. Исчезновение возмущающих факторов переводит стационарный процесс в затухающий. Таким образом, реальные процессы часто имеют смешанный характер, то есть в различные отрезки времени соответствуют разным типам колебаний.

Вышесказанное относится к детерминированным процессам. Для случайных процессов понятие стационарности имеет другой смысл. Случайный процесс называется стационарным, если его вероятностные характеристики

не зависят от времени. В противном случае процесс называется нестационарным. Определение типа случайного процесса до виду огибающих одной из его реализаций невозможно. Однако требуемую информацию дает усреднение огибающих для достаточно большого множества реализаций. Для стационарного случайного процесса усреднение огибающих должно привести в пределе к двум горизонтальным прямым.

Деление процессов на стационарные и нестационарные связано, в первую очередь, с принципиально важной особенностью реальных стационарных процессов, устанавливающихся в динамических системах. Параметры таких процессов зависят только от свойств системы и стационарных возмущающих факторов. Иначе говоря, при стационарных возмущениях реальная система всегда придет некоторому стационарному колебательному процессу, характеристики которого не зависят от начальных условий в момент начала действия этих возмущений, а также от действовавших на систему кратковременных нагрузок. Эта особенность позволяет разработать специальные математические методы исследования характеристик стационарных процессов.

Типы процессов

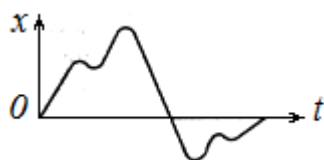


Рис. 1.9. Кратковременный нестационарный процесс

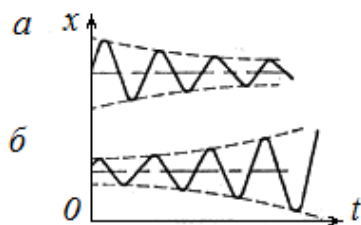


Рис. 1.10. Затухающие и расходящиеся процессы:
 a – затухающий процесс; b – расходящийся процесс

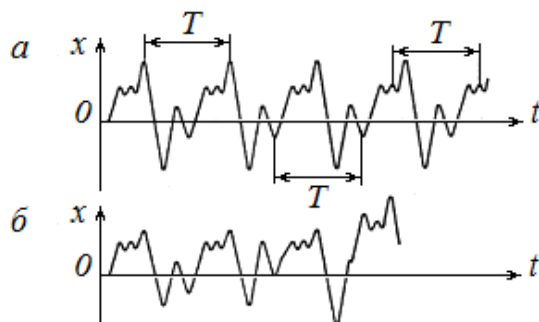


Рис. 1.11. Периодический и почти периодический процессы:
 a – периодический процесс; b – почти периодический процесс

Библиографический список

1. *Магнус К.* Колебания / Пер. с нем. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
2. *Рутман Ю. Л.* Методы теории колебаний в задачах динамики железнодорожных экипажей: учебное пособие. – СПб: ПГУПС, 1995. – 82 с.

Глава 2. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В этой работе совершенно отсутствуют какие-то ни было чертежи. Излагаемые мною методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу.

Ж. Л. Лагранж, из предисловия ко 2-му изданию монографии «Аналитическая механика»

2.1. Метод уравнений Лагранжа

2.1.1. Одним из наиболее общих методов составления уравнений колебаний механических систем является метод уравнений Лагранжа II рода. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \right) = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

где T – кинетическая энергия системы; q_j, \dot{q}_j – обобщенные координаты, определяющие положение системы в пространстве и скорости изменения этих обобщенных координат; n – число степеней свободы системы; Q_j – обобщенные силы, действующие на систему.

Обобщенные силы определяются как коэффициенты при δq_j в выражении элементарной работы системы на возможных перемещениях:

$$\delta W = \sum_j f_j(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \delta q_j, \quad (2.2)$$

то есть

$$Q_j = f_j(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (2.3)$$

Разновидность сил Q_j – позиционные силы, зависящие только от обобщенных координат:

$$Q_{jp} = f(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (2.4)$$

Такие силы являются потенциальными, то есть могут быть найдены из выражения для потенциальной энергии системы по формуле

$$Q_{jp} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},$$

где $\Pi = g(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ – потенциальная энергия системы. При наличии в системе потенциальных сил, а также действии на систему сил, зависящих только от времени, уравнение (2.1) запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \right) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right) = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

В частности, потенциальными являются упругие и гравитационные силы.

2.1.2. Рассмотрим пример на составление уравнений колебаний методом Лагранжа. Пусть расчетная схема имеет вид, показанный на рис. 1.5, б. За обобщенные координаты примем вертикальное перемещение $q_1 = x_c$ центра масс C и угол поворота тела $q_2 = \phi$. В этом случае формула для кинетической энергии имеет вид

$$T = \frac{m\dot{x}_c^2}{2} + \frac{J_c\dot{\phi}^2}{2}, \quad (2.6a)$$

где m – масса тела; J_c – момент инерции тела относительно центра масс C .

В (2.6) первое слагаемое определяет кинетическую энергию поступательного движения тела, а второе слагаемое кинетическую энергию его вращательного движения. Подставляя (2.6a) в левую часть (2.1), получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \right) = m\ddot{x}_c; \quad (2.6b)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_2} \right) = J_c\ddot{\phi}.$$

При вычислении Q_j определим сначала упругие и гравитационные нагрузки Q_{jp} по формуле (2.5). Поскольку в формулу (2.5) входит производная от потенциальной энергии по координате, то для вычисления Q_{jp} достаточно знать $\Pi^* = \Pi - \Pi_0$ – изменение потенциальной энергии по сравнению с начальным значением Π_0 (производная от которого как от константы равна нулю). Если в рассматриваемой системе за начальное состояние принять положение, соответствующее недеформированным упругим элементам, то

$$\Pi^* = \frac{c_1(x_c + l_1\phi)^2}{2} + \frac{c_2(x_c + l_2\phi)^2}{2} + mgx. \quad (2.7)$$

В (2.7) первое и второе слагаемые определяют изменение (увеличение) упругой энергии в элементах A_1 , A_2 , третье слагаемое определяет изменение (уменьшение) гравитационной энергии тела. Таким образом, потенциальные силы в соответствии с (2.5) равны

$$Q_{1p} = -\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi^*}{\partial x_c} = -c_1(x_c + l_1\phi) - c_2(x_c + l_2\phi) + mg; \quad (2.8)$$

$$Q_{2p} = -\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi^*}{\partial \phi} = -c_1(x_c + l_1\phi) - c_2(x_c + l_2\phi).$$

Обобщенные диссипативные и внешние силы определим из выражения для элементарной работы этих сил:

$$\begin{aligned} \delta W &= -\beta_1(\dot{x}_c + l_1\dot{\phi})\delta x_A - \beta_2(\dot{x}_c + l_2\dot{\phi})\delta x_B - P(t)\delta x_c = \\ &= \left[-\beta_1(\dot{x}_c + l_1\dot{\phi}) - \beta_2(\dot{x}_c + l_2\dot{\phi})\delta x_B - P(t) \right] \delta x_c + \\ &+ \left[-\beta_1 l_1(\dot{x}_c + l_1\dot{\phi}) - \beta_2 l_2(\dot{x}_c + l_2\dot{\phi})\delta x_B - P(t) \right] \delta \phi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Используя (2.8) и (2.9), окончательно получаем:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -c_1(x_c + l_1\phi) - c_2(x_c + l_2\phi) - \\ &- \beta_1(\dot{x}_c + l_1\dot{\phi}) - \beta_2(\dot{x}_c + l_2\dot{\phi}) + mg + P(t); \\ Q_2 &= -c_1 l_1(x_c + l_1\phi) - c_2 l_2(x_c + l_2\phi) - \\ &- \beta_1 l_1(\dot{x}_c + l_1\dot{\phi}) - \beta_2 l_2(\dot{x}_c + l_2\dot{\phi}); \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из приведенных выкладок видно, что силы Q_1 и Q_2 можно было сразу определять из выражения типа (2.9), не прибегая к соотношениям (2.8). Под-

ставляя (2.6б) и (2.10) в (2.1), получаем следующие уравнения колебаний рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_c &= -c_1(x_c + l_1\phi) - c_2(x_c + l_2\phi) - \\
 &- \beta_1(\dot{x}_c + l_1\dot{\phi}) - \beta_2(\dot{x}_c + l_2\dot{\phi}) + mg + P(t); \\
 J_c\ddot{\phi} &= -c_1l_1(x_c + l_1\phi) - c_2l_2(x_c + l_2\phi) - \\
 &- \beta_1l_1(\dot{x}_c + l_1\dot{\phi}) - \beta_2l_2(\dot{x}_c + l_2\dot{\phi});
 \end{aligned}
 \tag{2.11a}$$

После преобразований окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_c + (c_1 + c_2)x_c + (c_1l_1 - c_2l_2)\phi + \\
 + (\beta_1 + \beta_2)\dot{x}_c + (\beta_1l_1 - \beta_2l_2)\dot{\phi} &= mg + P(t); \\
 J_c\ddot{\phi} + (c_1l_1^2 + c_2l_2^2)\phi + (c_1l_1 - c_2l_2)x_c + \\
 + (\beta_1l_1^2 + \beta_2l_2^2)\dot{\phi} + (c_1l_1 - c_2l_2)\dot{x}_c &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.11б}$$

Следует отметить, что постоянную (статическую) составляющую нагрузки (силу тяжести mg) из уравнений (2.11б) можно исключить.

Действительно, введем новые обобщенные координаты

$$x_c^* = x_c - x_{c0}; \quad \phi^* = \phi - \phi_0, \tag{2.12}$$

где x_{c0} , ϕ_0 – значения обобщенных координат в положении статического равновесия тела при действии на него силы тяжести.

Значения x_{c0} , ϕ_0 можно определить из (2.11б), полагая x_c , \dot{x}_c , ϕ , $\dot{\phi}$ и $P(t)$, равными нулю:

$$(c_1 + c_2)x_{c0} + (c_1l_1 - c_2l_2)\phi_0 = mg; \tag{2.13}$$

$$(c_1l_1^2 + c_2l_2^2)\phi_0 + (c_1l_1 - c_2l_2)x_{c0} = 0.$$

Подставляя $x_c = x_c^* + x_{c0}$ и $\phi = \phi^* + \phi_0$, в (2.11б), с учетом (2.12) получаем

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{x}_c + (c_1 + c_2)x_c^* + (c_1l_1 - c_2l_2)\phi^* + \\
 & + (\beta_1 + \beta_2)\dot{x}_c^* + (\beta_1l_1 - \beta_2l_2)\dot{\phi}^* = mg + P(t); \\
 & J_c\ddot{\phi} + (c_1l_1^2 + c_2l_2^2)\phi^* + (c_1l_1 - c_2l_2)x_c^* + \\
 & + (\beta_1l_1^2 + \beta_2l_2^2)\dot{\phi}^* + (c_1l_1 - c_2l_2)\dot{x}_c^* = 0.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Если для уравнений (2.11б) начальные условия соответствуют положению статического равновесия

$$x_c(0) = x_{c0}; \phi(0) = \phi_0; \dot{x}_c(0) = 0; \dot{\phi}(0) = 0,$$

то для уравнений (2.14) эти условия (с учетом (2.12)) нулевые:

$$x^*(0) = \phi^*(0) = 0.$$

Преобразования, аналогичные вышеописанным, возможны в любой линейной системе. Поэтому расчеты колебаний линейных систем обычно выполняются относительно положений статического равновесия без введения в уравнение движения сил тяжести и других статических нагрузок.

2.2. Метод кинетостатики

2.2.1. Весьма общим способом составления уравнений колебаний является также метод кинетостатики, основанный на принципе Даламбера. В соответствии с этим принципом уравнения движения динамической системы составляют как уравнения ее статического равновесия под действием внешних сил и сил инерции.

Например, уравнение (2.11б) можно рассматривать как следующие уравнения статического равновесия:

– уравнение равенства нулю всех вертикальных сил, действующих на тело (инерционной силы $-m\ddot{x}_c$, упругой силы на левой опоре $-c_1(x_c + l_1\phi)$, упругой силы на правой опоре $-c_2(x_c + l_2\phi)$, вязких сил в опорах $-\beta_1(\dot{x}_c + l_1\dot{\phi})$, $-\beta_2(\dot{x}_c + l_2\dot{\phi})$, внешней силы $P(t)$, силы тяжести mg);

– уравнение равенства нулю действующих на тело моментов в вертикальной плоскости (инерционного момента $-J_c\ddot{\phi}$ упругих моментов $-c_1(x_c + l_1\phi)l_1$, $-c_2(x_c + l_2\phi)l_2$, вязких моментов $-\beta_1(\dot{x}_c + l_1\dot{\phi})l_1$, $-\beta_2(\dot{x}_c + l_2\dot{\phi})l_2$).

2.2.2. Метод кинестатики при составлении уравнений колебаний можно применять в прямом и обратном виде. Согласно прямому методу, из системы выделяются сосредоточенные массы (или твердые тела), и каждая из них рассматривается как свободная материальная точка (или свободное тело), находящаяся под действием упругих, вязких, инерционных, внешних и т. д. сил, которые выражаются через выбранные обобщенные координаты, их скорости, ускорения и время. После этого записываются соответствующие уравнения равновесия для материальных точек (или тел).

Обратный метод противоположен прямому: после отделения сосредоточенных масс (или твердых тел) рассматривается оставшаяся безынерционная система жестких, упругих и вязких связей, то есть «безмассовый скелет» системы, который находится под действием внешних сил и сил инерции «отделенных» обобщенных масс (последние выражаются через обобщенные ускорения и инерционные параметры). Далее записываются уравнения равновесия этого «скелета».

2.2.3. Прямой способ удобен для систем цепной структуры. В таких системах упругие и вязкие силы несложно выражаются через перемещения и скорости соседних тел. Такова, например, динамическая система, изображенная на рис. 2.1, а.

Пусть x_j – обобщенное абсолютное перемещение j -го тела. Будем считать, что в системе вязкие силы отсутствуют, а упругие силы линейно зависят от относительных перемещений. Тогда сумма упругих сил, действующих на j -е тело:

$$F_j = -c_j(x_j - x_{j-1}) + c_{j+1}(x_{j+1} - x_j). \quad (2.15)$$

Типовые модели механических систем, соответствующие составлению уравнений различными методами

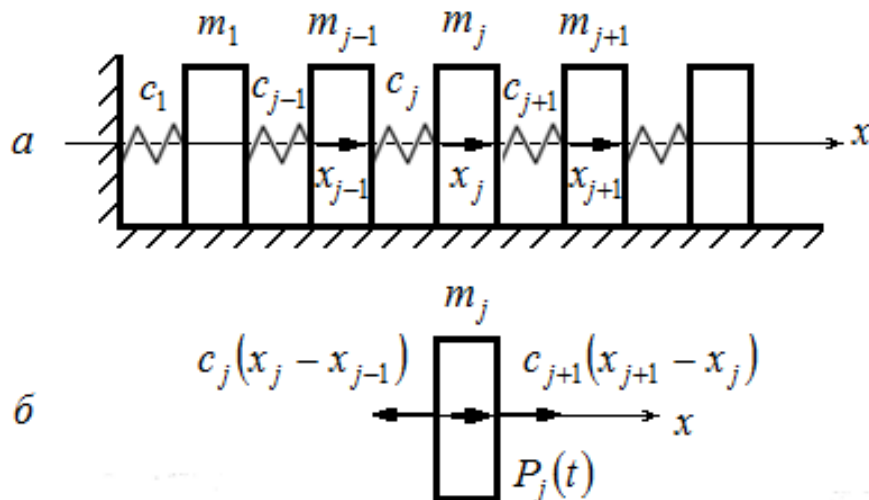


Рис. 2.1. Последовательное соединение масс (цепная система):
а – расчетная схема; б – схема нагружения одной массы

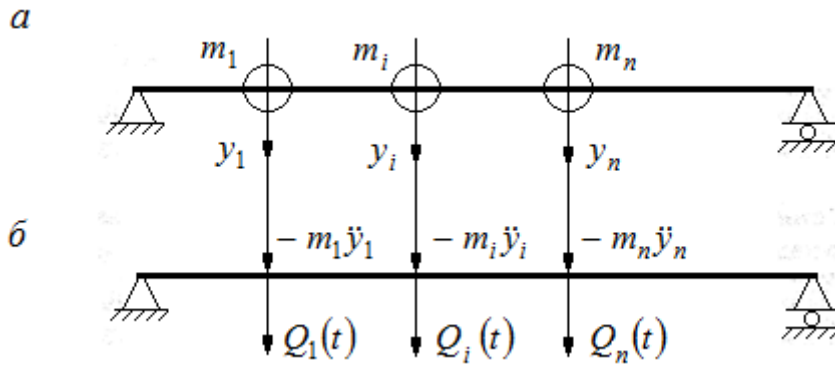


Рис. 2.2. Балочная система с сосредоточенными массами:
a – расчетная схема; *б* – схема нагружения масс

Соответственно, дифференциальное уравнение движения j -го тела имеет вид

$$m_j \ddot{x}_j = p_j(t) - c_j(x_j - x_{j-1}) + c_{j+1}(x_{j+1} - x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.16)$$

В (2.16) n – число твердых тел. Ясно, что при необходимости вязкие силы вводятся в каждое уравнение по формуле

$$D_j = -\beta_j(\dot{x}_j - \dot{x}_{j-1}) + \beta_{j+1}(\dot{x}_{j+1} - \dot{x}_j).$$

2.2.4. С другой стороны, для балочных систем с сосредоточенными массами (рис. 2.2, *a*) удобнее обратный метод, который приводит к кинето-статической схеме, показанной на рис. 2.2, *б*. В данном случае, пользуясь методом сил строительной механики, получаем следующие уравнения для «безмассового скелета» (вязкие силы отсутствуют):

$$y_j = -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{j1} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{j2} - \dots - m_n \ddot{y}_n \delta_{jn} + \\ + Q_{1(t)} \delta_{j1} + Q_{2(t)} \delta_{j2} + \dots + Q_{n(t)} \delta_{jn}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.17)$$

Уравнения (2.17) есть следствие фундаментального соотношения, определяющего статические перемещения в любой линейной упругой системе:

$$q_j = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} R_k, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.18)$$

где q_j – обобщенные перемещения; R_k – приложенные к системе обобщенные силы, соответствующие этим перемещениям; δ_{jk} – коэффициент влияния для перемещений, то есть значение j -й обобщенной координаты в случае статического приложения к системе k -й обобщенной силы, равной единице.

2.2.5. В некоторых расчетных схемах внешняя нагрузка может быть приложена к динамической системе на безмассовых участках – рис. 2.3. В этом случае эта нагрузка должна быть приведена к сосредоточенным массам (телам).

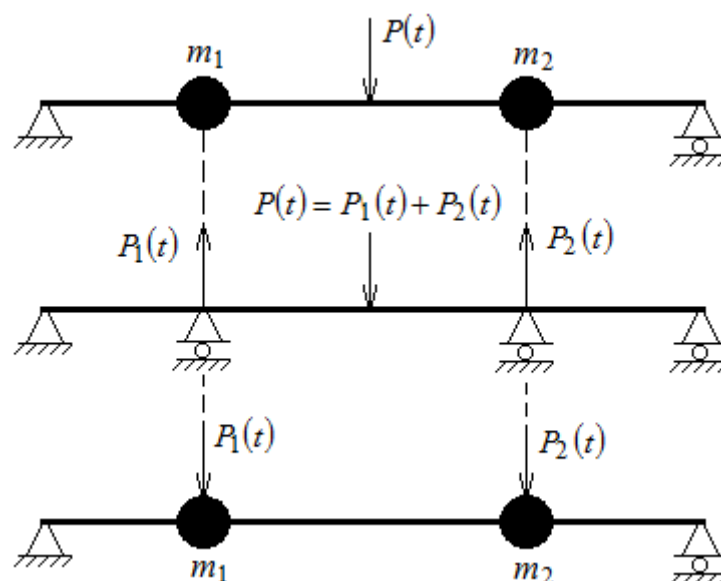


Рис. 2.3. Распределение силы $P(t)$ между двумя массами m_1 и m_2

Это приведение осуществляется с помощью расчетной схемы, в которой сосредоточенные массы (тела) считаются неподвижными опорами – рис. 2.3. При этом масса считается опорой, препятствующей перемещениям, а тело опорой, препятствующей перемещениям и углам поворотов.

Действительно, безмассовый участок деформируется при изменении нагрузки безинерционно, «мгновенно». Поэтому по отношению к безмассовому участку обладающие инерцией массы (тела) ведут себя как неподвижные опоры.

2.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Метод конечных элементов, появившийся в середине прошлого века, является развитием вариационных методов, в первую очередь, метода Ритца. Его появление тесно связано с развитием компьютерных технологий. В настоящее время этот метод является мощным средством решения самых различных задач: механики деформируемого твердого тела, теплообмена, гидро- и газодинамики, электродинамики и т. д.

Если рассматривать этот метод с точки зрения строительной механики, то МКЭ можно считать обобщением метода перемещений. Рассмотрим составление уравнений динамики в этом методе на примере изгибаемой балки. Этот пример демонстрирует структуру и алгоритм вычисления параметров этих уравнений.

При использовании МКЭ балку разбивают на конечные элементы, имеющие постоянные упругие и инерционные параметры. Если рассматриваются только изгибные деформации конечного элемента (КЭ), то каждый элемент характеризуется постоянным значением параметра EI_i и массой m_i . Деформация КЭ описывается задаваемыми аргіогі функциями формы. В рассматриваемом случае прогиб КЭ можно описать формулой

$$y(x) = \sum_{s=1}^4 q_s \Theta_s(x), \quad (2.19)$$

где

$$\Theta_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}, \quad \Theta_2(x) = x - 2\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2},$$

$$\Theta_3(x) = 3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}, \quad \Theta_4(x) = -\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}.$$

В (2.19) $\Theta_s(x)$ – функции формы (в данном случае это так называемые функции Эрмита); q_s – координаты, описывающие положение левого и правого сечения КЭ (перемещения и углы поворота сечений); x – координаты сечений; a – длина КЭ.

Потенциальная энергия деформации i -го КЭ:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} EI_i \int_0^a [y_i''(x)]^2 dx. \quad (2.20)$$

Подставляя в (2.20) соотношение (2.19). Получим

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \cdot \sum_{k=1}^4 r_{jk}^{(i)} \cdot q_k^{(i)} \cdot q_j^{(i)}. \quad (2.21)$$

В (2.21)

$$r_{jk}^{(i)} = EI_i \int_0^a \Theta_j''(x) \cdot \Theta_k''(x) dx, \quad j, k = 1, 2, 3, 4. \quad (2.22)$$

Потенциальная энергия балки в целом

$$\Pi = \sum_1^n V_i, \quad (2.23)$$

где n – число КЭ.

Если для получения уравнений динамики балки использовать уравнения Лагранжа, то нужно сформировать выражение для её кинетической энергии. Кинетическая энергия одного КЭ

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \int_0^a \dot{y}_i^2(x, t) dx, \quad (2.24)$$

Подставив в (2.24) $y(x)$ из (2.19), получим

$$T_i = \sum_{k, j=1}^4 m_{kj}^{(i)} \dot{q}_k^{(i)} \dot{q}_j^{(i)}, \quad (2.25)$$

$$m_{kj}^{(i)} = m_i \int_0^a \mathcal{E}_k(x) \cdot \mathcal{E}_j(x) dx. \quad (2.26)$$

Кинетическая энергия всей балки

$$T = \sum_1^n T_i. \quad (2.27)$$

Подставив (2.22) и (2.27) в (2.5) получим уравнения

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{Q(t)\}. \quad (2.28)$$

В (2.28) $[M]$ – квадратная матрица, размером $4n \times 4n$. Ее компонентами являются инерционные параметры $m_{kj}^{(i)}$. $[K]$ – квадратная матрица, компоненты которой $r_{jk}^{(i)}$ (жесткости). Матрицы $q(t)$ и $Q(t)$ состоят из одного столбца-компоненты $q(t)$ – обобщенные перемещения $q_s(t)$, компоненты $Q(t)$ – обобщенные внешние силы на концах КЭ (в узлах).

Уравнения (2.28) описывают колебания не рассматриваемой конструкции (балки), а колебания не связанных между собой КЭ этой балки. Дело в том, что перемещения и углы поворота концевых сечений соседних КЭ совпадают, а в (2.28) эти одинаковые обобщенные перемещения входят с разными индексами, то есть как разные неизвестные. Чтобы сделать (2.28) адекватными исходной физической модели, введем матрицу-столбец, компонентами которой являются обобщенные перемещения узлов конструкции целиком (т. е. матрицу, в которой одинаковым перемещениям соответствует одна неизвестная). Обозначим эту матрицу $\tilde{q}(t)$. Можно на основе конкретных геометрических соображений связать $q(t)$ и $\tilde{q}(t)$ с помощью топологической прямоугольной матрицы $[H]$:

$$q(t) = [H]\tilde{q}(t). \quad (2.29)$$

При этом внешние усилия, приложенные к конечным сечениям КЭ, окажутся связанными с реальными узловыми нагрузками соотношением

$$\tilde{Q}(t) = [H]^T Q(t). \quad (2.30)$$

Структура матрицы $[H]$ учитывает граничные условия, наличие промежуточных опор и т. д.

Умножив слева правую и левую часть (2.28) на $[H]^T$ (T – обозначение транспонированной матрицы) и используя (2.25), (2.26), вместо (2.24) получим

$$[H]^T [M][H] \{\ddot{\tilde{q}}(t)\} + [H]^T [K][H] \{\tilde{q}(t)\} = [H]^T \{Q(t)\}. \quad (2.31)$$

Обозначим

$$[H]^T [M][H] = [\tilde{M}], \quad [H]^T [K][H] = [\tilde{K}], \quad [H]^T Q(t) = \tilde{Q}(t). \quad (2.32)$$

С учетом этих обозначений вместо (2.28) получим

$$[\tilde{M}] \{\ddot{\tilde{q}}(t)\} + [\tilde{K}] \{\tilde{q}(t)\} = \{\tilde{Q}(t)\}. \quad (2.33)$$

Соотношения (2.29) это и есть уравнения динамики, полученные методом конечных элементов.

Приведенный выше вывод показывает на простом примере алгоритмическую структуру формирования уравнений динамики в МКЭ. В любой сколь угодно сложной расчетной схеме эта алгоритмическая структура сохраняется. Будут меняться и усложняться лишь конкретные зависимости: (2.19), (2.20), (2.22), (2.24), (2.26) и т. п.

2.4. Составление уравнений колебаний с учетом диссипативных сил

При применении для составления уравнений динамики метода кинетостатики учет диссипативных сил не представляет затруднений. В начале записывается формула, описывающая зависимость диссипативных сил от неизвестных обобщенных координат и их скоростей. Потом, используя эту формулу, диссипативные силы вводятся в уравнения динамического равновесия. Однако при введении диссипативных сил в уравнения динамики на основе уравнений Лагранжа последние следует записать в более полном (чем в (2.5)) виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = Q_j(t) + Q_j^\Phi, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.34)$$

В (2.34) Q_j^Φ – диссипативные силы. Чтобы их связать с обобщенными переменными q_j , формируется диссипативная функция $\Phi(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$. Силы Q_j^Φ связаны с $\Phi(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ формулой

$$Q_j^\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial q_j}. \quad (2.35)$$

Обычно в практических расчетах в качестве $\Phi(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ используют функцию Рэлея

$$\Phi(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j \dot{q}_j^2, \quad (2.36)$$

где α_j – константы.

Описанный выше способ учета диссипативных сил используется и при формировании уравнений динамики на основе МКЭ.

Используя разные методы составления уравнений, мы получаем уравнения колебаний в разной форме. Если колебания механической системы с n степенями свободы описываются линейными уравнениями, то их можно записать в следующей обобщенной матричной форме:

$$[A]\{\ddot{y}(t)\} + [B]\{\dot{y}(t)\} + [C]\{y(t)\} = \{P(t)\}. \quad (2.37a)$$

В (2.37a) $[A]$, $[B]$, $[C]$ – квадратные матрицы размерностью $n \times n$; $\{y\}$ – матрица-столбец обобщенных перемещений размерностью n ; $\{P\}$ – матрица-столбец обобщенных нагрузок размерностью n .

При отсутствии диссипативных сил эти уравнения имеют вид

$$[A]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{y(t)\} = \{P(t)\}. \quad (2.37b)$$

Матрица $[C]$ в этих уравнениях (описывающих упругие колебания) является положительно определенной [1].

Если мы рассматриваем свободные колебания, то

$$[A]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{y(t)\} = 0. \quad (2.37b)$$

При указанном выше свойстве $[C]$ уравнения (2.37b) описывают консервативную систему, т. е. систему в которой нет рассеивания энергии (механическая энергия остается постоянной).

2.5. Составление уравнений колебаний при кинематических воздействиях

2.5.1. Важным видом нагружения (особенно для задач сейсмостойкости) является кинематическое воздействие. При кинематическом воздействии задаются законы обобщенных перемещений опор системы (фундаментов зданий при землетрясениях, колесных пар экипажей за счет неровностей рельс или дороги и т. д.). При этом используется гипотеза, что обратное влияние движения масс системы на законы перемещения опор мало, и им можно пренебречь. Таким образом, перемещения опор системы $\eta_j(t)$ (j – номер опоры) задаются как функции времени, а обобщенные координаты динамической системы в эти функции не входят.

При таком виде внешнего воздействия для составления уравнений движения линейных моделей используется следующий прием. Вводится инерционная нагрузка, пропорциональная статической упругой деформации, возникающей в системе при перемещении опоры (деформации «безмассового скелета»). Динамические перемещения от этой нагрузки суммируются с указанной квазистатической деформацией, что и дает полное решение задачи. Рассмотрим этот прием на примере двух опорной балки с промежуточной опорой и двумя массами – рис. 2.4.

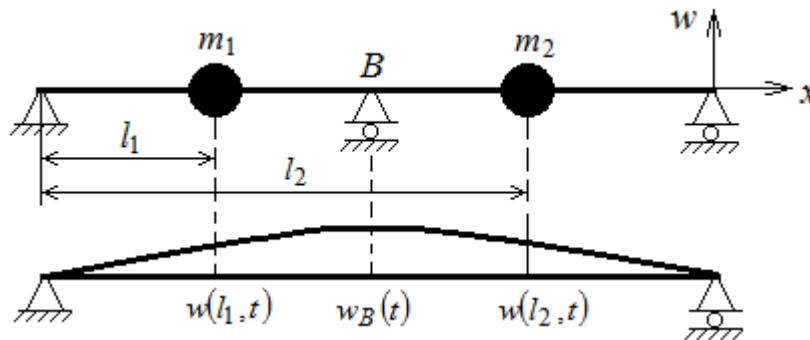


Рис. 2.4. Кинематическое нагружение балки вследствие движения опоры B

В рассматриваемом примере на рис. 2.4 опора B перемещается по закону $\eta_B(t)$.

Обозначим через $W(x)$ упругие перемещения точек балки вследствие единичного перемещения опоры B . Квазистатические перемещения масс определяются формулами:

$$\eta_{m_1} = W(l_1)\eta_B(t), \quad \eta_{m_2} = W(l_2)\eta_B(t). \quad (2.38)$$

Чтобы реализовать такие квазистатические перемещения масс, не вызывая их колебаний, к массам надо приложить нагрузки:

$$P_{m_1}(t) = m_1 \cdot W(l_1)\ddot{\eta}_B(t), \quad P_{m_2}(t) = m_2 \cdot W(l_2)\ddot{\eta}_B(t). \quad (2.39)$$

Эти нагрузки «следят» за изменением упругой линии («безмассового скелета») и обеспечивают перемещения масс, не создающие колебаний рассматриваемой системы. Но в действительности этих нагрузок нет, поэтому к массам надо дополнительно приложить такие же нагрузки с обратным знаком:

$$\tilde{P}_{m_1}(t) = -m_2 \cdot W(l_2) \ddot{\eta}_B(t), \quad \tilde{P}_{m_2}(t) = -m_2 \cdot W(l_2) \ddot{\eta}_B(t). \quad (2.40)$$

На нагрузки (2.40) динамический расчет системы, представленной на рис. 2.4, проводится решением уравнений:

$$\tilde{y}_1 = \delta_{11}(\tilde{P}_{m_1} - m_1 \ddot{\tilde{y}}_1) + \delta_{12}(\tilde{P}_{m_2} - m_2 \ddot{\tilde{y}}_2), \quad (2.41)$$

$$\tilde{y}_2 = \delta_{22}(\tilde{P}_{m_2} - m_2 \ddot{\tilde{y}}_2) + \delta_{21}(\tilde{P}_{m_1} - m_1 \ddot{\tilde{y}}_1).$$

В (2.41) δ_{ij} – коэффициенты влияния в балке на рис. 2.4.

Решение системы (2.41) дает перемещения масс относительно упругой линии $W(x) \eta_B(t)$. Полное решение задачи дается формулами:

$$y_1 = \tilde{y}_1 + \eta_{m_1}, \quad y_2 = \tilde{y}_2 + \eta_{m_2}. \quad (2.42)$$

Вышеописанный прием учета кинематического воздействия применяется только для линейных моделей, в которых верен принцип суперпозиции нагрузок.

Если двигается несколько опор (каждая по своему закону), то этот принцип позволяет учитывать движение каждой из опор отдельно с дальнейшим суммированием результатов.

В динамике сооружений модели, подобные выше рассмотренной, встречаются при расчете транспортных сооружений, мостов, плотин. Однако чаще приходится иметь дело с «консольными» моделями, в которых двигается лишь одна опора и $W(x) = 1$. Иначе говоря, движение «безмассового скелета» есть движение твердого тела. Пример такой расчетной схемы показан на рис. 2.5.

В этом случае к массам прикладываются нагрузки

$$\tilde{P}_i(t) = -m_i \ddot{\eta}(t). \quad (2.43)$$

Абсолютные перемещения масс вычисляются по формулам

$$y_i = \tilde{y}_i + \eta(t), \quad (2.44)$$

где y_i – абсолютная i -я координата; $\eta(t)$ – значение i -й координаты в переносном движении, соответствующая перемещению системы как твердого те-

ла вследствие перемещения опоры; \tilde{y}_i – значение i -й координаты в относительном движении, то есть отклонение масс системы относительно $\eta(t)$.

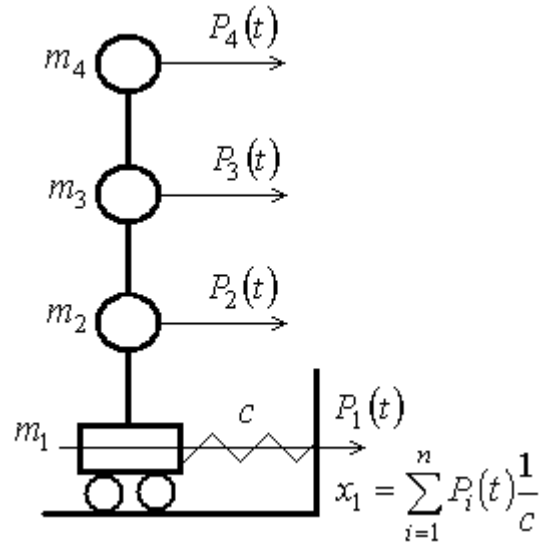


Рис. 2.5. Расчетная схема «консольной» модели

Рассмотрим более детально на примере расчетной схемы на рис. 2.5 как появляются в уравнениях фиктивные силы (2.43). Абсолютные ускорения масс равны $\ddot{y}_i = \ddot{\tilde{y}}_i + \ddot{\eta}(t)$. Поэтому уравнения колебаний, составленные методом кинетостатики, имеют вид

$$\tilde{y}_1 = -\frac{m_1}{c}(\ddot{\tilde{y}}_1 + \ddot{\eta}) - \frac{m_2}{c}(\ddot{\tilde{y}}_2 + \ddot{\eta}) - \frac{m_3}{c}(\ddot{\tilde{y}}_3 + \ddot{\eta}) - \frac{m_4}{c}(\ddot{\tilde{y}}_4 + \ddot{\eta});$$

$$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + \delta_{22}m_2(\ddot{\tilde{y}}_2 + \ddot{\eta}) + \delta_{23}m_3(\ddot{\tilde{y}}_3 + \ddot{\eta}) + \delta_{24}m_4(\ddot{\tilde{y}}_4 + \ddot{\eta});$$

$$\tilde{y}_3 = \tilde{y}_1 + \delta_{32}m_2(\ddot{\tilde{y}}_2 + \ddot{\eta}) + \delta_{33}m_3(\ddot{\tilde{y}}_3 + \ddot{\eta}) + \delta_{34}m_4(\ddot{\tilde{y}}_4 + \ddot{\eta});$$

$$\tilde{y}_4 = \tilde{y}_1 + \delta_{42}m_2(\ddot{\tilde{y}}_2 + \ddot{\eta}) + \delta_{43}m_3(\ddot{\tilde{y}}_3 + \ddot{\eta}) + \delta_{44}m_4(\ddot{\tilde{y}}_4 + \ddot{\eta}), \quad (2.45a)$$

где δ_{ik} – коэффициенты влияния консольной балки (для точек, в которых сосредоточены массы).

Из (2.45a) следует, что для определения относительных перемещений расчетную схему на рис. 2.5 можно рассматривать как балку, нагруженную силами (2.43).

Заметим, что правые части в (2.45a) это перемещения масс относительно заделки балки в массу m_1 :

$$\begin{aligned}\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1 &= \delta_{22}m_2(\ddot{\tilde{y}}_2 + \ddot{\eta}) + \delta_{23}m_3(\ddot{\tilde{y}}_3 + \ddot{\eta}) + \delta_{24}m_4(\ddot{\tilde{y}}_4 + \ddot{\eta}); \\ \tilde{y}_3 - \tilde{y}_1 &= \delta_{32}m_2(\ddot{\tilde{y}}_2 + \ddot{\eta}) + \delta_{33}m_3(\ddot{\tilde{y}}_3 + \ddot{\eta}) + \delta_{34}m_4(\ddot{\tilde{y}}_4 + \ddot{\eta}); \\ \tilde{y}_4 - \tilde{y}_1 &= \delta_{42}m_2(\ddot{\tilde{y}}_2 + \ddot{\eta}) + \delta_{43}m_3(\ddot{\tilde{y}}_3 + \ddot{\eta}) + \delta_{44}m_4(\ddot{\tilde{y}}_4 + \ddot{\eta}).\end{aligned}\quad (2.45б)$$

Для расчетных схем цепной структуры уравнения движения при кинематических воздействиях можно сформировать, вводя в уравнения не ускорения $\ddot{\eta}(t)$, а перемещения $\eta(t)$. Так, например, в (2.16), если опора двигается по закону $\eta(t)$, то вместо

$$F_1 = -c_1x_1 + c_2(x_2 - x_1),$$

надо записать

$$F_1 = -c_1u_1 + c_2(x_2 - x_1) = -c_1(x_1 - \eta_1) + c_2(x_2 - x_1),$$

так как жесткости умножаются на величины относительных смещений. Таким образом, вместо $P_1(1)$ появляется нагрузка $P_1(1) = c_1\eta(t)$.

Из приведенных примеров видно, что перемещения опор входят в уравнения движения тогда, когда в качестве неизвестных используются абсолютные координаты. Ускорения опор описывают возмущения, когда неизвестными являются относительные координаты.

Список литературы

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 831 с.
2. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1980. – 272 с.
3. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 174 с.

Глава 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В Пизанском соборе Галилей наблюдал за колебаниями люстры, следил за биением своего пульса и ритмами звучащей в соборе музыки и подтвердил ранее выдвинутую им же гипотезу об изохронности колебаний всякого маятника.

В. Вивiani, ученик Галилея

3.1. Свободные колебания линейной системы с одной степенью свободы

3.1.1. Как правило, для исследования нелинейных систем применяют численные методы решения уравнений колебаний, так как получение решения в виде конечных алгебраических формул или интегральных (квадратурных) зависимостей обычно невозможно. Однако для линейных уравнений возможно получение решений в замкнутом, «конечном» виде. Это обстоятельство имеет важное значение как для теоретических, так и прикладных задач.

Исследование достаточно простых зависимостей, полученных для линейных систем, позволяет получить ряд универсальных качественных результатов, верных как для линейных, так и нелинейных систем. Таким образом, линейные задачи позволяют создать теоретический фундамент общей теории колебаний. С прикладной точки зрения возможность получения аналитических решений для линейных систем важна для разработки конкретных расчетных методик, поскольку большая часть практических расчетов выполняется на основе линейных моделей.

3.1.2. Рассмотрим решение задачи о свободных колебаниях линейной системы с одной степенью свободы (линейного осциллятора). Уравнение колебаний линейного осциллятора имеет вид (см. (1.9)):

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = 0; \quad (3.1a)$$

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (3.1b)$$

Введем обозначения:

$$n = \frac{\alpha}{2m}; \quad \omega^2 = \frac{c}{m}. \quad (3.2)$$

Теперь вместо (3.1a) можно записать

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0; \quad (3.3)$$

По правилу решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами составляем характеристическое уравнение:

$$s^2 + 2ns + \omega^2 = 0,$$

$$s = -n \pm i\sqrt{\omega^2 - n^2}.$$

Обозначим

$$\sqrt{\omega^2 - n^2} = \omega_1.$$

При $\omega^2 > n^2$ решение уравнения (3.3) будет определяться формулой

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \cos \omega_2 t); \quad (3.4)$$

или

$$x = Ae^{-nt} \cos (\omega_1 t + \varphi), \quad (3.5)$$

где

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{C_2}{C_1}.$$

Следовательно, при наличии вязких сил свободные колебания массы, как указывалось в п. 1.2.8, представляют собой затухающий процесс – рис. 3.1. Процесс, показанный на рис. 3.1, называют периодическими затухающими колебаниями, несмотря на неточность такого названия. Под периодом этих колебаний понимают время между двумя максимальными смещениями

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}. \quad (3.6)$$

Величину ω_1 называют круговой частотой колебаний. Размерность $\omega_1 - 1/\text{с}$. Часто вместо круговой частоты используют техническую частоту, которая измеряется в герцах:

$$\nu_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{\omega_1}{2\pi}. \quad (3.7)$$

Частота в герцах равна числу колебаний в секунду.

При отсутствии вязких сил, когда $n = 0$ (осциллятор линейно-упругий), формулы (3.5)–(3.7) упрощаются:

$$x = A \cos(\omega_1 t + \varphi); \quad (3.8)$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (3.9)$$

Иногда частоту ω линейно упругого осциллятора связывают со статической деформацией $f_{ст}$ упругого элемента силой, равной весу тела:

$$f_{ст} = \frac{mg}{c}. \quad (3.10)$$

Легко видеть, что имеют место формулы

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}; \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}; \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{f_{ст}}{g}}. \quad (3.11)$$

Очевидно, что величина $f_{ст}$ введена в формулы (3.11) формально, и эти формулы справедливы независимо от того, совпадает или не совпадает направление силы тяжести с направлением колебаний тела.

Найдем постоянные интегрирования c_1 и c_2 в уравнении (3.4). Продифференцируем (3.4):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -ne^{-nt} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) + \\ & + e^{-nt} (-C_1 \omega_1 \sin \omega_1 t + C_2 \omega_1 \cos \omega_1 t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Свободные и вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

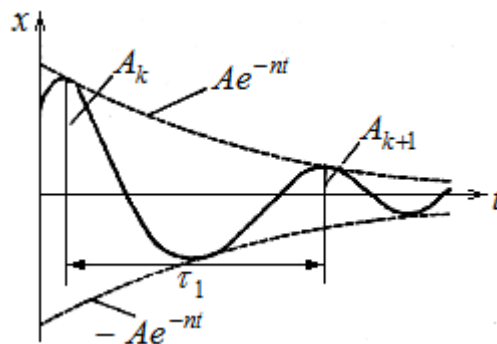


Рис. 3.1. Свободные затухающие колебания осциллятора

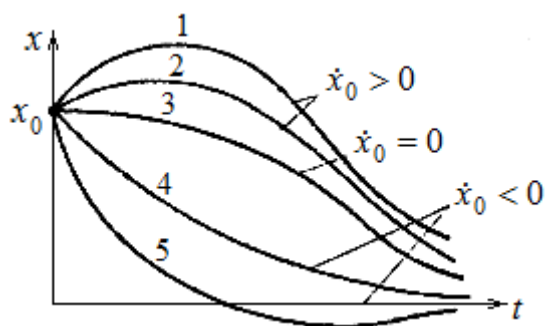


Рис. 3.2. Аperiodическое движение осциллятора

Полагая $t = 0$ в (3.4) и (3.12), а также используя (3.16), получаем

$$x_0 = C_1; \dot{x}_0 = -nC_1 + \omega_1 C_2. \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует

$$C_1 = x_0; C_2 = \frac{1}{\omega_1}(\dot{x}_0 + nx_0), \quad (3.14)$$

или

$$x(t) = e^{-nt} \left[x_0 \cos \omega_1 t + (\dot{x}_0 + nx_0) \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right]. \quad (3.15)$$

Для линейно-упругого осциллятора $n = 0$, и вместо (3.15) получаем

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (3.16a)$$

или

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.16b)$$

где

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}; \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}.$$

Отметим, что аргумент « $\omega t + \varphi$ » в (3.8) и (3.16b) называется фазой, а величина φ начальной фазой.

3.1.3. Отношение двух последовательных максимальных отклонений осциллятора при свободных колебаниях в соответствии с формулой (3.5) равно

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} = e^{n\tau_1}, \quad (3.17)$$

где A_k, A_{k+1} – см. рис. 3.1.

Таким образом, последовательные максимальные отклонения осциллятора от равновесного положения представляют собой члены геометрической прогрессии со знаменателем $e^{-n\tau_1}$. При $n = 0$ знаменатель прогрессии $e^0 = 1$, то есть все амплитуды равны, и колебания происходят по синусоидальному закону. Чаще рассматривают не отношение двух последовательных отклонений, а логарифм этого отношения, который называют логарифмическим декрементом колебания:

$$\delta = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}} = n\tau_1. \quad (3.18)$$

Соотношение (3.18) обычно используется для определения коэффициента n при обработке экспериментальных виброграмм свободных колебаний.

Из этих виброграмм легко находятся параметры $\delta = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}} = n\tau_1$ и τ_1 . Так как

в реальных виброграммах δ и τ_1 не являются константами, то применяются методы статистической обработки. Затем параметр n определяется как частное: $n = \frac{\delta_{\text{ср}}}{\tau_{1\text{ср}}}$. Для модели (3.1) необходимо отметить, что в отличие от пара-

метров m и c , расчетное определение параметра α , как правило, невозможно. Дело в том, что механизм диссипации реальных конструкций чрезвычайно сложен и зависит от множества плохо формализуемых факторов: несовершенства упругих свойств материала, рассеивания механической энергии в сварных соединениях, трения в сочленяемых деталях (конструкционного гистерезиса) и т. д. Гипотеза вязкого трения, называемая гипотезой Фойгта, позволяет создать очень простую математическую модель для приближенного описания совокупного эффекта от действия всех диссипативных факторов. Ясно, что такая модель может дать удовлетворительные результаты только в случае базирования непосредственно на экспериментальные данные.

Возможность избежать экспериментального анализа виброграмм каждой конкретной конструкции появляется, если пользоваться модификацией гипотезы Фойгта, а именно так называемой гипотезой Фойгта–Бокка. В соответствии с последней,

$$n = \zeta\omega, \quad (3.19)$$

где ζ – безразмерный коэффициент, величина которого зависит лишь от типа конструкции.

Если использовать (3.19), то получим

$$\omega_1 = \omega\sqrt{1-\zeta^2}; \quad \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (3.20)$$

Таким образом, гипотеза Фойгта–Бокка соответствует допущению о независимости декремента колебаний от частоты. В строительных кон-

струкциях значение ζ меняется от нескольких сотых до десятых долей единицы. (Например, при исследовании упругих колебаний зданий можно принять $\zeta \approx 0,02-0,05$). Отметим, что из (3.20) видно – даже при значительном затухании частота ω_1 затухающих колебаний мало отличается от частоты ω незатухающих колебаний консервативной системы. Так, например, если даже каждый последующий размах вдвое меньше предыдущего ($\delta = \ln 2$), частота ω_1 лишь на 6 % меньше, чем ω .

3.1.4. Для модели (3.1) существует критическое значение параметра α , превышение которого приводит к исчезновению колебательных процессов в модели и к появлению затухающих апериодических процессов. Это критическое значение находится из равенства:

$$\omega = n, \zeta = 1. \quad (3.21)$$

Действительно, решение уравнения (3.3) имеет вид (3.4) лишь при соотношении $\omega > n$. При $\omega < n$ общее решение (3.3) запишется в виде

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}, \quad (3.22)$$

где s_1, s_2 – вещественные числа:

$$s_1 = -n + \sqrt{n^2 - \omega^2}; \quad s_2 = -n - \sqrt{n^2 - \omega^2}.$$

Движение, описываемое выражением (3.22), неколебательное (рис. 3.2). В случае, когда $\omega = n$, решение уравнения (3.3) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{-nt} + C_2 t e^{-nt}.$$

Это решение по характеру не отличается от показанного на рис. 3.2. Считая n в (3.21) критическим значением затухания, получаем

$$n_{кр} = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \alpha_{кр} = 2n_{кр}m = 2\sqrt{mc}. \quad (3.23)$$

3.1.5. Модель (3.1) позволяет определить усилия, возникающие при ударе тела о препятствие. Действительно, будем полагать, что m – масса ударяющегося о препятствие тела, c – суммарная контактная жесткость тела и препятствия. Тогда процесс соударения (до отскока тела) описывается линейной моделью (3.1) при начальных условиях:

$$x_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = v, \quad (3.24)$$

где v – скорость наталкивающегося на препятствие тела.

При начальных условиях (3.24) решение (3.15) имеет вид

$$x(t) = \frac{v}{\omega_1} e^{-nt} \sin \omega_1 t. \quad (3.26)$$

Определим максимум усилия соударения Q :

$$Q_{\max} = \max_t |cx(t)| = \frac{cv}{\omega_1} e^{-n \frac{\pi}{2\omega_1}} \approx \frac{cv}{\omega} e^{-\frac{\pi\zeta}{2}}. \quad (3.27)$$

Так как потери механической энергии при ударе невелики ($e^{-\frac{\pi\zeta}{2}} \approx 1$), то можно считать, что

$$Q_{\max} = \frac{cv}{\omega} = v\sqrt{mc}, \quad (3.28)$$

что соответствует максимальной силе удара в консервативной системе ($\alpha = 0$).

3.1.6. К модели (3.1) и формулам (3.27), (3.28) можно свести расчетную схему, описывающую соударение двух тел. Покажем это на примере консервативной системы. Пусть на рис. 1.5, a : m_1 и m_2 – массы соударяющихся тел, c – контактная жесткость. Скорости тел в момент начала удара: $-v_1, v_2$. Уравнения движения системы, показанной на рис. 1.5, a , есть частный случай уравнений (2.16): $j = 1, 2$, $P_j(t) = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = c$. Таким образом, уравнения движения имеют вид

$$m_1 \ddot{q}_1 + c(q_1 - q_2) = 0; \quad (3.29)$$

$$m_2 \ddot{q}_2 + c(q_2 - q_1) = 0;$$

$$q_1(0) = q_2(0) = 0; \quad \dot{q}_1(0) = -v_1; \quad \dot{q}_2(0) = v_2. \quad (3.30)$$

Преобразуем алгебраически систему (3.29):

а) умножим первое уравнение на m_2 , второе на m_1 и вычтем из первого уравнения второе;

б) сложим первое и второе уравнения;

в) введем обозначения:

$$u_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} q_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} q_2; \quad u_2 = q_1 - q_2; \quad (3.31a)$$

$$M_1 = m_1 + m_2; \quad M_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.31b)$$

В результате указанных преобразований вместо (3.29) получаем

$$M_1 \ddot{u}_1 = 0; M_2 \ddot{u}_2 + cu_2 = 0; \quad (3.32a)$$

$$u_1(0) = u_2(0) = 0; \dot{u}_1(0) = \frac{-m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \dot{u}_2(0) = v_1 + v_2. \quad (3.32b)$$

В системе (3.32) в отличие от уравнений (3.29), переменные разделены. Физический смысл уравнений (3.32) прост: первое уравнение описывает движение центра масс системы, второе уравнение – колебания масс относительно друг друга. Ясно, что максимум усилия соударения двух масс Q :

$$Q_{\max} = \max_t |cu_2(t)|. \quad (3.33)$$

Так как уравнение $M_2 \ddot{u}_2 + cu_2 = 0$; математически идентично (3.1) при $\alpha = 0$, то сила удара Q_{\max} определяется по формуле (3.28) с заменой v и m на $\dot{u}_2(0)$ и M_2 :

$$Q_{\max} = (v_1 + v_2) \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} c. \quad (3.34)$$

3.2. Вынужденные колебания линейной системы

3.2.1. Рассмотрим решение задачи о вынужденных колебаниях линейного осциллятора. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид (1.1a). После деления на m с учетом (3.2) получаем:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} P(t); \quad (3.35a)$$

$$x(0) = x_0; \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (3.35b)$$

Как известно, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме какого-либо его частного решения $x_*(t)$ и общего решения однородного уравнения. Таким образом, решение (3.35a) имеет вид

$$x(t) = x_*(t) + e^{-nt} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t). \quad (3.36)$$

Частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения можно записать в виде

$$x_*(t) = \int_0^t \tilde{P}(\xi) G(t - \xi) d\xi, \quad (3.37)$$

где $\tilde{P}(t)$ – правая часть дифференциального уравнения; $G(t)$ – реакция динамической системы, описываемой данным уравнением, на единичный импульс ($G(t)$ называется функцией Грина).

Таким образом, для уравнения (3.35) $G(t)$ находится по формуле (3.15) при начальных условиях $x_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 1$:

$$G(t) = \frac{1}{\omega_1} e^{-nt} \sin \omega_1 t. \quad (3.38)$$

Так как в рассматриваемом случае $\tilde{P}(t) = \frac{1}{m} P(t)$, то из (3.37) с учетом (3.38) получаем

$$x_*(t) = \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t P(\xi) e^{-n(t-\xi)} \sin \omega_1(t - \xi) d\xi. \quad (3.39)$$

Интеграл в правой части (3.39) называется интегралом Дюамеля.

Так как $x_*(0) = \dot{x}_*(0) = 0$, то постоянные C_1 и C_2 в (3.36) определяются по формулам (3.14). В результате получаем

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t P(\xi) e^{-n(t-\xi)} \sin \omega_1(t - \xi) d\xi + e^{-nt} (x_0 \cos \omega_1 t + (\dot{x}_0 + nx_0) \sin \omega_1 t). \quad (3.40)$$

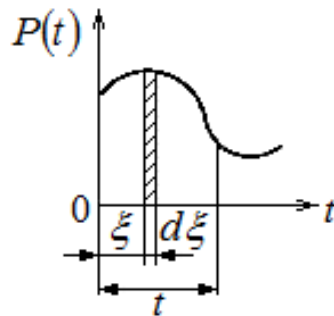


Рис. 3.3. Схема разложения силы, на сумму импульсов

Отметим, что формулу (3.37) можно интерпретировать как соотношение, выражающее принцип наложения (суперпозиции). Произвольная нагрузка $P(t)$ разлагается на бесконечное множество бесконечно малых импульсных нагрузок $dJ = P(\xi)d\xi$ (рис. 3.3). Каждая из таких нагрузок вызывает в момент $t > \xi$ смещение $dx_*(t) = P(\xi)d\xi G(t - \xi)$, где G – реакция системы на единичный импульс. Если в начальный момент система неподвижна, то

полное смещение в момент t равно сумме смещений, вызываемых всеми элементарными импульсами, приложенными при $\xi < t$. Иначе говоря,

$$x(t) = x_*(t) = \int_0^t P(\xi)G(t - \xi)d\xi,$$

что совпадает с (3.37). Если начальные условия ненулевые, то решение состоит из двух слагаемых, то есть производится суперпозиция результатов действия нагрузки и результатов действия начальных возмущений. Формула (3.40) полностью решает вопрос об аналитическом описании решения задачи вынужденных колебаний линейного осциллятора. Конечно, при сравнительно простых типах $P(t)$ аналитическое решение уравнения (3.35) может быть получено и другими методами. Однако общим методом отыскания таких решений является соотношение (3.40).

3.2.2. Рассмотрим применение формулы (3.40) на простом примере. Пусть на систему внезапно подействовала постоянная сила (рис. 3.4, *a*):

$$P(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ P_0 & (t \geq 0), \end{cases} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

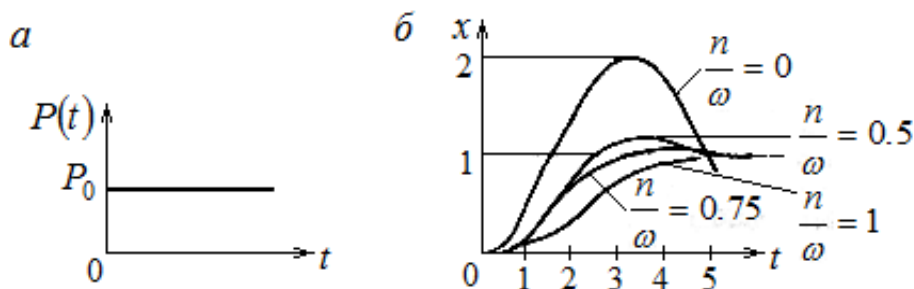


Рис. 3.4. Действие на осциллятор постоянной силы:

a – изменение силы во времени;

б – изменение во времени отношения x/x_{CT} для различных значений n/ω

В этом случае, применяя (3.40), получаем

$$x(t) = \frac{P_0}{m\omega_1} \int_0^t e^{-n(t-\xi)} \sin \omega_1(t - \xi) d\xi. \quad (3.41)$$

Интеграл (3.41) удобно вычислить, перейдя к показательной форме записи тригонометрической функции. Как известно,

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}; \quad \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}. \quad (3.42)$$

Используя (3.42) при вычислении интеграла (3.41), имеем

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{P_0}{m\omega_1} \int_0^t e^{-n(t-\xi)} \frac{1}{2i} \left[e^{i\omega_1(t-\xi)} - e^{-i\omega_1(t-\xi)} \right] d\xi = \\
 &= \frac{P_0}{2im\omega_1} \left[\frac{1}{n-i\omega_1} e^{-(n-i\omega_1)(t-\xi)} - \frac{1}{n+i\omega_1} e^{-(n+i\omega_1)(t-\xi)} \right]_0^t = \\
 &= \frac{P_0}{m\omega_1(n^2 + \omega_1^2)} \left[\omega_1 - e^{-nt} (\omega_1 \cos \omega_1 t + n \sin \omega_1 t) \right].
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Учитывая, что $m(n^2 + \omega_1^2) = m\omega^2 = c$, а $P_0/c = x_{CT}$ представляет собой статическую деформацию системы силой P_0 , из (3.43) получаем

$$\frac{x(t)}{x_{CT}} = 1 - e^{-nt} \left(\cos \omega_1 t + \frac{n}{\omega} \sin \omega_1 t \right). \tag{3.44}$$

На рис. 3.4, б показано изменение $x(t) / x_{CT}$ при различных значениях затухания в системе, характеризуемого величиной $n/\omega = \zeta$.

Рассмотренная задача имеет большое значение в теории регистрирующих приборов с инерционными элементами (индикаторы и т. д.). Пользуясь графиком на рис. 3.4, б, можно установить, что необходимое для таких приборов демпфирование соответствует $\zeta \approx 0,75$. При меньших значениях демпфирования максимальное показание прибора значительно (в пределе, при $\zeta \approx 0$, до двух раз) превышает значение измеряемой величины при скачкообразном ее изменении; большее демпфирование приводит к замедленному установлению показаний прибора.

3.2.3. Рассмотрим задачу о колебаниях массы m , расположенной на изгибаемой балке (рис. 3.5, а) при движении заделки балки по закону

$$\eta = \begin{cases} \frac{\eta_0}{2} (1 - \cos \lambda t), & \text{при } 0 \leq t \leq t_0 = \frac{2\pi}{\lambda}, \\ 0, & \text{при } t \geq t_0. \end{cases} \tag{3.45}$$

Следовательно, уравнение колебаний имеет вид (см. п. 2.5.2)

$$m\ddot{z}_a + 2\alpha\dot{x} + cx = 0; \tag{3.46}$$

где $z_a = \eta + x$ – абсолютное горизонтальное перемещение массы; x – перемещение массы относительно движущейся заделки; c – жесткость балки в точке, где сосредоточена масса.

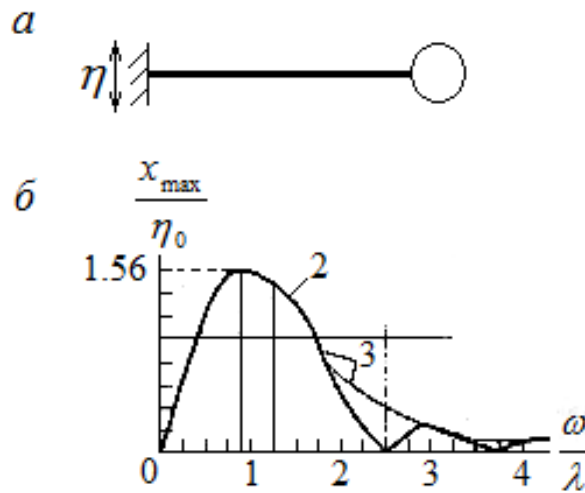


Рис. 3.5. Колебания массы m , расположенной на изгибаемой балке:
 a – расчетная схема;

b – безразмерное отношение $x_{\max}/\eta_0 = \max_t |x(t)|/\eta_0$

При отыскании максимумов кратковременных процессов потерями механической энергии можно пренебречь (это идет в запас расчетных оценок), то есть принять $\alpha = 0$.

Подставляя в (3.46) $z_a = \eta + x$, $\alpha = 0$ и разделив правую и левую часть (3.46) на m , получаем

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\ddot{\eta}; \quad (3.47)$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0;$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Или, с учетом (3.45),

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\ddot{\eta} \begin{cases} -\frac{\eta_0}{2} \lambda^2 \cos \lambda t, & t \leq t_0, \\ 0, & t > t_0, \end{cases} \quad (3.48)$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Применяя (3.40) к (3.48), с учетом $n = 0$ получаем

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{\eta_0}{2\omega} \lambda^2 \int_0^t \cos \lambda \xi \sin \omega(t - \xi) d\xi, & t \leq t_0, \\ -\frac{\eta_0}{2\omega} \lambda^2 \int_0^{t_0} \cos \lambda \xi \sin \omega(t - \xi) d\xi, & t \geq t_0. \end{cases} \quad (3.49)$$

В результате после интегрирования получаем

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\eta_0}{2} \frac{(\lambda/\omega)^2}{1 - (\lambda/\omega)^2} (\cos \omega t - \cos \lambda t), & t \leq t_0, \\ \eta_0 \frac{\sin(\pi\omega/\lambda)}{1 - (\omega/\lambda)^2} \sin(\omega t - \frac{\pi\omega}{\lambda}), & t \geq t_0. \end{cases} \quad (3.50)$$

Анализ (3.50) позволяет вычислить безразмерное отношение $x_{\max}/\eta_0 = \max_t |x(t)|/\eta_0$ как функцию ω/λ – рис. 3.5, б. Из графика на рис. 3.5, б видно, что максимальная деформация балки равна $1,56\eta_0$ при $\omega/\lambda = 2/3$.

3.2.4. Использование графиков, подобных рис. 3.4, б, чрезвычайно удобно для оперативного расчетного анализа. Как правило, в справочниках для различных типов нагрузки приводятся графики так называемых коэффициентов динамичности как функций безразмерного параметра, выражающего соотношение периода собственных колебаний осциллятора и временной характеристики нагрузки. Применительно к уравнению (3.35) коэффициент динамичности определяется как отношение

$$k_d = \frac{\max_t |x(t)|}{x_{CT}}, \quad (3.51a)$$

где

$$x_{CT} = \frac{\max_t |P(t)|}{c}. \quad (3.51b)$$

Иначе говоря, коэффициент динамичности показывает соотношение динамического и статического перемещений системы, причем под статическим перемещением понимается деформация упругого элемента в результате его статического нагружения силой того же уровня, что и сила в правой части (3.34). Для некоторых типовых нагрузок (прямоугольного импульса, полуволны синусоиды и т. п.) графики коэффициентов динамичности приведены на рис. 3.5. При определении k_d считалось, что $n = 0$.

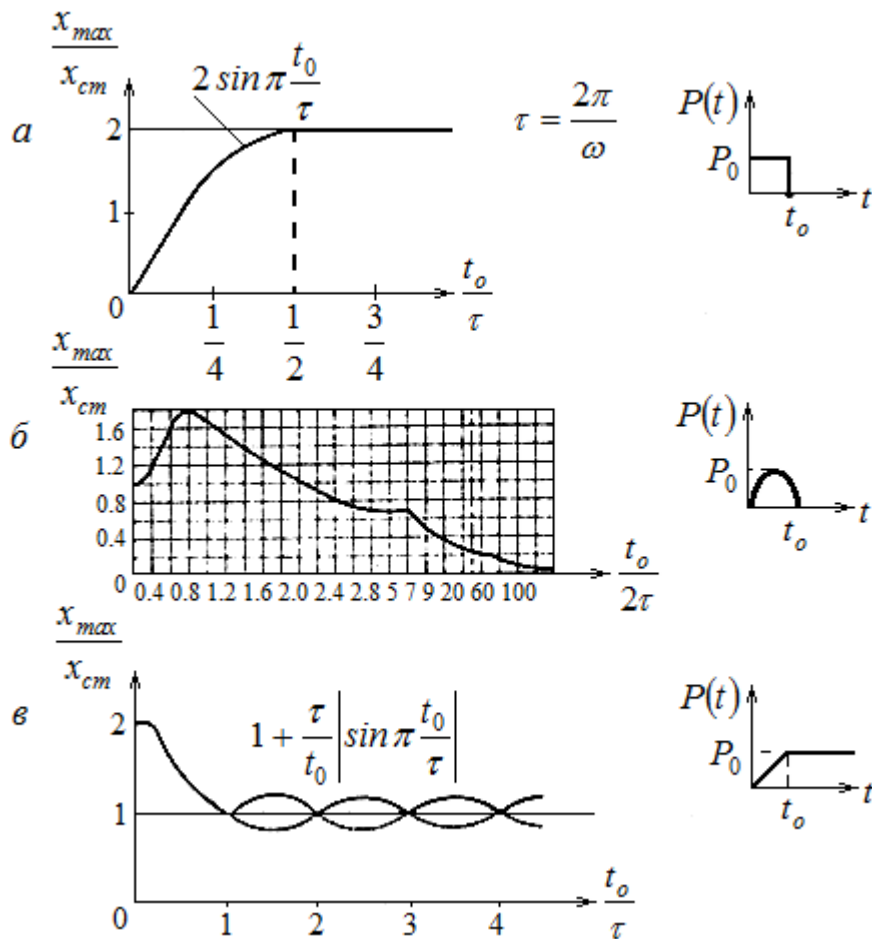


Рис. 3.6. Графики коэффициентов динамичности типовых нагрузок:
a – прямоугольный импульс; *б* – синусоидальный импульс;
в – нагрузка, линейно нарастающая до постоянной величины

Как видно из этих графиков, наихудший вариант изменения нагрузки во времени – это её внезапное приложение и длительное время действия. При такой нагрузке её коэффициент динамичности равен двум. Остальные виды кратковременных нагрузок дают коэффициент динамичности меньше двух. Очень короткое время действия нагрузок приводит к коэффициенту динамичности близкому к нулю. Если фронт нарастания нагрузки «пологий», то коэффициент динамичности близок к 1. Очень важно понимать, что сказанное выше (длительное время действия, короткое время действия нагрузок, «пологий» фронт нарастания) надо измерять не в абсолютных, а в относительных величинах. Единицей масштаба является период собственных колебаний осциллятора.

3.3. Стационарные решения

3.3.1. Если на систему действует стационарная нагрузка, то в системе после кратковременного переходного процесса устанавливается стационарный режим колебаний (см. п. 1.2.8). Параметры этого режима можно найти достаточно простыми методами, не прибегая к отысканию общего решения типа (3.43). Покажем это на примере линейного осциллятора, на который

действует гармоническая нагрузка $P(t) = P_0 \cos \lambda t$. В этом случае уравнение колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m} \cos \lambda t. \quad (3.52)$$

Общее решение (3.52) представляет собой сумму частного решения неоднородного уравнения, описывающего стационарное периодическое движение с периодом возмущающей силы, и общего решения однородного уравнения, описывающего собственные колебания. Собственные колебания со временем затухают – см. формулу (3.40), в результате чего система переходит в стационарный режим, описываемый только частным решением. Для отыскания частного решения используем комплексную форму записи: введем в рассмотрение комплексную величину x^* , действительная часть которой совпадает со значением перемещения

$$\operatorname{Re} x^* = x.$$

Зависимость возмущающей силы от времени также представим в комплексной форме

$$P^*(t) = P_0 e^{i\lambda t},$$

так что

$$P(t) = \operatorname{Re} P^*(t) = P_0 \cos \lambda t.$$

Действительная часть решения уравнения

$$\ddot{x}^* + 2n\dot{x}^* + \omega^2 x^* = \frac{1}{m} P_0 e^{i\lambda t}, \quad (3.53)$$

будет совпадать с решением уравнения (3.52), так как коэффициенты (3.52) являются действительными числами.

Искомое решение запишем в виде

$$x^* = A^* e^{i\lambda t}. \quad (3.54)$$

Подставив это выражение в уравнение (3.52), получаем

$$(-\lambda^2 + 2ni\lambda + \omega^2) A^* = \frac{P_0}{m},$$

откуда определяется комплексная амплитуда

$$A^* = \frac{P_0}{m(\omega^2 - \lambda^2 + i2n\lambda)} = \frac{P_0(\omega^2 - \lambda^2 - i2n\lambda)}{m[(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2\lambda^2]}. \quad (3.55)$$

Представив A^* в показательной форме, получим

$$A^* = Ae^{-i\varphi}, \quad (3.56)$$

где A – модуль комплексного числа A^* , φ – аргумент этого числа. Если комплексное число имеет вида $+ib$, то модуль этого числа:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (3.57a)$$

а аргумент:

$$\varphi = \arg \operatorname{tg} \frac{b}{a}. \quad (3.57b)$$

Преобразуя (3.55) по формулам (3.57), получаем

$$A = \frac{P_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2\lambda^2}}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2n\lambda}{\omega^2 - \lambda^2}. \quad (3.58)$$

Подставляя (3.56) с учетом (3.58) в формулу (3.54), находим

$$x^* = Ae^{i(\lambda t - \varphi)} = A[\cos(\lambda t - \varphi) + i \sin(\lambda t - \varphi)].$$

Таким образом, действительное перемещение

$$x = \operatorname{Re} x^* = A \cos(\lambda t - \varphi). \quad (3.59)$$

Следовательно, величины A и φ в формуле (3.56) представляют собой соответственно амплитуду колебаний и запаздывание по фазе перемещения по отношению к возмущающей силе. Комплексная амплитуда A^* одновременно характеризует как действительную амплитуду, так и фазу колебаний. Поэтому при исследовании колебаний методом комплексных амплитуд обычно не переходят к тригонометрической записи (3.59), ограничиваясь равноправной с ней показательной формулой (3.54), которая полностью описывает искомый стационарный режим.

3.3.2. Проанализируем формулу (3.58) для амплитуды стационарного режима. Отношение $\frac{A}{A_{CT}}$, где $A_{CT} = \frac{P_0}{c}$, является, как указывалось выше, коэффициентом динамичности нагрузки $P_0 \cos \lambda t$:

$$k_{\partial P_0 \cos \lambda t} = \beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\lambda^2}{\omega^4}}}. \quad (3.60)$$

Таким образом,

$$A = \beta \frac{P_0}{c} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\lambda^2}{\omega^4}}} \frac{P_0}{c}. \quad (3.60)$$

Используя гипотезу Фойгта-Бокка (формула (3.19)), получаем

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2\lambda^2}{\omega^4}}}. \quad (3.61)$$

Графики коэффициентов динамичности $\beta\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)$ для различных значений безразмерного коэффициента демпфирования ζ приведены на рис. 3.7, а, б. Из рис. 3.7, а видно, что при $\gamma = \frac{\lambda}{\omega} \approx 0$, коэффициенты динамичности близки к единице. При приближении частоты возмущения λ к частоте собственных колебаний ω коэффициент динамичности резко возрастает. Максимум колебаний достигается при $\frac{\lambda}{\omega} \approx 1$, при этом

$$\beta \approx \frac{1}{2\zeta} = Q, \quad (3.62)$$

где Q – так называемая «добротность» системы (термин заимствован из радиотехники).

Совпадение частот ω и λ называется резонансом. После резонанса коэффициент динамичности начинает уменьшаться, при $\frac{\lambda}{\omega} \approx \sqrt{2}$ становится меньше единицы и при дальнейшем увеличении $\frac{\lambda}{\omega}$ стремится к нулю. Графики на рис. 3.7 обычно называют резонансными кривыми.

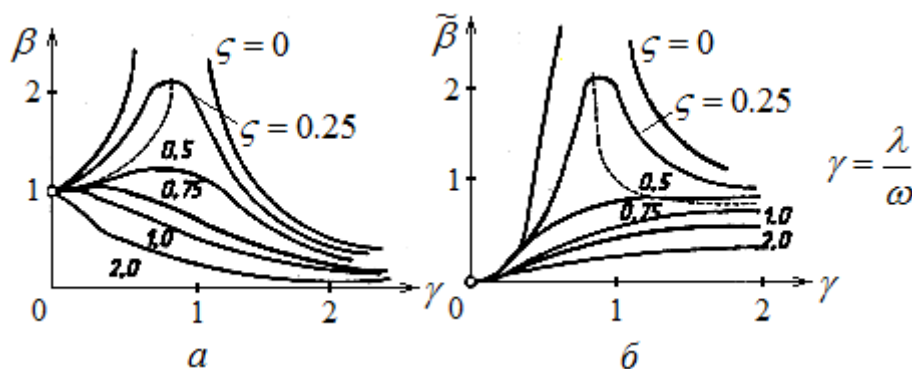


Рис. 3.7. Коэффициенты динамичности гармонической нагрузки:
а – нагрузки $P_0 \cos \lambda t$; б – нагрузки $m A_0 \lambda^2 \cos \lambda t$

3.3.3. Резонансные кривые имеют фундаментальное значение для поиска путей увеличения или уменьшения интенсивности стационарных режимов колебаний в самых различных областях техники: для улучшения радиоприема, уменьшения шумов, улучшения характеристик акустических систем, повышения точности регистрирующих приборов, виброзащиты машин и аппаратуры, уменьшения вибраций транспортных средств и т. д. В динамике сооружений резонансные процессы объясняют основные динамические эффекты, вызываемые сейсмическими и ветровыми нагрузками. Средства защиты от этих нагрузок (сейсмоизоляция, динамические гасители колебаний и т. п.) могут быть правильно спроектированы и применены только на основе понимания явления резонанса. Поэтому важно не только уметь формально пользоваться зависимостями типа (3.61), но и понимать их физический смысл. Этот смысл наиболее наглядно выявляется при анализе баланса сил в колеблющейся системе.

Пусть сопротивление отсутствует. Тогда на массу m при нагрузке $P_0 \cos \lambda t$ действуют следующие силы, которые по принципу кинетостатики уравниваются в каждый момент времени:

– внешняя сила $P_{\text{вн}} = P_0 \cos \lambda t$;

– сила упругости $P_{\text{упр}} = -cx = -\beta P_0 \cos \lambda t$;

– сила инерции $P_{\text{ин}} = -m\ddot{x} = m\beta \frac{P_0}{c} \lambda^2 \cos \lambda t = \beta \frac{\lambda^2}{\omega^2} P_0 \cos \lambda t$.

При очень малых λ (по сравнению с ω) сила инерции $P_{\text{ин}}$ мала и, следовательно, вся внешняя сила затрачивается на преодоление силы упругости, то есть $\beta \approx 1$. С увеличением λ силы инерции возрастают и начинают «вычитаться» из сил упругости, так как они имеют противоположное направление. Однако если $\lambda < \omega$, то $P_{\text{ин}}$ все же меньше по абсолютной величине, чем $P_{\text{упр}}$, и поэтому разность этих сил имеет направление силы упругости. Внешняя сила уравнивается с разностью сил упругости и сил инерции, а перемещение системы совпадает по направлению с внешней силой.

В случае $\lambda = \omega$ силы инерции и силы упругости системы взаимно уравниваются. При этом условно можно считать, что внешняя сила «уравнивается» бесконечно малым сопротивлением на бесконечно большом перемещении. Реальной амплитуды стационарного режима при резонансе в случае отсутствия сопротивления не существует.

При $\lambda > \omega$ силы инерции больше сил упругости, и равнодействующая их имеет направление сил инерции. Для уравнивания этой равнодействующей необходимо, чтобы перемещение системы и внешняя сила находились в противофазе. Если λ очень велико (по сравнению с ω), то сила упруго-

сти пренебрежимо мала по сравнению с силами инерции, и можно считать, что внешняя сила взаимодействует только с силами инерции. Поэтому при высоких частотах возмущающих сил колебания управляются силами инерции, то есть, в конечном счете, массой.

При наличии сопротивлений к перечисленным выше трем силам добавляется четвертая – сила сопротивления $P_{\text{сопр}}$, всегда отстающая от перемещения и сил упругости на $\pi/2$. Внешняя сила уравнивается равнодействующей сил инерции, упругости и сопротивления. В момент резонанса силы упругости и инерции равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Таким образом, при резонансе внешней силе противостоит равная ей сила сопротивления. Отсюда ясно, что в этом случае между внешней силой и перемещением будет сдвиг фаз $\pi/2$. В самом деле, сила сопротивления отстает на $\pi/2$ от перемещения и, следовательно, находится в противофазе с внешней силой, что и должно быть по условиям равновесия.

3.3.4. Все приведенные выше соображения и зависимости относятся к установившемуся незатухающему процессу колебаний, происходящему с частотой возбуждения. Этот процесс есть результат предельного перехода в (3.36): $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_*(t)$, то есть результат затухания собственных колебаний.

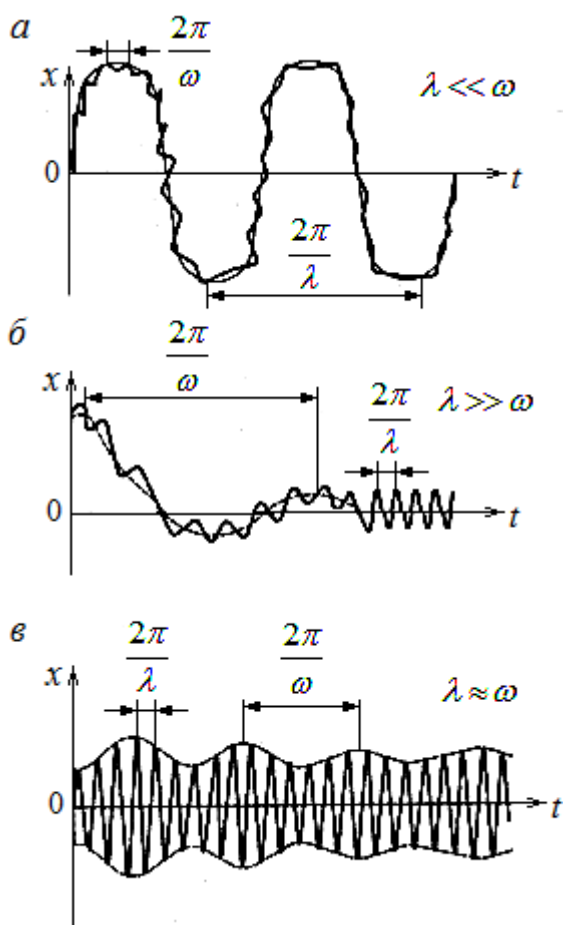


Рис. 3.8. Переход от нестационарного к стационарному процессу:
 $a - \lambda \ll \omega$; $b - \lambda \gg \omega$; $v - \lambda \approx \omega$

Постепенное установление стационарного колебательного процесса с частотой ω проиллюстрировано на рис. 3.8 для трех основных соотношений λ / ω . В первом случае (рис. 3.8, а), когда $\lambda \ll \omega$, в начале движения основные колебания сопровождаются высокочастотным фоном, который затем исчезает. В противоположном случае, когда $\lambda \gg \omega$ (рис. 3.8, б), собственные колебания создают амплитудную модуляцию основным колебаниям, но в дальнейшем эта модуляция пропадает. Наконец, при $\lambda \approx \omega$ (процесс, близкий к резонансному) движение системы носит характер биений, которые постепенно затухают (рис. 3.8, в). Период биений равен $2\pi / (\omega - \lambda)$. Если $\omega = \lambda$ и сил сопротивления нет, то биения не устанавливаются, и возникает расходящийся нестационарный процесс (рис. 1.10, б).

3.3.5. Для резонансных кривых на рис. 3.7 можно указать точные значения максимумов (β_{\max}) и соответствующие этим максимумам значения параметра $\gamma = \lambda / \omega$:

$$\beta_{\max} = \beta(\gamma_{\max}) = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}; \gamma_{\max} = \sqrt{1-\zeta^2}. \quad (3.63)$$

Отметим, что при резонансе, под которым обычно понимают случай $\omega = \lambda$ (то есть $\gamma = 1$), значение коэффициента динамичности несколько меньше β_{\max} : $\beta_1 = 1/2\zeta$. Значение коэффициента динамичности, когда частота λ совпадает с собственной частотой, вычисленной с учетом сопротивления, равно

$$\beta_2 = \beta\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) = \beta\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right) = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-3\zeta^2/4}}.$$

Таким образом, $\beta_1 < \beta_2 < \beta_{\max}$. Однако эта разница в значениях β_1 , β_2 , β_{\max} весьма незначительна. При $\zeta > \sqrt{0,5}$ кривые на рис. 3.7 не имеют максимума (они монотонны).

3.3.6. Значения β показывают коэффициент изменения амплитуды колебаний по сравнению с $A_{ст} = P_0 / c$. Можно найти коэффициент передачи силы:

$$\tilde{\beta} = \frac{N_{\max}}{P_0}, \quad (3.64)$$

где

$$N_{\max} = \max_t |N(t)| = \max_t |cx + \alpha\dot{x}|. \quad (3.65)$$

Ясно, что в (3.65) $N(t) = cx + \alpha\dot{x}$ это усилие, передаваемое на основание осциллятора упругими и вязкими элементами, соединяющими массу с основанием. Вычислим β как функцию $\gamma = \lambda / \omega$. В соответствии с (3.59) и (3.60)

$$x(t) = A \cos(\lambda t - \varphi) = \frac{P_0}{c} \beta \cos(\lambda t - \varphi). \quad (3.66)$$

Подставляя (3.66) в (3.65), с учетом (3.2), (3.19), получаем

$$N_{\max} = \beta P_0 \max_t \left| \cos(\lambda t - \varphi) - 2\zeta \frac{\lambda}{\omega} \sin(\lambda t - \varphi) \right| =$$

$$= P_0 \beta \sqrt{1 + \frac{4\zeta^2 \lambda^2}{\omega^2}}. \quad (3.67)$$

Таким образом,

$$\tilde{\beta} = \frac{N_{\max}}{P_0} = \beta \sqrt{1 + \frac{4\zeta^2 \lambda^2}{\omega^2}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4\zeta^2 \lambda^2}{\omega^2}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2 \lambda^2}{\omega^2}}}. \quad (3.68)$$

Графики $\tilde{\beta}(\lambda/\omega)$ приведены на рис. 3.9. Следует заметить, что все кривые, независимо от значения ζ , пересекаются в точке $(\sqrt{2}, 1)$. При $\lambda/\omega > \sqrt{2}$ сила, передаваемая на основание, уменьшается по сравнению с внешней силой (так называемый эффект виброизоляции). Вязкость системы способствует снижению N_{\max} при $\lambda/\omega < \sqrt{2}$ и ее некоторому увеличению при $\lambda/\omega > \sqrt{2}$ силу N_{\max} .

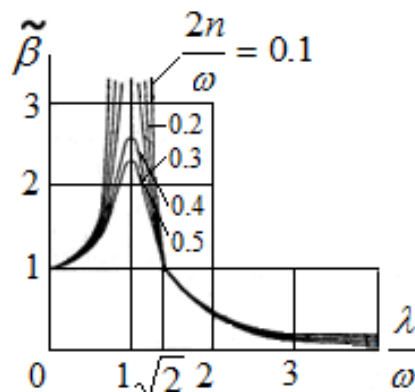


Рис. 3.9. Графики коэффициентов динамичности

3.3.7. Помимо коэффициентов динамичности β , $\tilde{\beta}$, при исследовании стационарных режимов колебаний часто используют коэффициент динамичности, соответствующий стационарному кинематическому нагружению (т. е. гармоническому колебанию основания осциллятора). В этом случае

правая часть уравнения колебаний пропорциональна массе, некоторой амплитуде A_0 и квадрату частоты возмущения λ^2 : $P_0 = mA_0\lambda^2$. Часто исследователя интересует отношение максимума амплитуды к A_0 , то есть

$$\tilde{\beta} = \frac{\max_t |x(t)|}{A_0}. \quad (3.69)$$

Так как

$$\max_t |x(t)| = \beta A_{CT} = \beta \frac{P_0}{c} = \frac{\beta mA_0\lambda^2}{c} = \beta A_0 \frac{\lambda^2}{\omega^2}, \quad (3.70a)$$

то

$$\tilde{\beta} = \frac{\frac{\lambda^2}{\omega^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2\lambda^2}{\omega^2}}}. \quad (3.70б)$$

Графики $\tilde{\beta}(\lambda/\omega)$ приведены на рис. 3.6, б. Как видно из рис. 3.6, б, характер изменения $\tilde{\beta}$ таков: от нуля до максимума ($\beta_{\max} \approx 1/2\zeta$), а затем до единицы. В то же время характер изменения β и $\tilde{\beta}$ противоположен: от единицы до максимума ($\beta_{\max} \approx \tilde{\beta}_{\max} \approx 1/2\zeta$), а затем до нуля. Однако фазовые запаздывания в этих случаях также определяются рис. 3.7.

3.3.9. Как правило, внешние периодические воздействия описываются более сложными зависимостями, чем гармонический закон. В этих случаях описывающая воздействия периодическая функция $\Omega(t)$ раскладывается в ряд Фурье:

$$\Omega(t) = \frac{G_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [G_k \cos(k\lambda t) + H_k \sin(k\lambda t)], \quad (3.71)$$

где

$$G_k = \frac{2}{T} \int_0^T \Omega(t) \cos(k\lambda t) dt, \quad H_k = \frac{2}{T} \int_0^T \Omega(t) \sin(k\lambda t) dt, \quad k=0,1,2,\dots;$$

T – период кинематического воздействия; $\lambda = \frac{2\pi}{T}$ – основная частота воздействия.

Стационарный режим колебаний осциллятора в случае воздействия на него периодической нагрузки $\Omega(t)$ является суммой стационарных движений, вызываемых каждой из гармоник.

3.4. Линейные системы с конечным числом степеней свободы. Метод начальных координат

3.4.1. Приведенные выше методы исследования колебаний линейной системы с одной степенью свободы применяются и для линейных систем с n степенями свободы. Для этого система n взаимосвязанных уравнений типа (2.16) или (2.17) сводится специальными преобразованиями к n независимым уравнениям. Затем каждое уравнение преобразованной системы решается вышеописанными способами. Процедура преобразования исходной системы линейных дифференциальных уравнений в систему независимых друг от друга уравнений называется методом приведения к собственным формам или методом главных координат. Наличие диссипативных членов в исходной системе приводит к существенному усложнению метода. Поэтому обычно метод главных координат применяется к линейной системе без диссипации. Демпфирование учитывается уже на стадии исследования преобразованной системы. Такой прием значительно упрощает все аналитические и вычислительные операции метода, практически не сказываясь на точности моделирования механизмов диссипации. Чтобы установить алгоритм вышеуказанных преобразований, нужно проанализировать свободные колебания консервативной (без диссипации) системы с n степенями свободы.

3.4.2. Не умаляя общности рассуждений, проведем такой анализ на примере уравнений (2.17):

$$y_j = -\sum_{i=1} m_i \delta_{ij} \ddot{y}_i, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (3.72)$$

Решение системы (3.72) можно представить в виде

$$y_j = u_j \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.73)$$

где u_j – постоянные ($i = 1, 2, \dots, n$); ω – круговая частота; φ – начальная фаза.

Подставив y_j в уравнение (3.72) и сократив общий множитель $\cos(\omega t + \varphi)$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно u_i :

$$u_j = \omega^2 \sum_{i=1} m_i \delta_{ij} u_i, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.74)$$

В эту систему в качестве параметра входит квадрат частоты ω^2 . Система (3.74) однородная. Чтобы она имела ненулевые решения, ее определитель должен быть равен нулю:

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} (\omega^2 m_1 \delta_{11} - 1) & \omega^2 m_2 \delta_{12} & \dots & \omega^2 m_n \delta_{1n} \\ \omega^2 m_1 \delta_{21} & (\omega^2 m_2 \delta_{22} - 1) & \dots & \omega^2 m_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^2 m_1 \delta_{n1} & \omega^2 m_2 \delta_{n2} & \dots & (\omega^2 m_n \delta_{nn} - 1) \end{vmatrix}. \quad (3.75)$$

Уравнение (3.75) представляют собой алгебраическое уравнение n -ой степени относительно ω^2 . Оно называется частотным, или вековым, уравнением. Можно показать, что все n корней уравнения являются действительными и положительными, если исходное положение системы есть положение устойчивого статического равновесия. Обозначим корни (3.75) $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_k^2, \dots, \omega_n^2$. Каждой собственной частоте ω_k соответствует определенная форма колебания, то есть определенное соотношение между всеми амплитудными отклонениями u_i . В самом деле, если $\omega^2 = \omega_k^2$, то определитель уравнений (3.74) равен нулю. В этом случае одно из уравнений системы является следствием остальных и имеется лишь $n-1$ линейное однородное уравнение с n неизвестными. Из этих уравнений можно найти все амплитудные смещения, если произвольно задать одно из них (например, можно принять $u_1 = 1$).

Таким образом, для каждой собственной частоты ω_k определяем (с точностью до произвольного множителя) соответствующую ей форму колебаний, характеризуемую отношениями амплитудных отклонений $u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{nk}$. Здесь первый индекс означает номер обобщенного перемещения, второй – номер формы колебания. Матрица-столбец $U_k = \{u_{ik}\}$ называется собственной или главной формой колебаний.

Строго говоря, предыдущие рассуждения правомерны только при отсутствии кратных частот. Появление одинаковых (кратных) частот несколько меняет свойства системы (3.74), однако не меняет окончательный результат – существование собственной формы.

Обычно частоты и формы собственных колебаний нумеруют в порядке возрастания частот: $k = 1$ соответствует низшей, а $k = n$ – высшей собственной частоте. Каждому номеру k отвечает решение уравнений колебаний в форме (3.73)

$$y_{ik} = u_{ik} \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.76)$$

Движения в соответствии с уравнением (3.76) называют главными (нормальными) колебаниями системы.

Так как система уравнений (3.72) является линейной, то линейная комбинация решений вида (3.76)

$$y_i = \sum_{k=1}^n C_k u_{ik} \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (3.77)$$

также является ее решением.

В формулу (3.77) входят $2n$ постоянных $C_k, \varphi_k, (k = 1, 2, \dots, n)$ и, следовательно, она выражает общее решение системы уравнений (3.72). Постоянные могут быть определены из начальных условий:

$$y_i(0) = y_{i0}; \quad \dot{y}_i(0) = \dot{y}_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.78)$$

3.4.3. Рассмотрим простейший случай системы с двумя степенями свободы, например, балку с двумя массами – рис. 1.5, в (без вязких элементов). Уравнения движения этих масс имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= -m_1\delta_{11}\ddot{y}_1 - m_2\delta_{12}\ddot{y}_2; \\ y_2 &= -m_1\delta_{21}\ddot{y}_1 - m_2\delta_{22}\ddot{y}_2. \end{aligned}$$

После подстановки

$$y_1 = u_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad y_2 = u_2 \cos(\omega t + \varphi),$$

получаем:

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega^2 (m_1\delta_{11}u_1 + m_2\delta_{12}u_2); \\ u_2 &= \omega^2 (m_1\delta_{21}u_1 + m_2\delta_{22}u_2). \end{aligned} \tag{3.79}$$

Приравняем нулю определитель

$$\begin{vmatrix} (1 - \omega^2 m_1 \delta_{11}) & \omega^2 m_2 \delta_{12} \\ \omega^2 m_1 \delta_{21} & (1 - \omega^2 m_2 \delta_{22}) \end{vmatrix} = 0. \tag{3.80}$$

Раскрывая определитель (3.80), учтем, что $\delta_{12} = \delta_{21}$. В результате из (3.80) получаем

$$m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \omega^4 + (m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}) \omega^2 + 1 = 0.$$

Находим два значения квадрата собственной частоты:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} - \sqrt{(m_1 \delta_{11} - m_2 \delta_{22})^2 + 4m_1 m_2 \delta_{12}^2}}{2m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)}; \\ \omega_2^2 &= \frac{m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + \sqrt{(m_1 \delta_{11} - m_2 \delta_{22})^2 + 4m_1 m_2 \delta_{12}^2}}{2m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)}. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Соотношение между амплитудными значениями масс можно найти из любого уравнения в (3.79). Например, из первого уравнения получаем

$$\frac{u_{2k}}{u_{1k}} = \frac{1 - \omega_k^2 m_1 \delta_{11}}{\omega_k^2 m_1 \delta_{12}}. \tag{3.82}$$

Для определения u_{2k}/u_{1k} можно воспользоваться и вторым из уравнений (3.79). Сравнивая получившееся выражение с (3.82), убедимся, что с учетом (3.80) они равны. Амплитуду одной из масс можно задать произвольно. Примем $u_{11} = u_{12} = 1$. Тогда первая форма собственных колебаний будет характеризоваться величинами

$$u_1 = 1; \quad u_{21} = \frac{1 - \omega_1^2 m_1 \delta_{11}}{\omega_1^2 m_1 \delta_{12}},$$

а вторая –

$$u_{12} = 1; \quad u_{22} = \frac{1 - \omega_2^2 m_1 \delta_{11}}{\omega_2^2 m_1 \delta_{12}},$$

где ω_1^2, ω_2^2 берут из (3.81).

3.4.4. Рассмотрим расчетную схему на рис. 3.10, моделирующую вертикальные и угловые колебания тела на 2-х упругих опорах.

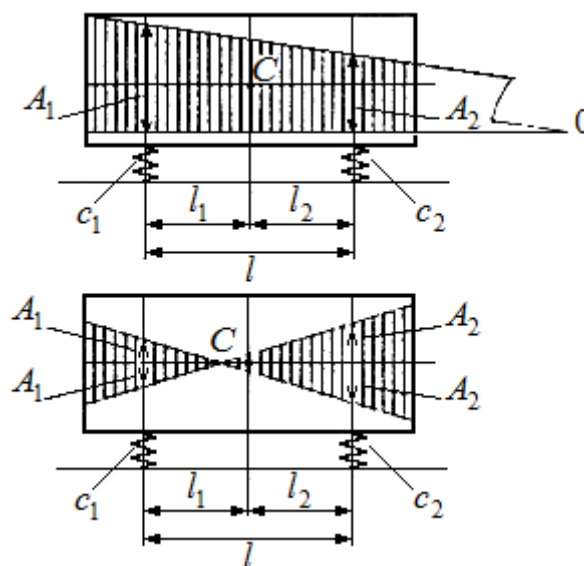


Рис. 3.10. Формы собственных колебаний твердого тела на упругих опорах

Для отыскания собственных частот запишем уравнения колебаний этой системы без диссипативных членов:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a_{11}x + a_{12}\psi &= 0; \\ \ddot{\psi} + a_{21}x + a_{22}\psi &= 0, \end{aligned} \tag{3.83}$$

$$a_{11} = \frac{c_1 + c_2}{m}, \quad a_{12} = \frac{c_1 l_1 - c_2 l_2}{m}, \quad a_{22} = \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2}{J_c},$$

где

$$a_{21} = \frac{c_1 l_1 + c_2 l_2}{J_c}.$$

Принимая $x = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$, $\psi = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$ и подставляя эти выражения в (3.83), получаем уравнения для определения ω :

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -\omega^2 + a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом,

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(a_{22} + a_{11}) \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21}} \right]; \quad (3.84)$$

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = -\frac{a_{12}}{a_{11} - \omega_1^2} = \frac{a_{22} - \omega_1^2}{a_{21}};$$

$$\frac{A_{12}}{A_{22}} = -\frac{a_{12}}{a_{11} - \omega_2^2} = \frac{a_{22} - \omega_2^2}{a_{21}}.$$

Формы главных колебаний тела показаны на рис. 3.10. Из этого рисунка видно, что при несимметричном расположении относительно опор центра масс та и другая форма главных колебаний содержит в определенной пропорции, как вертикальное перемещение, так и угловой поворот.

3.4.5. Выявим теперь очень важное свойство собственных форм. Докажем, что собственные формы взаимно ортогональны с весом. Ортогональность с весом означает, что в условие ортогональности входит весовая функция – распределение масс рассматриваемой системы. Аналитическая формулировка этого свойства применительно к собственным формам уравнений (3.72) такова:

$$\sum_{i=1}^n m_i u_{ij} u_{ik} = 0, \text{ если } j \neq k. \quad (3.85)$$

Чтобы избежать громоздких выкладок, проведем доказательство (3.85) в матричной форме. Пусть p_k – одна из собственных частот. Для этой частоты равенство (3.74) в матричной форме записывается так:

$$\{U\}_k = \omega_k^2 [\Delta] \cdot [M] \cdot \{U\}_k. \quad (3.86)$$

В (3.86) $\{U\}_k$ – матрица-столбец, компонентами которой являются u_{ik} ; $[\Delta]$ – квадратная матрица, компонентами которой являются δ_{ik} ; $[M]$ – диагональная матрица, компонентами которой являются m_i .

Верны соотношения

$$[\Delta] = [\Delta]^T, [C] = [\Delta]^{-1}, [C] = [C]^T, [M] = [M]^T, \quad (3.87)$$

где T – знак транспонирования матрицы.

Первое равенство следует из теоремы взаимности Максвелла-Бетти: $\delta_{jk} = \delta_{kj}$. Таким же свойством обладает обратная матрица C (матрица жесткостей). Четвертое равенство обусловлено тем, что матрица $[M]$ диагональна. Исходя из (3.86), запишем два равенства:

$$\begin{aligned} \{U\}_k &= \omega_k^2 [\Delta] \cdot [M] \cdot \{U\}_k; \\ \{U\}_j &= \omega_j^2 [\Delta] \cdot [M] \cdot \{U\}_j. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Из (3.88) получаем

$$[C] \{U\}_k = \omega_k^2 [M] \cdot \{U\}_k; \quad (3.89a)$$

$$[C] \{U\}_j = \omega_j^2 [M] \cdot \{U\}_j. \quad (3.89b)$$

Оставим (3.89a) без изменений и выполним операцию транспонирования во втором равенстве:

$$[C] \{U\}_k = \omega_k^2 [M] \cdot \{U\}_k; \quad (3.90a)$$

$$\{U\}_j^T [C] = \omega_j^2 \{U\}_j^T [M]. \quad (3.90b)$$

При операции транспонирования матричного произведения $A \cdot B$ было использовано правило

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T,$$

и соотношения (3.87).

Умножим теперь (3.90a) слева на $\{U\}_j^T$ и (3.90b) справа на $\{U\}_k$. Тогда получим:

$$\{U\}_j^T [C] \{U\}_k = \omega_k^2 \{U\}_j^T [M] \{U\}_k, \quad (3.91a)$$

$$\{U\}_j^T [C] \{U\}_k = \omega_j^2 \{U\}_j^T [M] \{U\}_k. \quad (3.91b)$$

Вычитая из (3.91a) равенство (3.91б), получаем

$$(\omega_k^2 - \omega_j^2) \{U\}_j^T [M] \{U\}_k = 0. \quad (3.92)$$

Если $\omega_k^2 \neq \omega_j^2$, то

$$\{U\}_j^T [M] \{U\}_k = 0. \quad (3.93)$$

Перейдя в (3.93) от матричной к покомпонентной форме записи, получаем (3.85).

Если от равенств (3.91) перейти к равенствам

$$\frac{1}{\omega_k^2} \{U\}_j^T [C] \{U\}_k = \{U\}_j^T [M] \{U\}_k, \quad (3.94)$$

$$\frac{1}{\omega_j^2} \{U\}_j^T [C] \{U\}_k = \{U\}_j^T [M] \{U\}_k,$$

и вычтя из первого равенства второе, то придем к соотношению

$$\{U\}_j^T [C] \{U\}_k = 0. \quad (3.95)$$

Таким образом, имеем два равенства, описывающие ортогональность собственных форм, но с различными весовыми функциями:

$$\{U\}_j^T [M] \{U\}_k = 0, \quad \{U\}_j^T [C] \{U\}_k = 0, \quad \text{если } j \neq k.$$

Если $j = k$, то

$$\{U\}_j^T [M] \{U\}_k = \sum_{i=1}^n m_i u_{ij}^2 = m^{(j)}, \quad (3.96a)$$

$$\{U\}_j^T [C] \{U\}_k = \sum_{i=1}^n c_i u_{ij}^2 = c^{(j)}. \quad (3.96b)$$

Параметры $m^{(j)}$, $c^{(j)}$ называют массой и жесткостью, приведенными к j -й форме.

Введем в рассмотрение квадратную матрицу U , столбцами которой являются матрицы – столбцы $\{U\}_k$. Тогда вместо (3.89), (3.93), (3.95), (3.96) имеем

$$[C][U] = [M] \cdot [U] \cdot [\omega^2], \quad (3.97)$$

$$[U]^T [M] \cdot [U] = [M_{\text{пр}}], \quad [U]^T [C][U] = [C_{\text{пр}}]. \quad (3.98)$$

В (3.97) $[\omega^2]$ – квадратная диагональная матрица, диагональными членами которой являются ω_j^2 . В (3.98) $[M_{\text{пр}}]$, $[C_{\text{пр}}]$ – квадратные диагональные матрицы, диагональными членами которых являются $m^{(j)}$, $c^{(j)}$. Умножая (145) слева на $[U]^T$ и учитывая (3.98), получаем

$$[C_{\text{пр}}] = [M_{\text{пр}}] [\omega^2]. \quad (3.99)$$

Отсюда

$$c^{(j)} = m^{(j)} \omega_j^2. \quad (3.100)$$

3.4.6. Основываясь на установленных выше свойствах собственных форм, покажем, что заменой переменных можно взаимосвязанные уравнения (3.72) заменой переменных свести к n уравнениям, независимым друг от друга. Запишем (3.72) в матричной форме

$$\{y\} = -[\Delta][M]\{\ddot{y}\}, \quad (3.101a)$$

или

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{y\} = 0, \quad (3.101b)$$

где $\{y\}$ – матрица-столбец неизвестных y_j .

Сделаем в (3.101) замену переменных. Новые неизвестные введем по формуле

$$\{q\} = [U]^{-1} \{y\}, \quad (3.102a)$$

$$\{y\} = [U]\{q\}. \quad (3.102b)$$

Подставим (3.102b) в (3.101) и умножим (3.101) слева на $[U]^T$:

$$[U]^T [M][U]\{\ddot{q}\} + [U]^T [C][U]\{q\} = 0. \quad (3.103)$$

Используя соотношения (3.98), можно записать (3.103) в виде

$$[M_{\text{пр}}]\{\ddot{q}\} + [C_{\text{пр}}]\{q\} = 0. \quad (3.104)$$

Если для уравнений (3.101) заданы начальные условия, то для уравнений (3.104) эти начальные условия определяются преобразованием:

$$\{q(0)\} = [U]^{-1}\{y(0)\}, \quad \{\dot{q}(0)\} = [U]^{-1}\{\dot{y}(0)\}. \quad (3.105)$$

3.4.7. Рассмотрим теперь уравнения вынужденных колебаний. В этом случае вместо (3.101б) имеем:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} = P(t). \quad (3.106)$$

где $P(t)$ – матрица-столбец внешних нагрузок.

Повторим вышеприведенные выкладки: подставим (3.102б) в (3.106) и умножим (3.106) слева на $[U]^T$. Тогда получим вместо (3.106) систему независимых друг от друга уравнений:

$$[M_{\text{пр}}]\{\ddot{q}\} + [C_{\text{пр}}]\{\dot{q}\} = Q(t), \quad (3.107a)$$

где

$$Q(t) = [U]^T\{P(t)\}. \quad (3.107б)$$

Метод преобразования системы n взаимосвязанных линейных дифференциальных уравнений к системе n независимых друг от друга уравнений называется (как было указано выше) методом главных или нормальных координат (МНК).

3.4.8. МНК обладает очень высокой степенью общности. Продемонстрированный выше алгоритм метода применительно к уравнениям (3.72) является лишь примером. Приведение исходной системы к независимым уравнениям, описывающим колебания по собственным формам, возможно для любых уравнений (2.37б), моделирующих колебания механической системы. С математической точки зрения важно, что при моделировании упругих механических колебаний матрица $[C]$ в (2.37б) является положительно определенной [2]. Это обстоятельство и обеспечивает существование ортогональных собственных форм.

В общем виде процедуру разделения уравнений можно описать следующим образом.

1. Вводятся новые координаты по формуле (3.102а). Эти координаты называются главными или нормальными.

2. Подстановка (3.102а) в уравнения (2.376) приводит к уравнениям

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \frac{1}{M_k} Q_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.108)$$

где ω_k – собственные частоты рассматриваемой системы; $Q_k(t)$ – приведенные к координатам q_k внешние силы

$$Q_k(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t) u_{ik}; \quad (3.109)$$

M_k – приведенные массы, соответствующие координатам q_k :

$$M_k = \sum_{i=1}^n m_i u_{ik}^2. \quad (3.110)$$

Уравнения (3.108) решаются методами, изложенными выше. Каждая из главных координат q_k определяется независимо от других координат уравнением, которое по форме совпадает с уравнением вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы: масса M_k , жесткость $c_k = M_k \omega_k^2$, частота ω_k , возмущающая сила $Q_k(t)$.

3. Начальные условия для (3.108) определяются с помощью формулы (3.105).

4. Переход от нормальных координат q_k к физическим координатам y_i проводится по формулам (3.102б).

3.4.9. В исходных уравнениях под y_i понимается как линейное, так и угловое перемещение. Если y_i – угловой поворот тела относительно некоторой оси, то в соответствующих членах предыдущих формул масса должна быть заменена моментом инерции. Важно помнить также следующее: ординаты формы u_{ik} есть отношения амплитуд обобщенных координат системы, когда она колеблется по данной форме. Поэтому, если за единичную базу принята амплитуда линейной координаты, то все u_{ik} , соответствующие линейным координатам, – это безразмерные величины, а u_{ik} , соответствующие угловым координатам, имеют размерность $1/l$, где l – м, см и т. д. в зависимости от принятой системы единиц. Так, если в примере п. 3.4.4, $A_1 = l$ – безразмерная величина, то

$$A_2 = A_1 \frac{a_{21}}{a_{22} - p_{1,2}}, \quad (3.111)$$

в СИ имеет размерность $1/\text{м}$. Соответственно,

$$M_k = mA_1^2 + J_c A_2^2. \quad (3.112)$$

имеет размерность кг (второе слагаемое в (3.112) $J_c A_2^2$ также имеет размерность $\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{м}^2 = \text{кг}$). Предложенный выше подход распространяется и на системы с бесконечным числом степеней свободы (см. п. 3.5).

3.4.10. Рассмотрим способы учета в методе нормальных координат диссипативных сил. Теоретический анализ показывает, что только в том случае, когда силы линейного вязкого трения пропорциональны либо массам, либо жесткостям, собственные формы диссипативной системы действительны и совпадают с собственными формами консервативной системы. Следует, однако, отметить, что в большинстве случаев исследователь не располагает надежной информацией о распределении диссипативных сил в системе. Как правило, удается на основе экспериментов оценить лишь интегральные эффекты сил диссипации разнообразной природы (внутреннее трение в материале, конструкционный гистерезис и т. п.). В этих условиях любая разумная гипотеза о распределении сил диссипации является одинаково приемлемой. Естественно поэтому для простоты предположить, что силы диссипации есть силы вязкого трения и они распределены таким образом, что главные координаты для консервативной системы являются главными и для системы с вязкими членами. В матричной форме гипотеза пропорциональности диссипативных сил распределению масс и жесткостей записывается следующим образом: в уравнении (2.37а)

$$[B] = a[M] + b[C]. \quad (3.113)$$

Выполнив все вышеописанные процедуры перехода к нормальным координатам, вместо (3.107) получим

$$[M_{\text{пр}}] \{\ddot{q}\} + [B_{\text{пр}}] \{\dot{q}\} + [C_{\text{пр}}] \{q\} = Q(t). \quad (3.114)$$

В (3.114) $[B_{\text{пр}}]$, как и $[M_{\text{пр}}]$, $[C_{\text{пр}}]$, диагональная матрица. Покомпонентная запись (3.114):

$$\ddot{q}_k + 2n_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \frac{1}{M_k} Q_k(t). \quad (3.115)$$

В (3.115) ω_k^2 , M_k , $Q_k(t)$ определяются так же, как и выше, а коэффициент n_k вычисляется по формуле

$$n_k = n_0 + \frac{1}{2} \nu \cdot \omega_k^2, \quad (3.116)$$

где ν – коэффициент пропорциональности между коэффициентами вязкости и жесткостями; n_0 – коэффициент пропорциональности между коэффициентами вязкости и массами:

$$\alpha_{ik} = \nu c_{ik}, \quad \alpha_i = 2n_0 m_i.$$

Такой учет диссипации называется введением вязкости по Рэлею.

3.4.11. Гипотеза (3.113) позволяет сохранить существование собственных форм для уравнений (2.37а). Однако коэффициенты в форме (3.116) не соответствуют гипотезе Фойгта-Бокка (3.19). В то же время гипотеза Фойгта-Бокка является предпочтительней с точки зрения её физического смысла, и её широко используют в практических расчетах. Поэтому обычно поступают следующим образом. Переход к нормальным координатам осуществляют для уравнений (2.37б) и получают уравнения (3.107). После этого в уравнения (3.107) вводят вязкие члены, коэффициенты n_k в которых определяются по формуле (3.19).

3.4.12. Таким образом, порядок расчета по МНК следующий:

- определяются собственные частоты и формы колебаний исследуемой линейной консервативной системы: ω_k^2 и u_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$);
- по формулам (3.96а), (3.107б) определяются приведенные массы и приведенные внешние силы;
- формируются уравнения (3.107а);
- в уравнения (3.107а) вводятся вязкие члены, в которых коэффициенты n_k определяются по формуле (3.19);
- решаются уравнения (3.115) (методами, описанными в п. п. 3.1.2–3.3.9), начальные условия для которых определяются с помощью (3.105);
- после определения $q_k(t)$ находятся все требуемые физические параметры с помощью соотношения (3.102б).

3.4.13. Собственные частоты и формы колебаний – это не только формальные математические параметры, но и физически содержательные понятия, отражающие внутренние свойства системы. Чем ближе исследуемый объект к модели линейной системы, тем нагляднее выявляются эти свойства. (Отметим, что линейная модель адекватна, как правило, малым упругим колебаниям любых механических систем.)

Суть вышеуказанных физических свойств в следующем: если внешние возмущения распределены в пространстве по закону собственной формы u_{ik} , то колебания системы происходят только по этой форме, и система эквивалентна линейному осциллятору с собственной частотой ω_k . Внешними возмущениями являются как начальные смещения и скорости, так и внешние силы. Любые внешние возмущения можно разложить в ряд по собственным формам (не обязательно сходящийся). Коэффициенты этих рядов ($Q_k(t)$, \dot{q}_{0k} , q_{0k}) есть

возмущающие факторы для движений по соответствующим собственным формам. Сумма всех этих движений дает общее движение системы.

Наиболее эффективный экспериментальный способ выявления собственных частот и форм – резонансное воздействие на систему. Пусть на систему действует некоторая нагрузка, меняющаяся во времени по гармоническому закону и не обязательно распределенная в пространстве по какой-то собственной форме. При приближении частоты воздействия λ к ω_k возникают резонансные колебания формы u_{ik} . Так как для других частот и форм резонанса нет, то преобладающим типом колебаний является эта « k -ая» форма, а движением по другим формам можно пренебречь. Таким образом, при резонансном режиме $\lambda = \omega_k$ мы можем «увидеть» « k -ую» собственную форму и измерить ее параметры. Испытания на резонанс являются очень распространенным методом экспериментального исследования внутренних свойств системы.

3.5. Уравнения колебаний для систем с бесконечным числом степеней свободы

3.5.1. При рассмотрении статических задач бесконечное число степеней свободы имеют системы с непрерывно распределенными упругими параметрами. Например, балка на рис. 3.11 имеет бесконечное число степеней свободы, так как её упругие свойства непрерывно распределены по длине и, следовательно, возможно бесконечное число независимых конфигураций при изгибе. Если прогиб балки за счет упругости мал по сравнению с её перемещением за счет податливости опор, то расчетная схема на рис. 3.11, *а* может быть заменена на расчетную схему на рис. 3.11, *б*, в которой балка считается твердым телом. Система на рис. 3.11, *б* имеет только две независимые конфигурации, т. е. две степени свободы. В данном случае уменьшение степеней свободы связано с отказом от учета континуальной упругости.

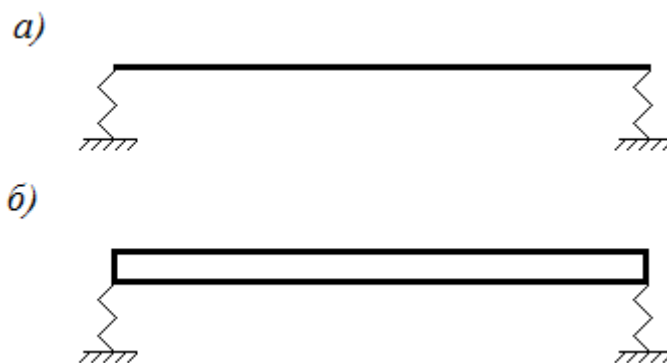


Рис. 3.11. Уменьшение степеней свободы за счет пренебрежения упругими свойствами балки

Однако в динамических задачах фактором, определяющим число степеней свободы, является характер распределения масс в расчетной схеме. Ес-

ли масса балки считается не распределенной по длине (рис. 3.12, *a*), а сосредоточенной в 2-х точках (рис. 3.12, *б*), то такая система имеет всего две динамические степени свободы, несмотря на непрерывное распределение упругих свойств по длине балки.

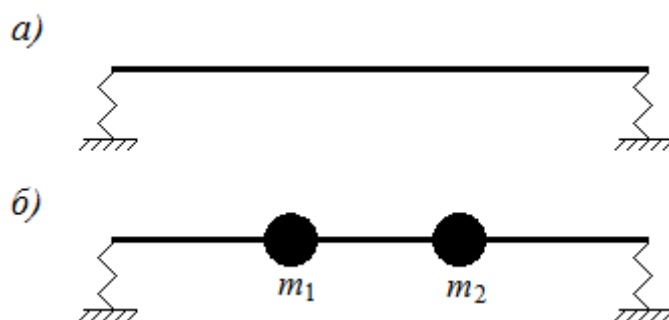


Рис. 3.12. Уменьшение степеней свободы за счет дискретизации массовых параметров

Уменьшение степеней свободы в динамической задаче (по сравнению со статической) означает не упрощение расчета, а его разбиение на два этапа. На первом этапе вычисляются необходимые для решения динамической задачи коэффициенты жесткости или коэффициенты влияния. Все сложности, связанные с непрерывным распределением упругих свойств, учитываются и преодолеваются на этом этапе. На 2-м этапе исследуется изменение деформации системы во времени. На этом этапе конфигурация системы зависит только от движения масс. Безмассовые участки ведут себя, как сосредоточенные в точке упругие элементы. Если в системе конечное число точечных масс или твердых тел, то число степеней свободы определяется числом координат, описывающих положение масс или тел. Это обстоятельство и обуславливает уменьшение степеней свободы по сравнению со статической расчетной схемой. Если динамическая расчетная схема содержит n сосредоточенных твердых тел (или масс), то число степеней свободы не может превосходить $6n$ (или $3n$). Системы с распределенной массой обладают бесконечным числом степеней свободы.

Во многих случаях модели с непрерывно распределенной массой намного точнее моделей с сосредоточенными (дискретными) массовыми параметрами. В частности, модели с дискретными параметрами не описывают волновые процессы. Распространение возмущений в таких моделях происходит с бесконечной скоростью. Поэтому для теоретических исследований рассмотрение непрерывных динамических моделей необходимо.

3.5.2. Рассмотрим динамическое уравнение, описывающее продольные колебания стержня с равномерно распределенными по длине упругими параметрами и массой. Для составления уравнения применим метод кинестатики.

В статике продольная деформация стержня описывается уравнением

$$EF \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -q(z). \quad (3.117)$$

В (3.117) z – продольная координата сечения стержня; x – продольное перемещение сечения при деформации стержня; $q(z)$ – распределенная вдоль стержня продольная нагрузка; F – площадь поперечного сечения; E – модуль упругости материала стержня.

Чтобы методом кинестатики из (3.117) получить уравнение продольных колебаний, нужно в эти уравнения ввести продольные силы инерции:

$$EF \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -q(z,t) + m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \quad (3.118)$$

В (3.118) m_0 – погонная масса стержня.

Преобразовав (3.118) получаем

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{-1}{EF} q(z,t), \quad (3.119)$$

где $a = \sqrt{EF/m_0}$; E – модуль упругости; F – площадь поперечного сечения стержня. Так как $m_0 = \rho F$, где ρ – плотность материала стержня, то $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Параметр a равен скорости распространения продольной волны в стержне [1].

3.5.3. При рассмотрении крутильных колебаний стержня предполагается, что поперечные сечения остаются плоскими (депланацией сечений пренебрегают) и поворачиваются вокруг оси стержня, как жесткие диски. Из-за сохранения гипотезы о поведении сечений как твердых дисков крутильные колебания стержня описываются таким же уравнением, как (3.119). Меняется лишь смысл неизвестной функции и входящих в уравнение параметров. В результате уравнение крутильных колебаний имеет вид

$$GI_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\mu(z,t),$$

или

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{1}{a_G^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\frac{1}{GI_p} \mu(z,t), \quad (3.120)$$

где θ – относительный угол поворота сечения (относительно соседнего сечения); $\mu(z, t)$ – погонный крутящий момент; $a_G = \sqrt{GI_p/J}$, где G – модуль упругости; I_p – геометрический момент инерции поперечного сечения стержня; J – погонный массовый момент инерции стержня. Так как $J = I_p \rho$, то $a_G = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ – скорость распространения сдвиговой волны.

3.5.4. Рассмотрим натянутую струну – рис. 3.13, *а*. Струну считаем абсолютно гибкой, так что в каждом ее поперечном сечении имеется только продольная сила. Предположим также, что поперечные смещения точек струны малы и поэтому натяжение T_0 можно считать не изменяющимся в процессе движения.

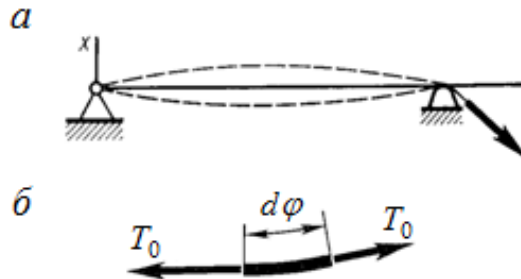


Рис. 3.13. Натянутая струна

Рассмотрим участок струны – рис. 3.13, *б*. Учтем, что

$$\varphi = \frac{dx}{dz}, \text{ то есть } d\varphi = \frac{d^2x}{dz^2} dz, \quad (3.121)$$

где x – поперечные перемещения точек струны.

Уравнение равновесие выделенного участка (рис. 3.13, *б*) имеет вид

$$q(z)dz = -T_0 d\varphi. \quad (3.122)$$

Из (3.122) с учетом (3.121) получаем

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{1}{T_0} q(z). \quad (3.123)$$

Введя в (3.123) силы инерции, получим уравнение поперечных колебаний струны, аналогичное (3.119) и (3.120):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{a_T^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{1}{T_0} q(z, t). \quad (3.124)$$

где $a_T = \sqrt{T_0/m_0}$; m_0 – масса единицы длины струны.

Уравнения (3.119), (3.120), (3.124) описывают как колебательные, так и волновые процессы. Поэтому эти уравнения называются волновыми.

3.5.5. Уравнения, описывающие изгиб прямолинейных прямых стержней (рис. 3.14) без учета сдвига, имеют вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) = q(z). \quad (3.125)$$

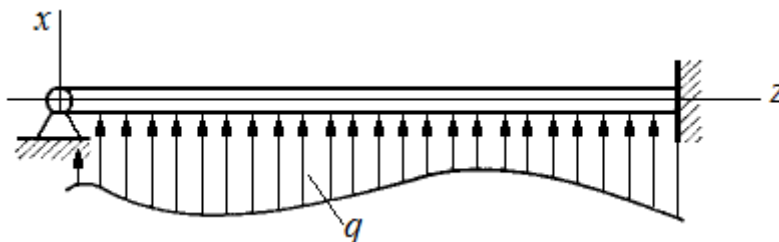


Рис. 3.14. Изгиб прямолинейных прямых стержней

В (3.125) $x(z)$ – перемещение поперечного сечения; EI – жесткость при изгибе в плоскости колебаний; m_0 – масса единицы длины стержня. Если стержень однородный, то $EI = \text{const}$, и вместо (3.125) имеем

$$EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = q(z). \quad (3.126)$$

Введя в (3.125) силы инерции, получим следующее уравнение колебаний однородного стержня

$$EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = q(z, t). \quad (3.127)$$

3.5.6. Уравнение (3.127) основано на гипотезе плоских сечений Бернулли. Это уравнение не учитывает деформации сдвига и инерцию продольного движения частиц стержня. В результате не учитывается инерция сечения на поворот. Все эти огрубления модели приводят к тому, что (3.127) не является волновым уравнением (в отличие от уравнений (3.119), (3.120), (3.124)).

Этот серьезный недостаток можно ликвидировать, если усовершенствовать модель Бернулли. При развитии модели Бернулли предполагается, что сечения балки (стержня) остаются плоскими, но кроме изгиба претерпевают деформацию сдвига и перестают быть перпендикулярными к изогнутой оси балки. Такая модель балки была предложена С. П. Тимошенко и называется балкой Тимошенко.

Обозначим ϑ поворот плоскости сечения балки вследствие её изгиба. В модели Тимошенко сечения плоскопараллельно сдвигаются, образуя

с осью балки дополнительно к углу ϑ еще и угол сдвига γ . Знаки γ и ϑ противоположны. Поэтому

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \vartheta - \gamma,$$

или

$$\gamma = \vartheta - \frac{\partial x}{\partial z}. \quad (3.128)$$

В (3.128) $\frac{\partial x}{\partial z}$ – суммарный поворот сечения относительно оси балки.

Можно записать соотношения

$$M = EI \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad (3.129a)$$

$$Q = \frac{GF}{\alpha} \gamma = \frac{GF}{\alpha} \left(\vartheta - \frac{\partial x}{\partial z} \right). \quad (3.129b)$$

В (3.129) M , Q – изгибающий момент и поперечная сила; F – площадь сечения; α – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению и зависящий от его формы. Остальные обозначения те же, что и выше.

Запишем с учетом сил инерции уравнение равновесия вертикальных сил, действующих на элемент балки dz :

$$q(z,t)dz - \frac{\partial Q}{\partial z} dz - \rho F dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0. \quad (3.130a)$$

В (3.130a) $q(z,t)$ – внешняя погонная нагрузка.

Уравнение равновесия приложенных к элементу моментов:

$$\mu(z,t)dz + \frac{\partial M}{\partial z} dz - Qdz - \rho I dz \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0. \quad (3.130b)$$

В (3.130b) $\mu(z,t)$ – внешняя погонная моментная нагрузка.

Подставив в (3.130) значения M , Q из формул (3.129), после преобразований получим уравнения

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{\alpha \rho}{G} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\alpha}{GF} q(z, t). \quad (3.131a)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - \frac{GF}{\alpha EI} \vartheta + \frac{GF}{\alpha EI} \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = -\frac{1}{EI} \mu(z, t). \quad (3.131б)$$

Уравнения (3.131) являются гиперболическими [2] и описывают волновые процессы в стержнях, распространяющиеся со скоростями $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ и $a_Q = \sqrt{\frac{\alpha G}{\rho}}$.

3.6. Метод нормальных координат для систем с бесконечным числом степеней свободы

3.6.1. Как видно из рассмотренных выше примеров, колебания систем с бесконечным числом динамических степеней свободы описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Если колебания малы, то для их анализа используют линейные уравнения, каковыми и являются, например, уравнения (3.119), (3.120), (3.124), (3.127), (3.131).

Общие закономерности упругих колебаний, установленные для линейных систем с конечным числом степеней свободы, остаются справедливыми и для систем с распределенной массой. В частности, в линейных системах с бесконечным числом степеней свободы существуют собственные частоты и формы, и, следовательно, к ним применим метод нормальных координат (МНК). Так как системы с распределенной массой обладают бесконечным числом степеней свободы, бесконечно и число форм и частот их собственных колебаний. Таким образом, для применения МНК нужно рассмотреть задачу об определении частот и форм собственных колебаний для систем, которые описываются уравнениями в частных производных.

3.6.2. Определение частот и форм собственных продольных колебаний стержней постоянного сечения. Исследование продольных и крутильных колебаний стержня постоянного поперечного сечения и колебания струны приводит к одному и тому же дифференциальному уравнению (3.119) в частных производных, так называемому волновому уравнению. Для этих задач различны лишь смысл перемещения x и числовые значения a . Поэтому далее рассматриваются решения уравнения только применительно к продольным колебаниям стержней. Полученные результаты могут быть полностью приложены к расчету крутильных колебаний и колебаний струн.

Решение волнового уравнения, соответствующее собственным колебаниям стержня, может быть представлено в виде:

$$x(z, t) = u(z) \cos(\omega t + \phi), \quad (3.132)$$

где ω – угловая частота колебаний; $u(z)$ – амплитудная функция, определяющая форму колебаний.

Подставив это выражение в уравнение (3.119) с нулевой правой частью, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для амплитудной функции

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \alpha^2 u = 0, \quad \alpha^2 = \frac{\omega^2}{a^2}. \quad (3.133)$$

Амплитудная функция должна удовлетворять граничным условиям на концах стержня. Эти условия таковы: при заделанных торцах $x = 0$, $u = 0$; при свободных торцах $N = 0$, $du / dz = 0$.

Если левый торец стержня упруго закреплен (рис. 3.15, а), при чем жесткость закрепления c , то $N = cx$, $EF (du / dz) = cu$. Если упруго закреплен правый торец (рис. 3.15, б): $EF (du / dz) = -cu$.

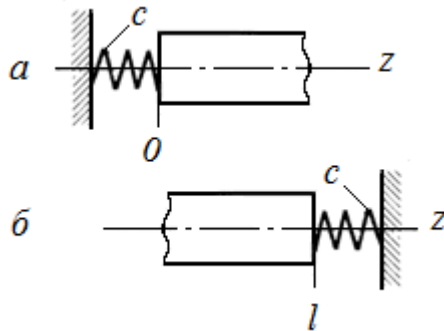


Рис. 3.15. Левый и правый торец стержня

Если конец стержня связан с жестким грузом массой m на левом конце (рис. 3.16, а), тогда $EF (du / dz) = -m\omega^2 u$.

Если груз закреплен на правом конце стержня (рис. 3.16, б), тогда $-EF (du / dz) = -m\omega^2 u$.

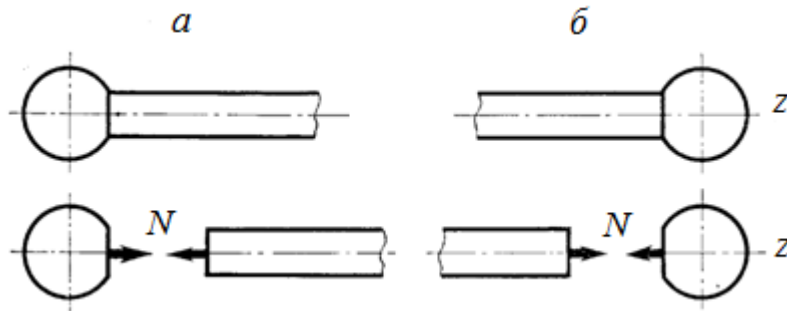


Рис. 3.16. Конец стержня связан с жестким грузом массой m

1. *Стержень, заделанный одним концом.* Из граничных условий $u_{z=0} = 0$; $(du/dz)_{z=l} = 0$ следует уравнение частот $\cos \chi = 0$; ($\chi = \omega l / a$), откуда

$$\omega_k = (k - 1/2)\pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

$$u_k(z) = \sin \left[(k - 1/2)(\pi z / l) \right].$$

При любом способе закрепления концов стержня, подставив в граничные условия общее выражение (3.125) функции $u(z)$, придем к системе двух алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2 . Равенство нулю определителя системы позволяет найти собственные частоты стержня. Формы показаны на рис. 3.17.

2. *Стержень, закрепленный по концам.* Условия $u(0) = 0$, $u(l) = 0$ приводят к уравнениям

$$C_1 = 0; \quad C_2 \sin \chi = 0 \quad (\chi = \alpha l = \omega l / a).$$

При $C_2 \neq 0$ необходимо, чтобы $\sin \chi = 0$. Отсюда $\chi_k = k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Частоты собственных колебаний $\omega_k = \chi_k a / l = k\pi \sqrt{E / (\rho l^2)}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Каждой собственной частоте соответствует форма собственных колебаний (собственная функция: $u_k = \sin(k\pi z / l)$).

Формы показаны на рис. 3.18.

3. *Стержень со свободными концами.* Граничные условия $(du/dz)_{z=0} = 0$; $(du/dz)_{z=l} = 0$ дают $C_2 \alpha = 0$; $-C_1 \alpha \sin \alpha l = 0$, откуда $\chi \sin \chi = 0$; ($\chi = \alpha l = \omega l / a$).

Это условие удовлетворяется при $\chi_0 = 0$ и $\chi_k = k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Собственные частоты:

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_k = \chi_k a / l = k\pi \sqrt{E / (\rho l^2)}.$$

Нулевой частоте соответствует $u = \text{const}$, т. е. движение стержня как жесткого, а ненулевым частотам –

$$u_k = \cos(k\pi z / l).$$

Формы показаны на рис. 3.19.

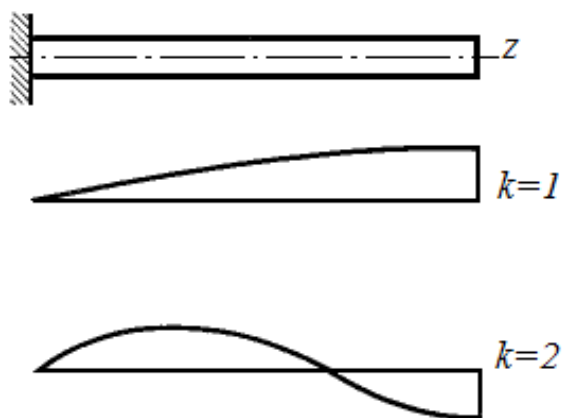


Рис. 3.17. Формы продольных колебаний стержня с одним закрепленным концом

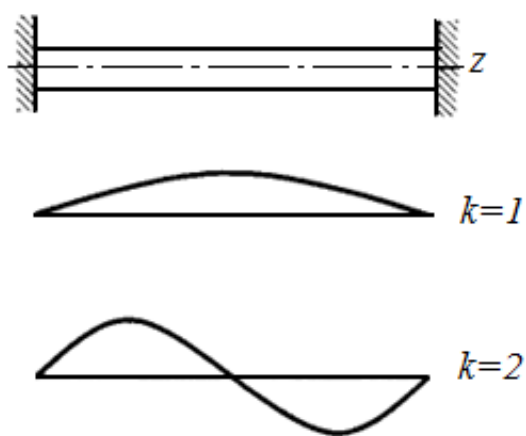


Рис. 3.18. Формы продольных колебаний стержня с закрепленными концами

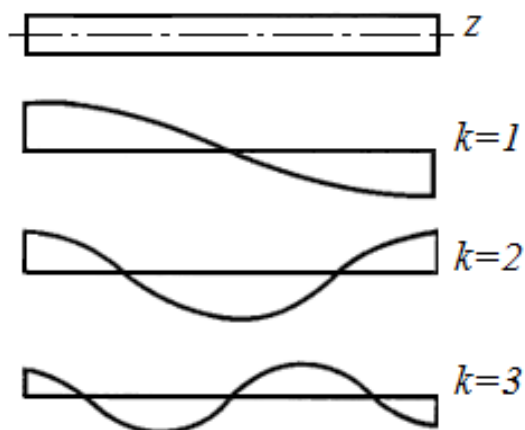


Рис. 3.19. Формы продольных колебаний стержня со свободными концами

3.6.3. Рассмотрим изгибные колебания стержня. Соответствующее собственным колебаниям решение уравнения движения (3.127) имеет вид

$$EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0. \quad (3.134)$$

Решение уравнения (3.134) представим в форме

$$x(z, t) = u(z) \cos(\omega t + \phi), \quad (3.135)$$

где ω – угловая частота колебаний; $u(z)$ – амплитудная функция.

Подставляя выражение (3.135) в уравнение (3.134), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 u}{dz^4} - \alpha^4 u = 0 \left[\alpha = \frac{\omega^2 m_0}{EI} \right]. \quad (3.136)$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (3.136), равны $\pm \alpha$ и $\pm \alpha \sqrt{-1}$. В соответствии с этим решения однородного уравнения (3.136) выражаются через тригонометрические и показательные функции аргумента αz . Значительное удобство представляет использование введенных А. Н. Крыловым комбинаций этих функций. Представим решение уравнения (3.136) в форме

$$u = C_1 K_1(\alpha z) + C_2 K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z). \quad (3.137)$$

Здесь C_1, \dots, C_4 – постоянные; K_1, \dots, K_4 – функции Крылова:

$$\begin{aligned} K_1(\alpha z) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \alpha z + \cos \alpha z), \\ K_2(\alpha z) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \alpha z + \sin \alpha z), \\ K_3(\alpha z) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \alpha z - \cos \alpha z), \\ K_4(\alpha z) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \alpha z - \sin \alpha z). \end{aligned} \quad (3.138)$$

На каждом конце стержня имеются два граничных условия, зависящие от способа закрепления. Некоторые возможные варианты граничных условий приведены в табл. 3.1.

При любом способе закрепления концов граничные условия приводят к системе четырех линейных однородных алгебраических уравнений относительно констант C_1, \dots, C_4 . Частоты собственных колебаний определяются из условий равенства нулю определителя этих уравнений.

1. *Стержень, шарнирно опертый по концам* (рис. 3.20, а).

Граничные условия таковы:

$$u_{z=0} = 0, \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=0} = 0, \Rightarrow C_1 = 0, C_3 = 0;$$

$$u_{z=l} = 0, \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=l} = 0.$$

Эти условия приводят к следующему соотношению $\sin \chi = 0$, где $\chi = \alpha l$, т. е. $\chi_k = k\pi$ ($k = 1, 2, 3 \dots$).

Отсюда частоты собственных колебаний




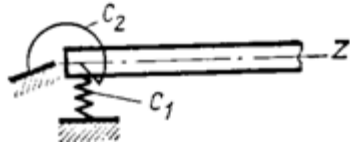
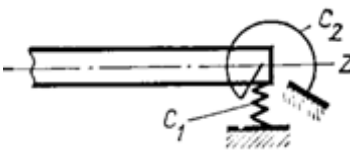
$$\omega_k = \frac{\chi_k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}} = k^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m_0 l^4}} \quad (k = 1, 2, 3 \dots).$$



k -я форма собственных колебаний представляет собой синусоиду с k полу-волнами (рис. 3.20, б, в):

$$u_k = \sin(k\pi z/l). \quad (3.139)$$

Таблица 3.1

Возможные варианты граничных условий

Название закрепления	Схема	Граничные условия
Заделка		$u = 0; \frac{du}{dz} = 0$
Шарнирная опора		$u = 0; \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$
Свободный конец		$\frac{d^2 u}{dz^2} = 0; \frac{d^3 u}{dz^3} = 0$
Упругая в отношении поперечных смещений и поворотов опора (c_1, c_2 – коэффициенты жесткости)		$c_1 u = -EI \frac{d^3 u}{dz^3};$ $c_2 \frac{du}{dz} = EI \frac{d^2 u}{dz^2}$
		$c_1 u = EI \frac{d^3 u}{dz^3};$ $c_2 \frac{du}{dz} = -EI \frac{d^2 u}{dz^2}$

Название закрепления	Схема	Граничные условия
Конец стержня связан с жестким грузом. Масса груза m , момент инерции I массы относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости чертежи		$m\lambda^2 u = EI \frac{d^3 u}{dz^3};$ $I\lambda^2 \frac{du}{dz} = -EI \frac{d^2 u}{dz^2}$
		$m\lambda^2 u = -EI \frac{d^3 u}{dz^3};$ $I\lambda^2 \frac{du}{dz} = EI \frac{d^2 u}{dz^2}$

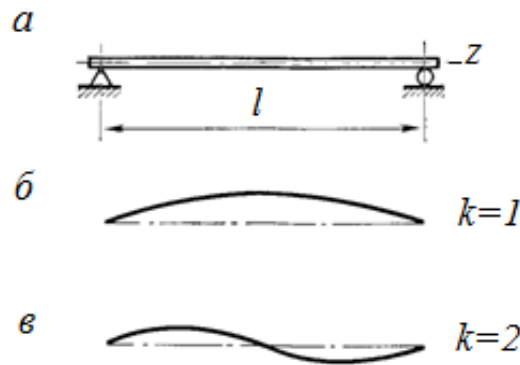


Рис. 3.20. Формы изгибных колебаний шарнирно опертого стержня

2. Консольный стержень (рис. 3.21).

Граничные условия таковы:

$$u_{z=0} = 0, \left(\frac{du}{dz} \right)_{z=0} = 0, \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=l} = 0, \left(\frac{d^3 u}{dz^3} \right)_{z=l} = 0.$$

Условия для $z = l$ приводят к следующему частотному уравнению: $\cos \chi = -1/\text{ch} \chi$. Корни этого уравнения $\chi_1 = 1,875$, $\chi_2 = 4,694$.

При $k > 2$

$$\chi_k \approx \frac{2k-1}{2} \pi.$$

Частоты колебаний определяются по формуле

$$\omega_k = \chi_k^2 \sqrt{\frac{EI}{m_0 l^4}}.$$

Амплитудные функции определяются уравнением

$$u_k(z) = K_2(\chi_k)K_3(\chi_k z/l) - K_1(\chi_k)K_4(\chi_k z/l).$$

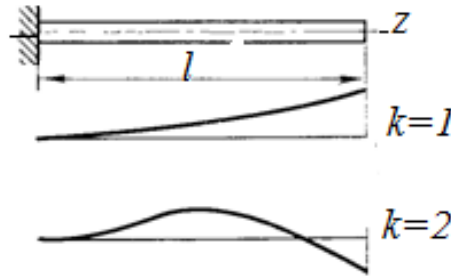


Рис. 3.21. Формы изгибных колебаний консольного стержня

3.6.4. Если все эти формы и частоты определены, то решение задачи о вынужденных колебаниях может быть получено методом нормальных координат. Для получения решения уравнения колебаний записываются в главных координатах:

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \frac{1}{M_k} Q_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots \quad (3.140)$$

В (3.140)

$$M_k = \int_V u_k^2(v) m(v) dv; \quad (3.140a)$$

$$Q_k = \int_V \Phi_k(t, v) u_k(v) dv. \quad (3.140б)$$

В (3.140) z – пространственная координата исходного положения точек системы; $\Phi_k(t, z)$ – закон распределения и изменения во времени действующей на систему внешней нагрузки; $m(z)$ – закон распределения обобщенных масс системы; $u_k(z)$, $q_k(t)$ – собственные формы и соответствующие им главные координаты системы; $x_j(t, z)$ – обобщенные смещения точек системы, в процессе колебаний.

Переход от нормальных координат q_k к физическим координатам x_j происходит по формулам:

$$x_j = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \cdot u_{jk}(z).$$

В практических расчетах производят редукцию бесконечной системы

уравнений (3.140), т. е. переход от бесконечного числа уравнений к конечному числу n . Число n учитываемых в расчете собственных форм определяется в каждой конкретной задаче быстротой возрастания ω_k^2 и требованиями к точности расчета.

3.7. Использование метода нормальных координат для анализа экспериментальных данных

Выше указывалось, что собственные частоты и формы колебаний – это не только формальные математические параметры, но и физически содержательные понятия, отражающие внутренние свойства системы. Поэтому понятия и формулы МНК эффективно применяются при анализе экспериментальных данных.

Покажем это, рассмотрев вывод формулы, приведенной в ГОСТ «Р 52892-2007. Вибрация и удар. Вибрация зданий. Измерение вибрации и оценка ее воздействия на конструкцию».

В процессе эксплуатации здания подвергаются воздействию вибраций, имеющих как естественную природу (ветер), так и техногенную (строительные работы, движение транспорта). Вибрация может стать причиной повреждения конструкции здания, снизив ее эксплуатационную надежность: уменьшить устойчивость, ухудшить несущую способность вследствие появления трещин, оторванных от несущего каркаса элементов и т. п. Поэтому вибрацию сооружений следует постоянно или периодически контролировать, чтобы определить, насколько действующие вибрационные нагрузки опасны как для конструкции в целом, так и для ее частей. При таком контроле, в частности, измеряются максимальные вибрационные скорости в балках и пластинах стен и перекрытий на частотах близких к резонансным. Зная эти скорости, можно определить максимальные напряжения в балках и плитах прямоугольного сечения. ГОСТ предлагает применять следующее (не зависящее от геометрических размеров) соотношение между максимальным значением изгибного напряжения и максимальным значением экспериментально измеренной скорости:

$$\sigma_{\max} = \sqrt{E\rho} \sqrt{\frac{3(G_{\text{beam}} + G_{\text{otherloads}})}{G_{\text{beam}}}} k_n v,$$

где v – максимальная скорость по всей длине балки (плиты); E – модуль упругости материала балки; ρ – плотность материала балки; $\frac{G_{\text{beam}} + G_{\text{otherloads}}}{G_{\text{beam}}}$ – коэффициент нагрузки при нагружении балки помимо

своей собственной массы еще G_{beam} и равномерно распределенной нагрузкой $G_{\text{otherloads}}$; k_n – безразмерный модальный коэффициент, имеющий значение в диапазоне от 1 до 1,33 и зависящий от условий закрепления и номера формы колебаний.

Выведем эту формулу. Для упрощения вывода рассмотрим двух опорную балку, в которой $G_{otherloads} = 0$ (рис. 3.22) и $k_n = 1$.

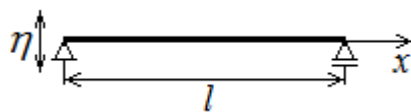


Рис. 3.22. Кинематически нагруженная двухопорная балка

Вибрации фундамента здания генерируют для балки (элемента здания) кинематическое нагружение. Будем предполагать, что колебания балки происходят, в основном, по первой собственной форме. Тогда (см. формулу (3.139)) прогиб балки

$$f(x) = u \sin \frac{\pi \cdot x}{l}, \quad (3.141a)$$

а собственная частота

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (3.141б)$$

Максимальный момент при единичном прогибе в центре:

$$M_{\max} \left(\frac{l}{2} \right) = EI \cdot f'' \left(\frac{l}{2} \right) = \pi^2 \frac{EI}{l^2},$$

при прогибе u :

$$M_{\max} \left(\frac{l}{2} \right) = u \pi^2 \frac{EI}{l^2}, \quad (3.142a)$$

где

$$I = \frac{bh^3}{12}. \quad (3.142б)$$

Максимальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}, \quad (3.143a)$$

где

$$W = \frac{bh^2}{6}. \quad (3.143б)$$

Так как измерения происходят на резонансной частоте, то частота вибраций равна ω . Следовательно, максимальное перемещение u равно

$$u = \frac{v}{\omega}. \quad (3.144)$$

Подставим в (3.143а) выражения (3.142а), (3.142б), (3.143б), (3.144), (3.141б) и учтем, что $m = \rho l$. Тогда получим:

$$\sigma_{\max} = \frac{v}{\omega} \pi^2 \frac{EI}{l^2} \frac{1}{W} = v \frac{l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{m}{EI}} \pi^2 \frac{EI}{l^2} \frac{6}{bh^2} = v \sqrt{\frac{\rho \cdot bh \cdot E \cdot bh^3}{12}} \frac{6}{bh^2} = v \sqrt{3\rho E}, \quad (3.145)$$

что совпадает с формулой ГОСТа.

Список литературы

1. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 831 с.
3. Справочник по строительной механике корабля. Т. 3. – Ленинград: Судостроение, 1982. – 317 с.
4. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
5. Шиманский Ю. А. Динамический расчет судовых конструкций. – Ленинград: Судпромгиз, 1963. – 444 с.

Глава 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Перестает быть упругой пружина, перегруженная гириями. Для упругости есть предел.

А. Белый «Петербург»

Прямая короче. Парабола круче.

А. Вознесенский «Параболическая баллада»

4.1. Примеры нелинейных моделей

Примеры нелинейных моделей были приведены в главе 3. В общем виде нелинейное уравнение с одной степенью свободы можно записать следующим образом

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = P(t). \quad (4.1)$$

Это уравнение 2-го порядка можно записать как 2 уравнения 1-го порядка:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{1}{m} [-f(x, \dot{x}) + P(t)], \\ \dot{x} &= y. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В ряде практически важных случаев функция $f(x, \dot{x})$ (т. н. силовая характеристика) описывается аналитической формулой: формулы (4.3) и т. п.

Но часто функция $f(x, \dot{x})$ записывается с помощью сочетания аналитических формул и логических условий [4]. Например, силовая характеристика, представленная на рис. 4.1, *a* (характеристика с зоной нечувствительности) описывается следующим образом:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \leq c \\ \operatorname{tg} \alpha(x - c), & \text{при } x > c \\ \operatorname{tg} \alpha(x + c), & \text{при } x < -c \end{cases}. \quad (4.3a)$$

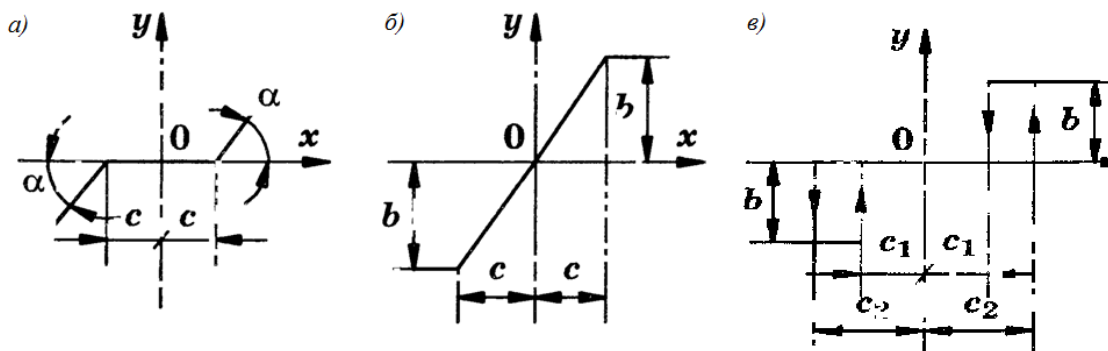


Рис. 4.1. Типовые нелинейные характеристики: *a* – с зоной нечувствительности; *б* – с зоной насыщения; *в* – силы трения с зоной нечувствительности

Силовая характеристика с зоной насыщения (рис. 4.1, б):

$$y = \begin{cases} b/c x, & \text{при } |x| \leq c \\ b, & \text{при } x > c \\ -b, & \text{при } x < -c \end{cases} . \quad (4.36)$$

Представленные выше силовые характеристики называются статическими, так как они определяются однозначно во все моменты времени.

Характеристики, имеющие неоднозначную характеристику и зависящие не только от перемещения, но и от скорости (т. е. зависящие от времени), называются динамическими. Примером динамической характеристики, для описания которой нужны логические условия, является характеристика силы трения с зоной нечувствительности (рис. 4.1, в):

$$y = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} -b, \text{ при } x \leq -c_1 \\ 0, \text{ при } -c_1 < x < c_2 \\ b, \text{ при } x \geq c_2 \end{array} \right\} \dot{x} > 0 \\ \left. \begin{array}{l} b, \text{ при } x \geq c_2 \\ 0, \text{ при } -c_2 < x < c_1 \\ -b, \text{ при } x \leq -c_2 \end{array} \right\} \dot{x} < 0 \end{cases} . \quad (4.3в)$$

4.2. Билинейная силовая характеристика (с упругой разгрузкой)

Ниже в главах 6, 7 часто используется билинейная силовая характеристика с линейной разгрузкой – рис. 4.2, в. Эта силовая характеристика соответствует гипотезе кинематического упрочнения материала, т. е. принципу Мазинга [2, 3]. Принцип Мазинга обычно используется для описания диаграммы « $\sigma - \epsilon$ » металлов. Когда этот принцип применяется к описанию силовой характеристики пластически деформируемой металлической конструкции, то постулируется, что размах усилий между точкой, соответствующей началу упругой разгрузки, и точкой, соответствующей переходу на отрицательную пластическую ветвь характеристики, равен $2P_T$, а цикл деформирования происходит по закону параллелограмма. На самом деле, при циклическом нагружении материал может циклически упрочняться или разупрочняться, приближаясь к некоторому стабильному циклу. Поэтому с каждым циклом силовая характеристика меняется. Это свойство материала описывается обобщенным принципом Мазинга. Однако для практических расчетов достаточную точность дает диаграмма, показанная на рис. 4.2, в. Ветвь линейной разгрузки соответствует закону упругой разгрузки Герстнера [3].

Опишем алгоритм вычисления такой характеристики. При описании алгоритма учтем, что решение уравнения (4.1) выполняется шаговыми методами, описываемыми ниже.

Формирование R .

1) Усилие $R = f(x, \dot{x})$ можно представить, как сумму 2-х усилий:

$$R = R_1 + R_2,$$

где R_1 показано на рис. 4.1, а, R_2 на рис. 4.1, б.

2) Определение R_1 :

а) если $|R_1(t_{k-1}) + c_1[x(t_k) - x(t_{k-1})]| < R_T$,

то $R_1(t_k) = R_1(t_{k-1}) + c_1[x(t_k) - x(t_{k-1})]$;

б) если $R_1(t_{k-1}) + c_1[x(t_k) - x(t_{k-1})] \geq R_T$ и $\dot{x}(t_{k-1}) \geq 0$, то $R_1(t_k) = R_T$;

в) если $R_1(t_{k-1}) + c_1[x(t_k) - x(t_{k-1})] \leq -R_T$ и $\dot{x}(t_{k-1}) \leq 0$, то $R_1(t_k) = -R_T$;

г) $t_0 = 0, R_1(t_0) = 0$;

3) $R_2 = c_2 x$.

В вышеприведенных формулах c_1 – жесткость на первом участке билинейной диаграммы; c_2 – жесткость на втором участке билинейной диаграммы. Аргумент t_{k-1} соответствует $k-1$ -у шагу вычислений, аргумент t_k соответствует k -у шагу вычислений.

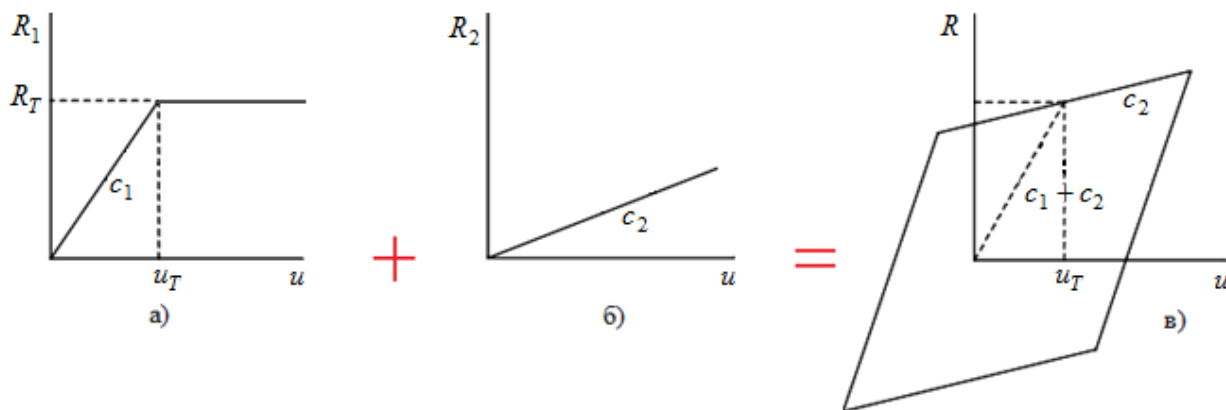


Рис. 4.2. Формирование усилия R :
а – R_1 ; б – R_2 ; в – $R = R_1 + R_2$

4.3. Нелинейные модели с несколькими степенями свободы

Для систем с n степенями свободы нелинейные уравнения колебаний можно записать в виде

$$[M]\{\ddot{X}\} + \{f(X, \dot{X})\} = \{P(t)\}. \quad (4.4)$$

В (4.4) $\{X\}$ – матрица-столбец неизвестных обобщенных перемещений; $\{f(X, \dot{X})\}$ – матрица-столбец характеристик упругих, упруго-пластических и диссипативных внутренних сил; $\{P(t)\}$ – матрица-столбец внешних обобщенных сил; $[M]$ – квадратная матрица инерционных параметров.

Решаются уравнение (4.1) и его обобщение (4.4) шаговыми методами: Эйлера, Ньюмарка, Рунге-Кутта, Адамса-Штермера и т. д. Для применения шаговых методов n нелинейных уравнений (4.4) 2-го порядка надо преобразовать к $2n$ уравнениям 1-го порядка. Это делается с помощью замены, которая была применена при преобразовании (4.1) в (4.2). Запишем уравнений:

$$\dot{x}_i = y_i. \quad (4.5)$$

С учетом введения новых переменных уравнения (4.4) запишутся в виде

$$\{\dot{Y}\} = [M]^{-1} \{P(t)\} - [M]^{-1} \{f_s(X, Y)\}, \quad (4.6)$$

$$\{\dot{X}\} = \{Y\}.$$

В системе (4.6) $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными: $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Уравнения (4.5) можно записать в более общем и удобном для описания шаговых методов виде:

$$\dot{\vec{V}}(t) = F(\vec{V}(t), t). \quad (4.7)$$

В (4.7) $\vec{V}(t)$ – вектор неизвестных функций. Уравнение (4.7) является нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши. Входящие в $\vec{V}(t)$ неизвестные функции x_i и $\dot{x}_i = y_i$ называются фазовыми координатами.

4.4. Численные методы решения нелинейных задач

4.4.1. Интегрирование (решение) таких уравнений производится численными шаговыми методами. Существует следующая классификация численных методов интегрирования:

1. Одношаговые и многошаговые;
2. Явные и неявные;
3. Различных порядков точности (первого, второго, третьего и т. д.).

Рассмотрим одношаговые методы интегрирования уравнений, представленных в нормальной форме Коши (4.2). Построение алгоритмов линейных одношаговых методов обычно основывается на разложении решений в ряд Тейлора. В практике проектирования технических объектов широко применяют метод Эйлера и методы Рунге-Кутты.

Метод Эйлера. Простейшим методом решения задачи Коши является метод Эйлера. Формулу численного интегрирования методом Эйлера (4.7) можно получить на основе разложения искомой функции в ряд Тейлора, ограничиваясь линейными членами ряда. Для одного дифференциального уравнения вида $\dot{v} = F(v, t)$ она имеет вид

$$v_{k+1} = v_k + h \cdot F(v_k, t_k), \quad (4.8)$$

где $F(v_k, t_k)$ – значений произвольной фазовой координаты в момент времени t_k .

Графическая интерпретация метода Эйлера представлена на рис. 4.3.

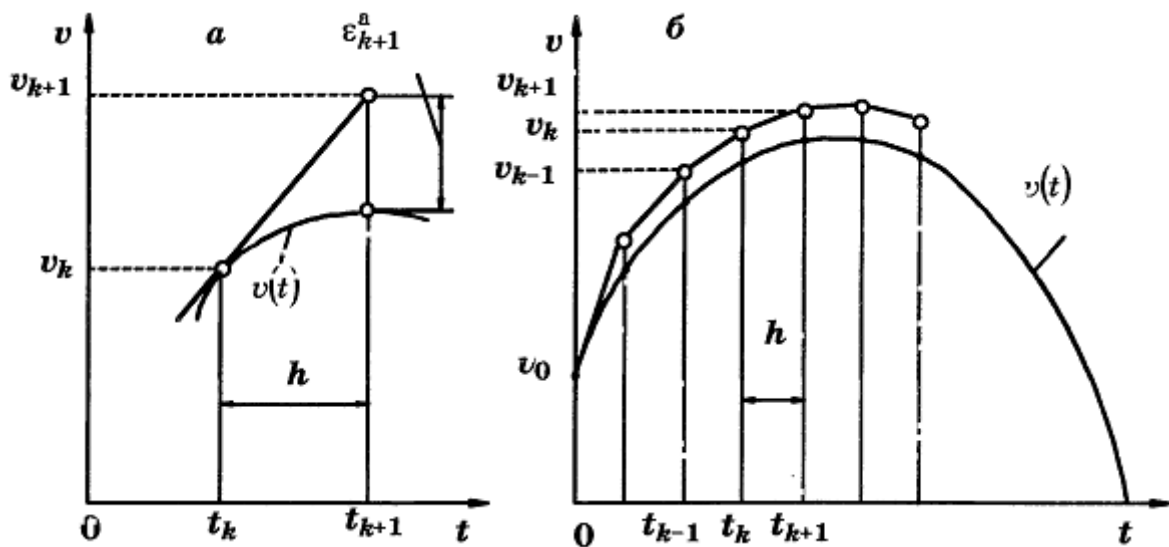


Рис. 4.3. Графическая интерпретация явного метода Эйлера:
a – на одном шаге интегрирования;
б – на конечном интервале времени моделируемого процесса

В результате интегральная кривая $v(t)$ на каждом шаге интегрирования заменяется отрезком касательной к ней, проведенной в начальной точке интервала t_k (рис. 4.2, *a*). В точке $t_k + h$ получают значение фазовой координаты v_{k+1} , которое отличается от точного значения на величину ϵ_{k+1}^a , представляющую собой погрешность аппроксимации. Точное решение аппроксимируется так называемой кривой Эйлера (рис. 4.2, *б*). Поскольку погрешность ин-

тегрирования, полученная на предыдущем шаге, наследуется последующим шагом, то с каждым шагом ломаная Эйлера может удаляться от интегральной кривой $v(t)$, т. е. от точного решения. Ошибка интегрирования будет увеличиваться и может наступить неустойчивость вычислительного процесса. Шаг интегрирования, обеспечивающий устойчивость вычислительного процесса, определяется максимальным по абсолютной величине собственным значением матрицы Якоби [1].

Алгоритм явного метода Эйлера при постоянном шаге интегрирования включает следующие этапы:

1. Задание параметров алгоритма интегрирования h, T_k .
2. Задание начальных значений переменных $\vec{V}_0, t_0 = 0$.
3. Вычисление $t_{k+1} = t_k + h$.
4. Вычисление вектора $\vec{F}(\vec{V}_k, t_k)$ правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.2) для момента времени t_k .
5. Выполнение шага по формуле (4.7).
6. Сравнение t_{k+1} и T_k . Если $t_{k+1} < T_k$, то переход к этапу 3. При $t_{k+1} \geq T_k$ окончание вычислений.

4.4.2. Модифицированный метод Эйлера. Метод Эйлера имеет первый порядок точности и может приводить к большим погрешностям при интегрировании, что обусловлено заменой интегральной кривой отрезками касательных на каждом шаге интегрирования. Точность интегрирования можно повысить, если скорректировать направление ломаной Эйлера на каждом шаге посредством более точной аппроксимации производной, учитывая ее изменение на интервале t_k, t_{k+1} . Это можно осуществить, если использовать члены ряда Тейлора более высоких порядков.

Формула модифицированного метода Эйлера:

$$\vec{V}(t_k + h) = \vec{V}(t_k) + 0,5h \cdot \left\{ \vec{F}[\vec{V}(t_k)] + \vec{F}[\vec{V}(t_k + h)] \right\}. \quad (4.9)$$

4.4.3. Метод Рунге–Кутты. Дальнейшее повышение точности одношаговых методов возможно за счет сохранения в ряде Тейлора членов более высокого порядка. Но это требует аппроксимации производных высших порядков. Существует несколько способов построения алгоритмов численных одношаговых методов интегрирования. Наиболее широко применяется способ, предложенный Рунге и усовершенствованный Кутты. Суть его заключается в том, что вектор-функцию правых частей $\vec{F}(\vec{V}, t)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.2) определяют не только в узлах сетки, но и в промежуточных точках интервала $[t_k, t_k + h]$ на каждом шаге интегрирования. Это позволяет учесть изменение производной на интервале шага, что приводит к повышению порядка точности алгоритма метода интегрирования.

Наибольшее применение в практике вычислений получил метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Формулы этого метода имеют вид

$$\vec{V}_{k+1} = \vec{V}_k + (\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4)/6, \quad (4.10)$$

где $\vec{K}_1 = h\vec{F}(\vec{V}_k, t_k)$; $\vec{K}_2 = h\vec{F}(\vec{V}_k + 0,5\vec{K}_1, t_k + 0,5h)$;

$$\vec{K}_3 = h\vec{F}(\vec{V}_k + 0,5\vec{K}_2, t_k + 0,5h); \vec{K}_4 = h\vec{F}(\vec{V}_k + \vec{K}_3, t_k + h).$$

Для получения решения на каждом шаге производится четырехкратное вычисление функции $\vec{F}(\vec{V}, t)$ правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако высокая точность метода позволяет увеличить шаг интегрирования по сравнению с методом Эйлера в 10...15 раз и обеспечить высокую его эффективность.

Модифицированный метод Эйлера является по существу методом Рунге – Кутты второго порядка, так как вычисления функции производятся в двух точках интервала $[t_k, t_{k+1}]$.

Список литературы

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 831 с.
2. Окопный Ю. А., Радин В. П., Чирков В. П. Механика материалов и конструкций. – М.: Машиностроение, 2002. – 435 с.
3. Писаренко Г. С., Мозжаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. – Киев: Наукова думка, 1981. – 493 с.
4. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем. – Минск: «Дизайн ПРО», 1997. – 670 с.

Глава 5. СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Случайность есть дополнение
и форма проявления необходимости.

Ф. Энгельс «Диалектика природы»

5.1. Математические основы теории случайных функций

5.1.1. Функция, значениями которой являются случайные величины, называется случайной функцией. Случайная функция, аргументом которой является время, называется случайным процессом. С помощью аппарата случайных функций исследуются процессы колебаний сооружений под действием случайных пульсаций ветра, сейсмические процессы и т. п.

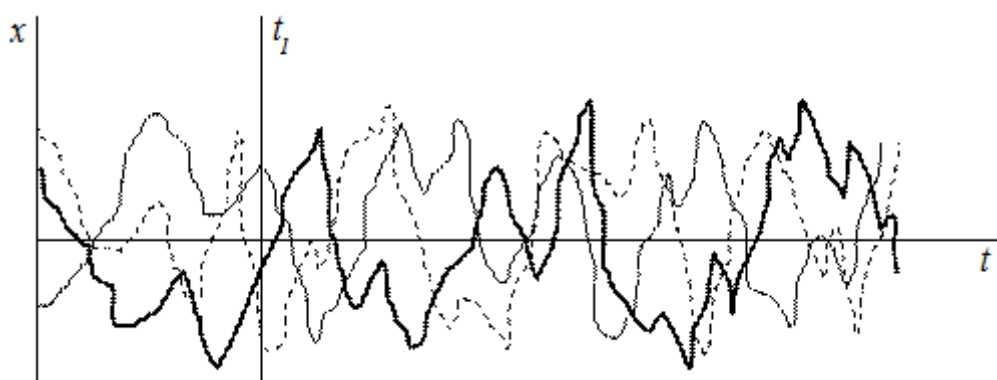


Рис. 5.1. Реализации случайных функций

Рассмотрим основные понятия и соотношения теории случайных функций. Пусть x случайная величина, зависящая от времени.

Одной из основных характеристик случайной величины является математическое ожидание:

$$m_x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x_r(t) = M[x(t)]. \quad (5.1)$$

Если известен закон распределения плотности вероятности случайной величины x , то математическое ожидание x можно вычислить по формуле

$$M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, t) dx. \quad (5.2)$$

Обычно рассматривают центрированную случайную функцию:

$$x^0(t) = x(t) - m_x(t), \quad (5.3)$$

для которой математическое ожидание равно нулю:

$$M \begin{bmatrix} 0 \\ x(t) \end{bmatrix} = 0. \quad (5.4)$$

Важно знать не только среднее значение случайной величины, но и ее разброс около среднего значения (для центрированной функции около нуля). Этот разброс характеризуется дисперсией, т. е. средним квадратом отклонения:

$$D(t) = M \begin{bmatrix} 0 \\ x^2(t) \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Наряду с дисперсией рассматривают и среднеквадратическое отклонение (стандарт):

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D(t)}. \quad (5.6)$$

Математическое ожидание величины x и её дисперсия уже не являются случайными величинами. Это детерминированные параметры. Однако реально при вычислении этих параметров используется лишь конечное число реализаций x :

$$\tilde{m}_x(t) = \sum_{r=1}^N x_r(t). \quad (5.7)$$

Полученные при конечных значениях N параметры называются их оценками: оценка среднего значения, оценка дисперсии и т. д. Оценки также являются случайными величинами.

5.1.2. Поведение случайного процесса в значительной степени характеризуется статистической взаимосвязью значений процесса в разные моменты времени. Эта взаимосвязь выявляется с помощью корреляционной функции:

$$K_x(t_1, t_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x_r^0(t_1) \cdot x_r^0(t_2) = M \begin{bmatrix} 0 \\ x(t_1) x(t_2) \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

В формулу (5.8) входят центрированные случайные функции.

Чем меньше статистически зависимы случайные величины в разные моменты времени, тем меньше значение корреляционной функции. Для статистически независимых случайных величин корреляционная функция равна нулю.

Следует отметить, что взаимосвязь между значениями случайных величин в разные моменты времени может устанавливаться и для разных процессов. Если рассматриваются значения одного процесса, то определяемая формулой (5.8) функция часто называется автокорреляционной.

Основные свойства корреляционной функции таковы:

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1), \quad (5.9)$$

$$K_x(t, t) = D_x(t). \quad (5.10)$$

Важным классом случайных функций являются стационарные случайные функции. Если случайная функция стационарна, то ее вероятностные характеристики одинаковы при всех значениях t . В частности, от t не зависят средние значения функции и их дисперсия.

Для стационарного процесса корреляционная функция зависит только от разности $t_2 - t_1$. Действительно,

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_1 + \tau). \quad (5.11)$$

Но по определению стационарной случайной функции ее характеристики не зависят от времени. Поэтому

$$K_x(t_1, t_1 + \tau) = k_x(\tau). \quad (5.12)$$

Из (5.10) следует, что

$$D_x = k_x(0). \quad (5.13)$$

Обычно корреляционная функция выглядит так, как показано на рис. 5.2.

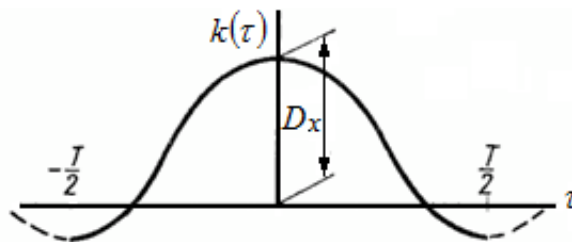


Рис. 5.2. Корреляционная функция

Параллельно с корреляционной функцией, зависящей от времени, рассматривают ее преобразование в частотную область. Это делается с помощью интеграла Фурье:

$$S(\lambda) = \frac{2}{\pi_0} \int_0^{\infty} k(\tau) \cos \lambda \tau d\tau. \quad (5.14)$$

Найденная с помощью интеграла Фурье функция $S(\lambda)$ называется спектральной плотностью.

Обратное преобразование имеет вид

$$k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S(\lambda) \cos \lambda \tau d\lambda. \quad (5.15)$$

Формулы (5.14) и (5.15), связывающие спектральную и корреляционные функции, называются соотношениями Винера – Хинчина. Дисперсия процесса выражается через спектральную функцию формулой:

$$D_x = k_x(0) = \int_0^{\infty} S(\lambda) d\lambda. \quad (5.16)$$

Введем функцию:

$$D(\lambda) = \int_0^{\lambda} S(\tilde{\lambda}) d\tilde{\lambda}. \quad (5.17)$$

Тогда

$$S(\lambda) = \frac{dD(\lambda)}{d\lambda}, \quad (5.18)$$

$$dD(\lambda) = S(\lambda) d\lambda. \quad (5.19)$$

Формулы (5.18), (5.19) выявляют физический смысл спектральной функции. Эта функция показывает распределение плотности дисперсии по составляющим случайный процесс гармоникам. Если случайный процесс является суммой конечного числа гармоник со случайной амплитудой, то интеграл (5.16) превратится в сумму $D_x = \sum_i D_i$, в которой D_i дисперсия i -й амплитуды.

5.1.3. Рассмотрим для нескольких типовых процессов корреляционные функции и соответствующие им спектральные функции [1,3].

Полезной абстракцией является представление случайного процесса как «белого шума». В этом случае:

$$S(\lambda) = S_0 = \text{const}. \quad (5.20)$$

Иначе говоря, для белого шума характерно равномерное распределение дисперсии по частотам. Соответствующая белому шуму корреляционная функция является дельта-функцией:

$$k(\tau) = \frac{\pi}{2} \delta(0). \quad (5.21)$$

Дельта-функцией $\delta(s)$ называется функция, равная всюду нулю, но в точке $s = 0$ $\delta(0) = \infty$, при этом $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\Delta}^{+\Delta} \delta(s) ds = 1$.

Белый шум не может реально существовать, так как этот процесс имеет бесконечную дисперсию (и, следовательно, мощность). Поэтому часто рассматривают случайные процессы, имеющие постоянную плотность дисперсии в ограниченном диапазоне частот:

$$\text{при } 0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \text{ спектральная плотность } S(\lambda) = \frac{D}{\lambda_0}. \quad (5.21a)$$

Если $\lambda > \lambda_0$ спектральная плотность $S(\lambda) = 0$.

График описываемой соотношениями (5.21) спектральной плотности показан на рис. 5.3.

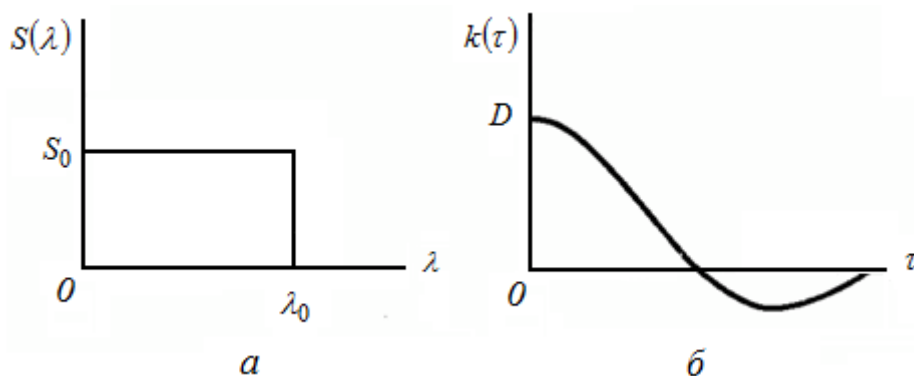


Рис. 5.3. Спектральная плотность (а) и корреляционная функция (б)

Корреляционная функция ограниченного белого шума (рис. 5.3):

$$k(\tau) = \int_0^{\infty} S(\lambda) \cos \lambda \tau d\lambda = \frac{D}{\lambda_0} \int_0^{\lambda_0} \cos \lambda \tau d\lambda = D \frac{1}{\lambda_0 \tau} \sin \lambda_0 \tau. \quad (5.21б)$$

Пусть случайная функция представляет собой синусоиду с заданной частотой и случайной амплитудой. В этом случае:

$$S(\lambda) = D\delta(\lambda - \lambda_0), \quad (5.22a)$$

где δ – дельта-функция [3],

$$k(\tau) = \int_0^{\infty} S(\lambda) \cos \lambda \tau d\lambda = \int_0^{\infty} D\delta(\lambda - \lambda_0) \cos \lambda \tau d\lambda = D \cos \lambda_0 \tau. \quad (5.22б)$$

Графики функций (5.22) представлены на рис. 5.4.

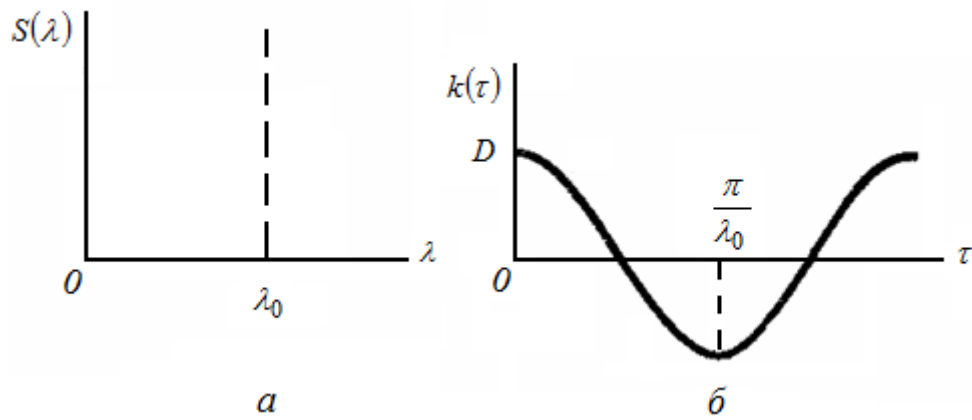


Рис. 5.4. Спектральная плотность (а) и корреляционная функция (б)

Часто для аппроксимации опытной корреляционной функции и спектральной плотности используют выражения:

$$k(\tau) = D e^{-\gamma|\tau|} \cos \beta \tau,$$

$$S(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k(\tau) \cos \lambda \tau d\tau = \frac{1}{\pi} D \gamma \left[\frac{1}{\gamma^2 + (\beta + \lambda)^2} + \frac{1}{\gamma^2 + (\beta - \lambda)^2} \right]. \quad (5.23)$$

Эти выражения содержат два параметра γ и β , которые можно подобрать из условия наилучшего приближения к опытным кривым. Графическое изображение функций (5.23) дано на рис. 5.5.

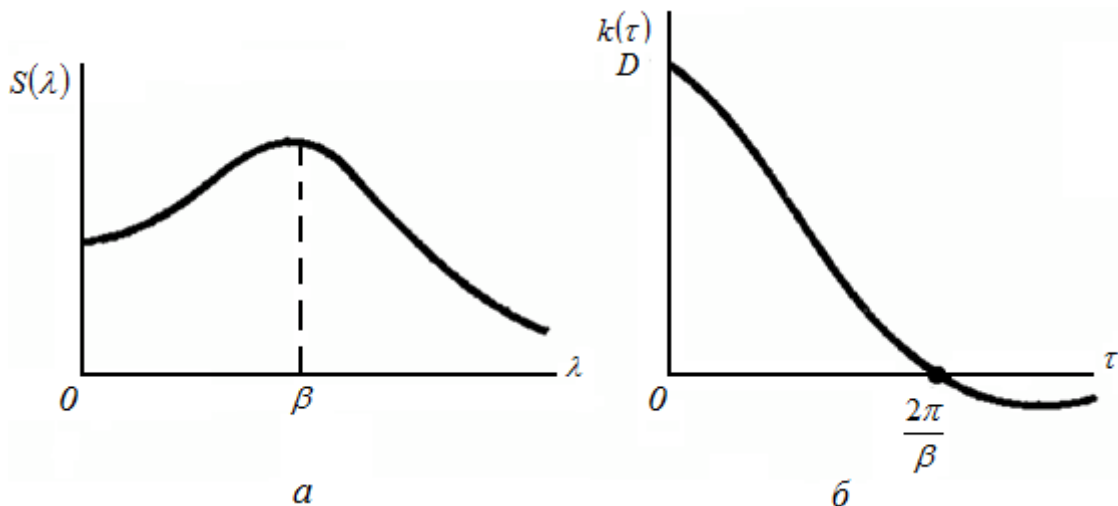


Рис. 5.5. Спектральная плотность (а) и корреляционная функция (б)

5.1.4. Среди стационарных процессов особый интерес представляют эргодические стационарные процессы. Процесс называется эргодическим, если вероятностные характеристики, найденные путем усреднения по ан-

самблю реализаций процесса, равны соответствующим характеристикам, полученным по одной реализации процесса путем усреднения по времени за достаточно большой временной интервал T . Для эргодических процессов математическое ожидание $x(t)$ и дисперсия центрированного процесса можно определить по формулам:

$$\hat{M}[x(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad - \text{оценка математического ожидания случайной}$$

стационарной эргодической функции;

$$\hat{D}\left[x(t)\right] = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad - \text{оценка дисперсии, центрированной случайной}$$

стационарной эргодической функции.

Если имеется набор из N реализаций $x_k(t)$, $(k-1)T \leq t \leq kT$, $k = 1, 2, \dots, N$, стационарного эргодического случайного процесса $\{x(t)\}$, то можно доказать [2], что оценка спектральной плотности имеет вид

$$S_{\text{ex}}(\lambda) = \frac{2}{N \cdot T} \sum_{k=1}^N |X_k(\lambda, T)|^2, \quad (5.24)$$

где T – длина каждого процесса; $X_k(\lambda, T)$ – финитное преобразования Фурье для k -й реализаций:

$$X_k(\lambda, T) = \int_0^T x_k(t) \cdot e^{-i\lambda t} dt. \quad (5.25)$$

5.2. Воздействие случайной стационарной нагрузки на линейную колебательную систему

5.2.1. Рассмотрим воздействие на линейную систему возмущающей силы, заданной выражением

$$P(t) = a \cdot \cos \lambda t + b \cdot \sin \lambda t, \quad (5.26)$$

где a и b – некоррелированные случайные величины с равными нулю математическим ожиданием и одинаковой дисперсией.

Стационарное решение этих уравнений было получено в п. 3.3 с помощью метода комплексных амплитуд. Используем этот метод и в данном случае. Силу $P(t)$ запишем в виде:

$$P(t) = P_0 e^{i\lambda t}, \quad (5.27)$$

где P_0 – случайная величина, модуль которой равен случайной амплитуде: $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$; а аргумент – случайной фазе: $\arg c = \phi = \arcsin(a/|c|)$.

Впрочем, для описания стационарной случайной функции фаза не является существенной. Уравнение колебаний линейного осциллятора под действием нагрузки (5.27) имеет вид

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{1}{m} P_0 e^{i\lambda t}. \quad (5.28)$$

Решение уравнения (5.28) (как показано в п. 3.3.1) имеет вид

$$x = A^* e^{i\lambda t}. \quad (5.28a)$$

$$A^* = \frac{P_0}{m(\omega^2 - \lambda^2 + i2n\lambda)} = \frac{P_0(\omega^2 - \lambda^2 - i2n\lambda)}{m((\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2\lambda^2)}. \quad (5.28b)$$

Рассмотрим отношение:

$$F(i\theta) = \frac{x}{P_0} = \frac{1}{c \left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2} + i \frac{2n\lambda}{\omega^2} \right)} = \frac{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2} - i \frac{2n\lambda}{\omega^2} \right)}{c \left(\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2} \right)^2 + 4 \frac{n^2\lambda^2}{\omega^4} \right)}. \quad (5.29)$$

С учетом введенного обозначения можно записать, что

$$x = F_x(i\lambda) \cdot P_0 \cdot e^{i\lambda t}. \quad (5.30)$$

Комплексная функция $F_x(i\theta)$ называется комплексной частотной характеристикой или комплексной передаточной функцией системы.

Формула (5.28a) показывает, что при случайном гармоническом возбуждении с частотой θ искомая величина (перемещение) совершает случайное колебание, с той же частотой и со случайной комплексной амплитудой A^* . Действительная случайная амплитуда равна модулю этой величины

$$|A^*| = |F_x(i\lambda)| P_0. \quad (5.31)$$

Таким образом, случайная амплитуда колебаний равна случайной амплитуде возмущения, умноженной на модуль частотной характеристики.

Зная действительное значение случайной амплитуды, можно подставить (5.31) в (5.29) и вычислить дисперсию. Выполнив эти выкладки, получим, что дисперсия перемещения равна дисперсии возмущения, умноженной на квадрат модуля частотной характеристики:

$$D_x = |F(i\lambda)|^2 D_p. \quad (5.32)$$

Вследствие линейности системы при воздействии на нее возмущающей силы, имеющей непрерывный спектр, характеризуемый спектральной функцией $S_p(\theta)$, элементарная дисперсия

$$dD_p = S_p(\lambda) d\lambda, \quad (5.33)$$

преобразуется также в соответствии с формулой (5.32) и вызовет элементарную дисперсию перемещения

$$dD_x = |F(\lambda)|^2 S_p(\lambda) d\lambda. \quad (5.34)$$

Следовательно, спектральная функция $S_x(\omega)$ для перемещения

$$S_x(\lambda) = dD_x/d\lambda = |F(i\lambda)|^2 S_p(\lambda), \quad (5.35)$$

может быть найдена путем умножения спектральной функции возмущения $S_p(\lambda)$ на $|F(i\lambda)|^2$.

Для линейной системы с n степенями свободы можно с помощью МНК составить n дифференциальных уравнений второго порядка, в правые части которых входит возмущающая сила $Q_k(t)$.

5.3. Пример расчета случайных колебаний

5.3.1. Рассмотрим виброизоляционную систему с одной степенью свободы при случайном возмущении [1].

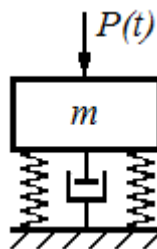


Рис. 5.6. Виброизоляционная система с одной степенью свободы

Для уменьшения вибрационной нагрузки на основание объект массой m , на который действует вибрационная нагрузка, соединен с основанием с помощью пружины и демпфера вязкого трения. Предположив, что случайная нагрузка $P(t)$ соответствует ограниченному белому шуму в диапазоне частот $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, определим спектральные функции и дисперсии перемещения x и скорости $\dot{x} = v$ объекта, а также дисперсию D_R динамического воздействия R на основание. Определим также (в случае $\lambda_0 \rightarrow \infty$) оптимальное значение демпфирования, при котором среднеквадратическое воздействие на основание минимально.

Итак, спектральная функция случайного воздействия задана следующими выражениями:

$$0 \leq \lambda \leq \lambda_0, S_p(\lambda) = S_0, \quad (5.36)$$

$$\lambda > \lambda_0, S_p(\lambda) = 0.$$

Уравнение движения объекта имеет вид

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{1}{m} P(t). \quad (5.37)$$

где $P(t)$ – случайное воздействие со спектральной плотностью (5.36).

Используя формулу (5.31), для квадрата модуля передаточной функции, получаем

$$|F(i\lambda)|^2 = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2n}{\omega^2}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}. \quad (5.38)$$

Следовательно, спектральная функция перемещения, определяемая по формуле $S_x(\lambda) = |F(i\lambda)|^2 S_p(\lambda)$, равна:
при $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$

$$S_x(\lambda) = \frac{S_0}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2n}{\omega^2}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}, \quad (5.39a)$$

при $\lambda > \lambda_0$

$$S_x(\lambda) = 0. \quad (5.39b)$$

Так как скорость $v = dx / dt$, то $\bar{v} = d\bar{x} / dt = i\lambda \bar{x}$.

Поэтому частотная характеристика скорости

$$F_v(i\lambda) = i\lambda F_x(i\lambda). \quad (5.40)$$

Для спектральной функции скорости получаем

$$S_v(\lambda) = |i\lambda F_x(i\lambda)|^2 S_p(\lambda) = \lambda^2 S_x(\lambda). \quad (5.41)$$

Аналогично, для спектральной функции ускорения можно получить

$$S_j(\lambda) = \lambda^4 S_x(\lambda).$$

Так как передаваемая основанию сила $R = cx + \alpha\dot{x}$ (см. п. 3.3.6), то

$$F_R(i\lambda) = (c + i\lambda\alpha) F_x(i\lambda).$$

Следовательно,

$$S_R(\lambda) = |F_R(i\lambda)|^2 S_p(\lambda) = c^2 S_x(\lambda) + 4n^2 m^2 S_v(\lambda). \quad (5.42)$$

Графики спектральных функций S_x , S_v , S_R в предположении $\lambda_0 > \omega$ для значения коэффициента затухания $n / \omega = 0,2$ были построены в [1] и приведены на рис. 5.7, а, б.

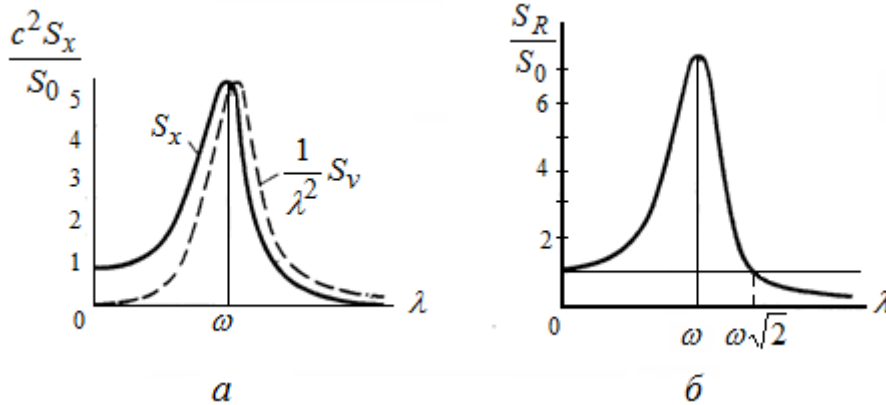


Рис. 5.7. График спектральных функций S_x , S_v , S_R

Как видно из этих графиков, при постоянной плотности воздействия спектр колебаний неравномерен. Система усиливает колебания с частотами, близкими к собственной ее частоте, и ослабляет высокочастотные колебания.

Определение дисперсии x сводится к вычислению интеграла:

$$D_x = \int_0^{\infty} S_x(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} |F_x(i\lambda)|^2 S_p(\lambda) d\lambda = \frac{S_0}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2n}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}. \quad (5.43)$$

На рис. 5.8 [2] показана зависимость дисперсии перемещения D_x от отношения λ_0 / ω частоты среза спектра возмущения к собственной частоте системы при $\zeta = n / \omega = 0,2$.

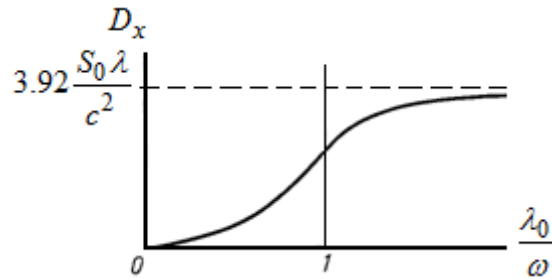


Рис. 5.8. Зависимость дисперсии перемещения D_x от отношения λ_0 / ω

Как видно из графика, D_x возрастает главным образом за счет колебаний с частотами, близкими к собственной частоте системы.

Как и следовало ожидать, дисперсия (а значит, и среднеквадратическое перемещение $\sigma_x = \sqrt{D_x}$) оказывается тем меньше, чем больше жесткость пружины c , демпфирование n и масса объекта, от которой зависит частота ω .

Интересно отметить, что в том случае, когда спектр нагрузки неограничен ($\lambda_0 \rightarrow \infty$), дисперсия перемещения остается конечной. При $\lambda_0 \rightarrow \infty$:

$$D_x \rightarrow \frac{\pi S_0 \omega}{4 c^2 n}. \quad (5.44)$$

Определим интересующий нас параметр – дисперсию силы R (воздействия на основание). Согласно формуле (3.57)

$$D_R = c^2 D_x + 4n^2 m^2 D_v. \quad (5.45)$$

Подставив сюда значение D_x и D_v при $\lambda_0 \rightarrow \infty$, получим для этого случая [1]:

$$D_R = \frac{\pi}{4} S_0 \omega \left(\frac{\omega}{n} + 4 \frac{n}{\omega} \right). \quad (5.46)$$

Из полученного выражения видно, что при $\lambda_0 \rightarrow \infty$ дисперсия D_R возрастает неограниченно как при $n \rightarrow 0$ (при этом возрастает амплитуда колебаний вблизи резонансной частоты), так и при $n \rightarrow \infty$ (т. е. при непосредственной передаче возмущающей силы на основание). Минимум D_R имеет место при $(n = \omega / 2$ ($\delta = (2/\sqrt{3}) \cdot \pi = 3,64$), причем

$$D_{R \min} = \pi S_0 \omega. \quad (5.47)$$

Таким образом, при случайном возбуждении типа белого шума оптимальным является весьма большое демпфирование системы ($\delta = 3,64$). Так же, как и при расчете системы виброизоляции на синусоидальное возбуждение, выясняется, что система тем более эффективна, чем ниже частота ее настройки ω .

5.4. Расчет строительного сооружения на воздействие ветровых пульсаций

Ветер представляет собой хаотическое, турбулентное движение частиц воздуха. Физическая природа турбулентности – трение ветрового потока о землю, влияние шероховатостей и неровностей земной поверхности. Турбулентное движение характеризуется беспорядочным изменением скорости во времени в каждой точке и от точки к точке. Такое движение описывается теорией случайных процессов. Вследствие случайного изменения (пульсаций) скорости ветровых частиц кроме среднего уровня ветровых давлений на сооружение действует и их случайная пульсация. Подробно вопрос об описании этих пульсаций и возникающей из-за них случайной нагрузки на сооружение рассмотрен ниже в главе 8. В данном пункте показана принципиальная схема расчета на ветровые пульсации.

Расчет проводится методом нормальных координат. После нахождения собственных форм сооружения уравнения для расчета сооружения на пульсационную ветровую нагрузку записываются следующим образом (см. главу 8):

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \frac{1}{M_k} Q_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.51)$$

где q_k – нормальные координаты; ω_k – собственные частоты; M_k – приведенные массы.

В (5.51) $Q_k(t)$ – случайная функция, спектральная плотность которой имеет вид

$$S_Q(\theta) = \tilde{Q}_k(t) \cdot S_v(\theta). \quad (5.52)$$

В (5.52) $\tilde{Q}_k(t)$ – константа, значение которой зависит от параметров ветрового потока, геометрии сооружения и k -той собственной формы. Формулы для определения $\tilde{Q}_k(t)$ приведены в п. 3.4.

$S_v(\lambda)$ – спектральная плотность случайных пульсационных скоростей. Обычно $S_v(\lambda)$ описывают спектром Давенпорта [4]. С точностью до размерного множителя спектр Давенпорта имеет вид

$$S_v(\lambda) = D_v \frac{2\mu^2}{3\lambda(1+\mu^2)^{4/3}}. \quad (5.53)$$

$$B(5.53) \quad \mu = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{L}{V_{cp0}}, \quad (5.54)$$

где $L = 1200$ м – интегральный продольный масштаб турбулентности; V_{cp0} – средняя скорость ветрового потока на высоте 10 м; D_v – дисперсия случайных пульсационных скоростей.

Умножая S_Q на передаточную функцию (5.38), получаем

$$S_{q_k}(\lambda) = \frac{S_Q}{c_k^2} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_k}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2n_k}{\omega_k}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{\omega_k}\right)^2}, \quad (5.55)$$

где c_k – приведенные к собственным формам жесткости; n_k – коэффициенты демпфирования.

Используя эти формулы можно получить спектральные плотности пульсационных перемещений, а затем внутренних усилий и напряжений в любой области сооружения [4].

Ниже на рис. 5.9 и 5.10 показаны: нормированный (с точностью до размерного множителя D_v) спектр Давенпорта и нормированные спектры обобщенных перемещений для разных V_{cp0} и ω_k .

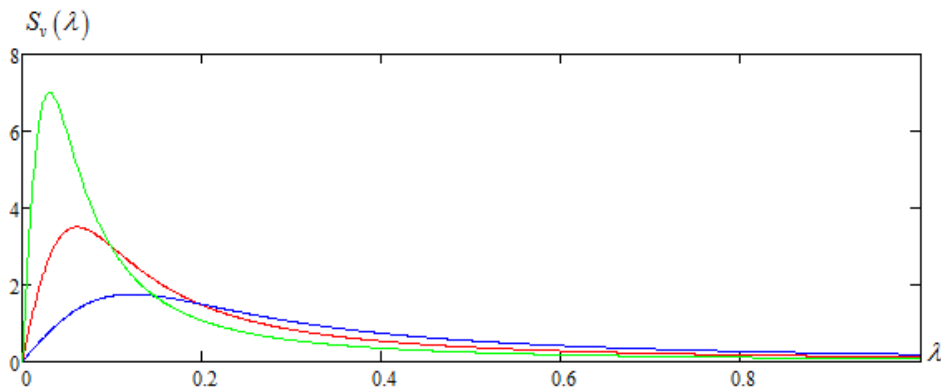


Рис. 5.9. Нормированный спектр Давенпорта для различных V_{cp0}

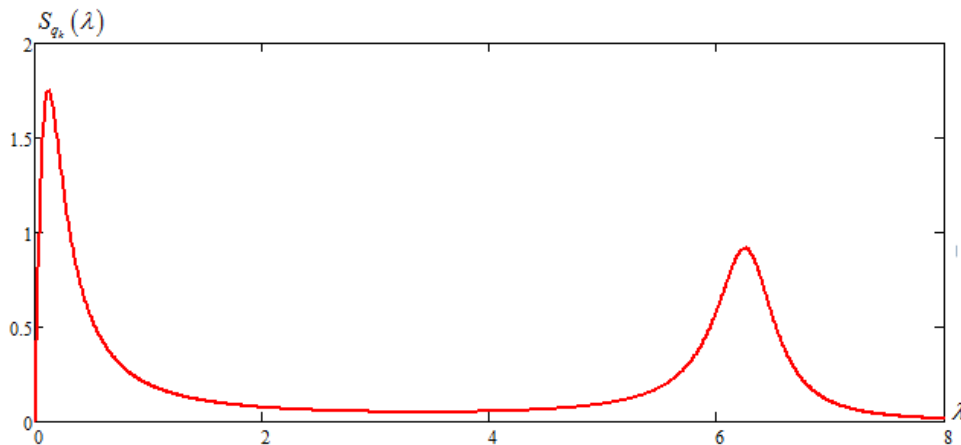


Рис. 5.10. Спектр обобщенного перемещения q_k для $\omega_k = 6,28$

Список литературы

1. *Бидерман В. Л.* Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
2. *Бендат Дж.* Применение корреляционного и спектрального анализа / Дж. Бендат, А. Пирсол; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
3. *Вентцель Е. С., Овчаров А. А.* Теория случайных процессов и её инженерные приложения. – М.: Наука, 1991. – 383 с.
4. *Попов Н. А.* Рекомендации по уточненному динамическому расчету зданий и сооружений на действие пульсационной составляющей ветровой нагрузки / ГУП ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко, ООО «ЕВРОСОФТ». – М., 1999. – 26 с.

Глава 6. СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

Несчастливый народ! Плачевная страна,
Где всех ужасных язв жестокость собрана!
...Здесь гибнет Лиссабон...

Вольтер. Поэма на разрушение Лиссабона. 1756

Я, конечно, всех умней,
Всех умней, всех умней!
Дом я строю из камней,
Из камней, из камней!

С. В. Михалков «Три поросенка»

6.1. Причины и характеристики землетрясений

6.1.1. Землетрясение – это внезапное колебание земной поверхности, вызванное подземными толчками. В результате движения тектонических плит в толще Земли в течение длительного времени накапливается энергия. Но в результате этих же движений однажды она внезапно высвобождается, вызывая землетрясение. Установлено, что количество высвобождаемой энергии может в несколько тысяч раз превысить энергию атомной бомбы. Поэтому не удивительно, что землетрясение сопровождается колоссальными разрушениями. В мире в течение года происходит более миллиона землетрясений разной интенсивности.

Схема твердой оболочки Земли (литосферы и астеносферы) показана на рис. 6.1, а схема появления землетрясения на рис. 6.2. От гипоцентра землетрясения по литосфере распространяются волны [9]: продольная (растяжения-сжатия), поперечная (сдвига) и Рэлея (с эллиптической траекторией частиц).

Скорость распространения продольной волны

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (6.1)$$

В (6.1) λ и μ параметры Ламе среды, в которой распространяются волны:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (6.2)$$

В (6.2) E – модуль упругости среды (модуль Юнга); G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность среды.

Скорость распространения поперечной волны

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (6.3)$$

Скорость распространения волны Рэлея принимают равной $0,92 \cdot V_s$.

Энергию, выделяющуюся при землетрясении в виде сейсмических волн, измеряют магнитудой землетрясения. Первоначальная шкала магнитуды была предложена американским сейсмологом Чарльзом Рихтером в 1935 году, поэтому в обиходе значение магнитуды называют шкалой Рихтера (шкала Рихтера была в дальнейшем модифицирована). Важно понимать, что магнитуда измеряет энергию, выделившуюся в очаге (гипоцентре) землетрясения. Интенсивность землетрясения в конкретном регионе земной поверхности измеряют в баллах.

В РФ (а ранее в СССР) принята разработанная в 1964 году Медведевым, Спунхойром и Карником двенадцати балльная шкала (MSK-64) [7].

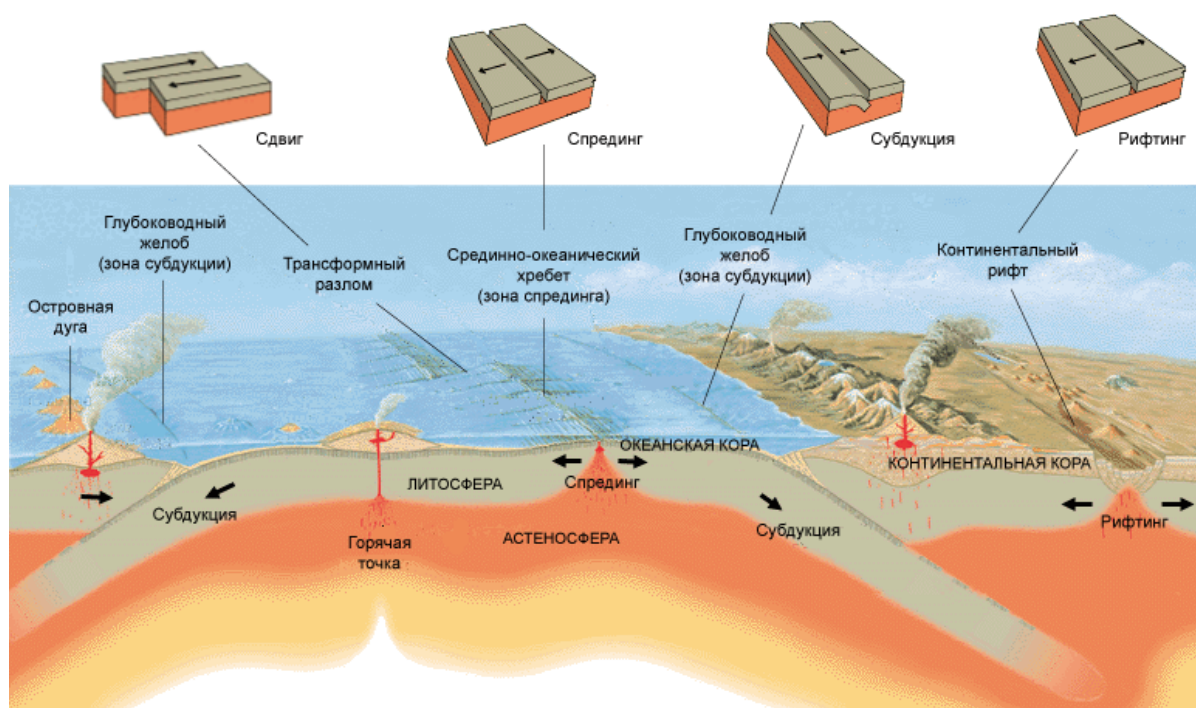


Рис. 6.1. Структура твердой оболочки Земли

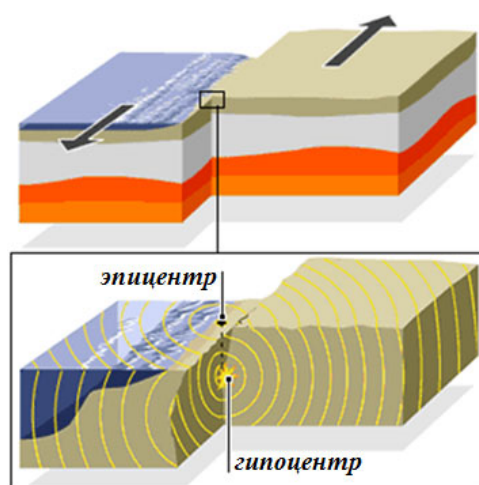


Рис. 6.2. Схема сдвига тектонических плит

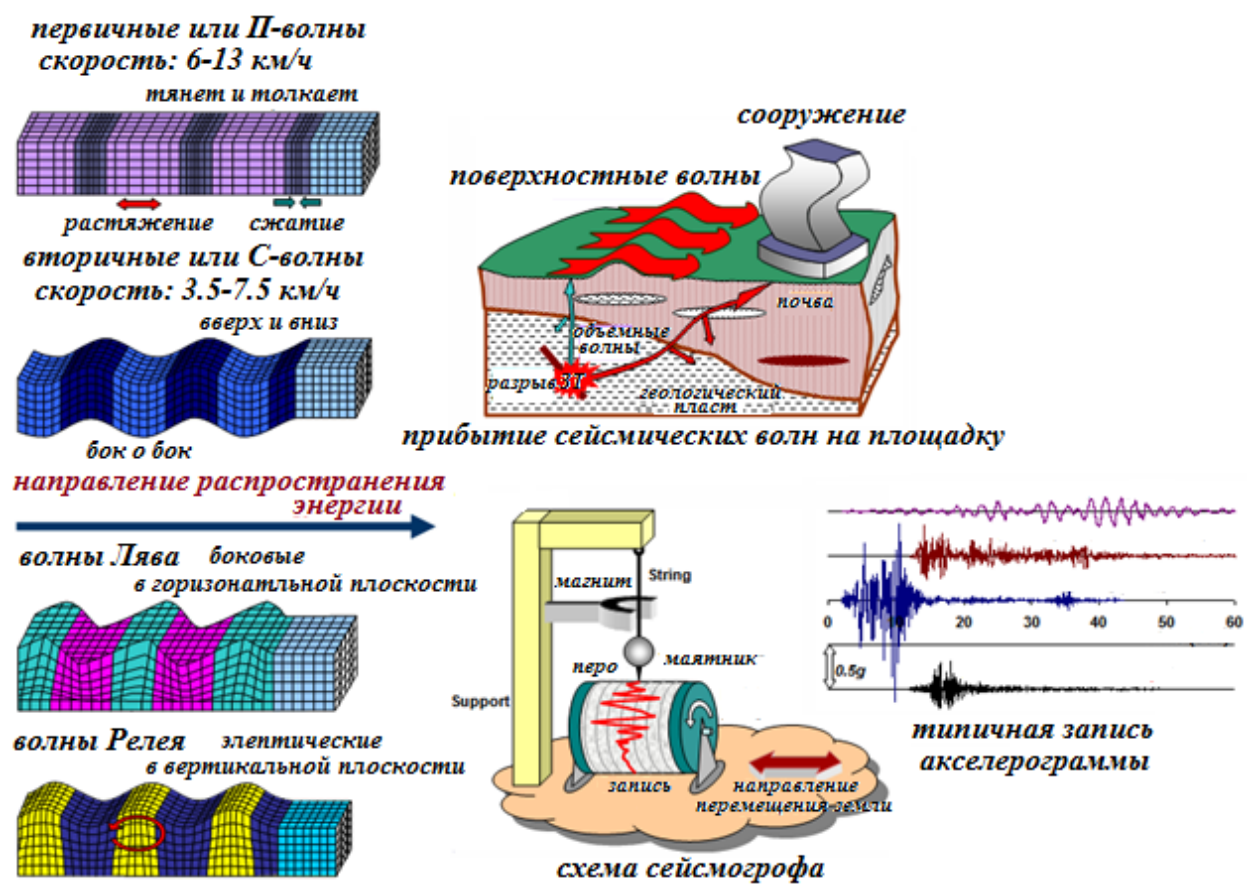


Рис. 6.3. Схема распространения сейсмических волн



Рис. 6.4. Последствия землетрясения. Сахалин. 2007 г. (источник: www.gio.ru)

При определении интенсивности землетрясения по этой шкале учитывается совокупность многих признаков (т. н. сенсоров): показания сейсмологических станций, характер повреждений зданий и сооружений (с отдельным учетом типа зданий), степени повреждений и количества поврежденных зданий), остаточные явления в грунтах, изменение режима грунтовых

и наземных вод, субъективные ощущения толчков и колебаний и др. Упрощенную характеристику землетрясений разной балльности можно сформулировать так:

1–4 балла это слабые толчки, разрушений нет;

5–6 баллов – трескаются стёкла в окнах, местами появляются трещины в штукатурке, опрокидывается неустойчивая мебель, опрокидываются трубы;

7–8 баллов – в типовых зданиях – значительные повреждения, иногда частичное разрушение, в плохо выстроенных – значительные разрушения, опрокидываются и падают печные и фабричные трубы, колонны, памятники, стены, изменяется положение уровня воды в колодцах и скважинах;

9 баллов – наклон хорошо спроектированных и выстроенных каркасных зданий, в типовых зданиях большие повреждения, здания смещаются относительно своих фундаментов, значительные трещины на земной поверхности, разрывы подземных трубопроводов;

10–11 баллов – разрушение хорошо выстроенных деревянных зданий и большинства каменных и каркасных вместе с их фундаментами, многочисленные трещины наземной поверхности, искривление рельсов на железных дорогах, разрывы трубопроводов, значительные оползни по берегам рек и на склонах, выбросы песка и ила, выплеск воды и затопление берегов;

12 баллов – тотальное разрушение, на поверхности земли образуются волны, изменяются отметки поверхности и линия горизонта, предметы подбрасываются в воздух.

При проектировании требуется не только знать описание последствий землетрясения, но и иметь в качестве исходных данных для расчета количественные характеристики ожидаемых сейсмических колебаний грунта. Каждому баллу сейсмической шкалы соответствуют определенные значения максимальных (пиковых) параметров движений грунта: перемещений, скорости, ускорений. Наиболее важно, как связаны баллы и максимальные значения ускорений, так как им пропорциональны действующие на сооружение сейсмические силы.

Связь между баллами (по MSK-64) и максимальными (пиковыми) ускорениями грунта задается следующим образом:

6 баллов: $0,3–0,6 \text{ м}^2/\text{сек}$;

7 баллов: $0,61–1,2 \text{ м}^2/\text{сек}$;

8 баллов: $1,21–2,4 \text{ м}^2/\text{сек}$;

9 баллов: $2,41–4,8 \text{ м}^2/\text{сек}$.

В нормативных документах [12] это соответствие задается грубее и более конкретно:

7 баллов: $1 \text{ м}^2/\text{сек} = 0,1 \text{ g}$

8 баллов: $2 \text{ м}^2/\text{сек} = 0,2 \text{ g}$

9 баллов: $4 \text{ м}^2/\text{сек} = 0,4 \text{ g}$

(6.4)

Равенства (6.4) определяют уровень расчетной сейсмической нагрузки.

Как видно из (6.4), повышение сейсмичности на один балл означает удвоение ускорения грунта. Эту закономерность не рекомендуется экстрапо-

лизовать на интенсивность выше 9 баллов. Следует указать, что приведенные выше соотношения имеют приближенный характер.

Для выполнения динамических расчетов сейсмостойкости сооружений недостаточно знать пиковые ускорения. Нужно знать законы движения грунта. Такими законами являются (рис. 6.5):

- сейсмограмма (зависимость «перемещение–время»),
- велосиграмма («скорость–время»),
- акселерограмма («ускорение–время»).

Все три процесса связаны между собой. Скорость находится интегрированием функции «ускорение–время», а перемещение есть интеграл функции «скорость–время». Однако за счет погрешностей при измерении этих параметров разными инструментальными средствами эта зависимость нарушается, и требуется корректировка инструментальных записей, чтобы эти интегральные зависимости восстановить. (Отметим, что получение скорости через численное дифференцирование функции «перемещение–время», а ускорения численным дифференцированием зависимости «скорость–время», ведет к очень большим погрешностям).

Сейсмические движения грунта являются пространственными. Поэтому функции, описывающие эти движения, задаются тремя компонентами. Даже в одном географическом пункте законы движения грунта зависят от многих факторов и являются случайными функциями. Поэтому расчет сейсмостойкости сооружения на рассматриваемой площадке требует задания представительного ансамбля сейсмических воздействий, отражающих различные возможные реализации землетрясения.

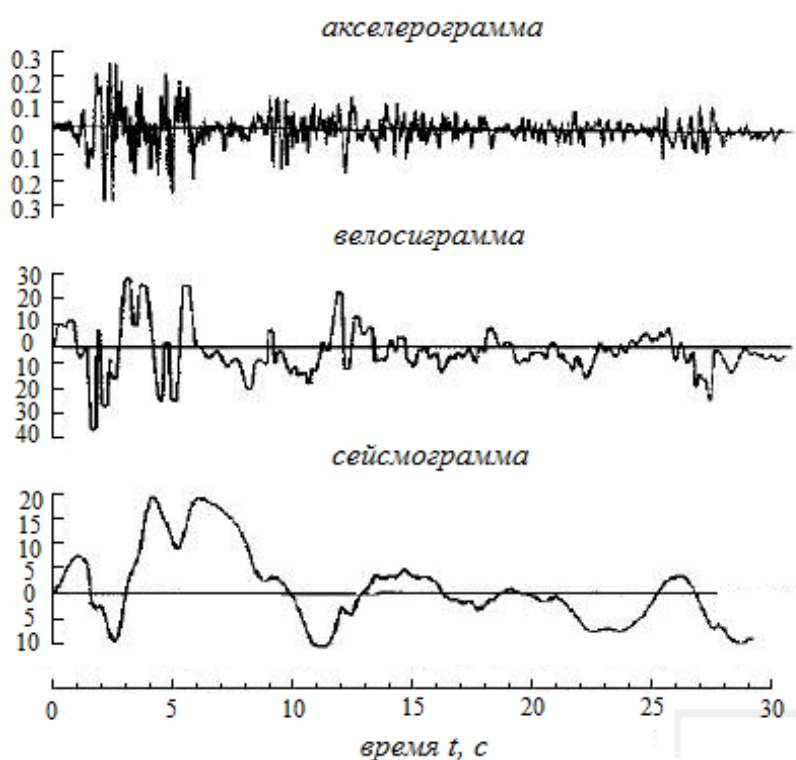


Рис. 6.5. Акселерограмма землетрясения в Эль-Центро 18 мая 1940 года и полученные по ней велосиграмма и сейсмограмма

Следует указать, что в расчетах надо использовать «уравновешенные» акселерограммы. Это значит, что определенный интеграл от акселерограммы, взятый от нуля до момента времени, соответствующего окончанию землетрясения, должен равняться нулю. Это условие фиксирует равенство нулю скорости грунта в момент окончания землетрясения.

6.2. Развитие теории сейсмостойкости

Началом зарождения теории сейсмостойкости сооружений как научной дисциплины следует считать период конца XIX и начала XX века, следующий за разрушительным японским землетрясением 1891 года (Мино-Овари). С целью анализа сейсмических сил в сооружениях Омори в 1900 году провел специальные опыты с кирпичными столбиками. На основе результатов этих опытов Омори и Сано была разработана методика определения сейсмических сил, получившая название *статической теории сейсмостойкости*. Суть этой теории состоит в том, что не учитываются деформации сооружения и его колебания сводятся к переносному движению вместе с основанием. При таком предположении ускорения всех точек сооружения равны ускорению основания, а распределение сейсмических инерционных сил по его высоте подобно распределению масс (веса); максимальные значения сейсмических сил могут быть представлены в виде горизонтально направленных статических сил, пропорциональных весам:

$$S = K_c \cdot Q, \quad (6.5a)$$

где Q – вес части сооружения; K_c – сейсмический коэффициент, представляющий собой отношение максимального значения ускорения основания к ускорению свободного падения.

Значение статической теории для развития сейсмостойкого строительства состояло в том, что впервые удалось получить количественную оценку сейсмических сил. Однако очевидно, что расчетная методика статической теории приближенно справедлива лишь для весьма жестких сооружений, деформации которых пренебрежимо малы по сравнению со смещениями основания при землетрясениях.

Дальнейшее развитие статической теории, основанное на необходимости учета деформируемости сооружения при колебаниях, привело к созданию *динамической теории сейсмостойкости*, с достаточной полнотой описывающей динамическое поведение конструкции на основе хорошо разработанных методов динамики сооружений. Существенным препятствием для создания такой теории служила недостаточность исходных данных о характере сейсмических движений грунта: требовалось дополнительно задаваться законом движения основания (грунта) во времени. Первая попытка такого рода сделана Мононобе (Япония) в 1920 году [3]. Он принял колебания основания по гармоническому (синусоидальному) закону и рассмотрел уста-

новившиеся (стационарные) вынужденные колебания сооружения, представленного в виде системы с одной степенью свободы.

Сейсмическая сила определялась по формуле

$$S = K_c \cdot \beta \cdot Q, \quad (6.5б)$$

где β – коэффициент динамичности, определяемый выражением:

$$\beta = \frac{1}{1 - T^2/T_0^2} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}}, \quad (6.6)$$

здесь $T(\omega)$ – период (частота) собственных колебаний системы; $T_0(\omega_0)$ – период (частота) колебаний основания при землетрясении.

Формула (6.5) дает коэффициент динамичности для установившихся колебаний (см. п. 3.3.2). Иначе говоря, в теории Мононобе не учитывались свободные колебания конструкции. Если вспомнить, что в те годы в основном возводились сооружения большой жесткости (каменные и кирпичные коробки небольшой высоты) с большой частотой свободных колебаний, то практически динамический коэффициент Мононобе равнялся единице и не менял существа статической теории Омори и Сано.

Позднее в 1927 году К. С. Завриев отчасти устранил этот недостаток теории Мононобе [3]. Формально это выражалось в том, что для движения основания принимался косинусоидальный закон, что давало возможность отразить внезапный характер начала сейсмического воздействия. В последующих работах А. Г. Назарова [8] была развита концепция сейсмического удара, предполагающая возможность представления сейсмического воздействия в виде импульса.

Дальнейшим этапом в истории развития теории сейсмостойкости сооружений явилась *спектральная теория*, представляющая собой существенное усовершенствование динамической теории за счет введения в обращение спектральных кривых, представляющих собой кривые, описывающие зависимости максимальных ускорений, скоростей или перемещений линейного осциллятора в функции периода его собственных колебаний.

Идея спектрального метода определения сейсмических сил впервые была предложена М. Био в 1941 году [16]. Впоследствии эта идея нашла развитие в работах Дж. Хаузнера, Н. Ньюмарка, И. Л. Корчинского, С. В. Полякова, Н. А. Николаенко, Э. И. Хачияна, Ш. Г. Напетваридзе, Я. М. Айзенберга и др.

Основные способы обеспечения сейсмостойкости зданий и сооружений изложены в [2–6, 9, 10, 12–15]. Основой этих способов, как правило, является линейно-спектральный метод расчета сейсмостойкости.

Главным преимуществом линейно-спектрального метода (ЛСМ) является то, что лежащий в основе расчета спектр отклика может быть получен

путем построения огибающей (или вероятностной обработки) спектров, соответствующих многим реальным записям сейсмических колебаний грунта. Тем самым данный метод позволяет учесть опыт прошлых землетрясений, и чем больше их было рассмотрено при построении спектра, тем меньше вероятность того, что при новом землетрясении нагрузки на сооружение превысят ожидаемые. Достоинством ЛСМ также является то обстоятельство, что нормативный спектр отклика ускорений описывает не сами абсолютные ускорения осциллятора, а огибающую их коэффициентов динамичности. В результате такого подхода удалось создать нормативные кривые, единые для всех типов сооружений.

Разработка спектрального метода – важное достижение динамической теории сейсмостойкости. Его внедрение в практику проектирования обусловило существенное повышение надежности и эффективности сейсмостойкого строительства. Основным недостатком линейно-спектральной теории является ее неприменимость к нелинейным системам. Поэтому наряду со спектральным методом развивалась и другая разновидность динамического метода расчета на сейсмостойкость, получившая название прямого динамического расчета по реальным акселерограммам. Этот метод основан на численном решении дифференциальных уравнений сейсмических колебаний (линейных или нелинейных), причем правая часть уравнений (возмущающая функция) задана в виде инструментально зарегистрированной акселерограммы «характерного» землетрясения. Развитию этого метода очень способствовало развитие компьютерных технологий и появление алгоритмов и программ, основанных на конечно-элементных моделях.

В 50-х годах зародились также вероятностные методы в расчетах на сейсмические воздействия.

Общая классификация систем обеспечения сейсмостойкости сооружений представлена в виде, показанном на рис. 6.6.



Рис. 6.6. Классификация систем обеспечения сейсмостойкости

Наряду с традиционными методами, в районах высокой сейсмической активности все большее распространение получают специальные методы, которые позволяют существенно снизить затраты на усиление и повысить надежность возводимых конструкций. Такими методами являются, в первую очередь:

- применение сейсмоизоляции;
 - применение динамических гасителей колебаний.
- Эти методы описаны в главе 7.

6.3. Методы расчета сейсмостойкости

6.3.1. Прямой динамический расчет сейсмостойкости

Прямой динамический расчет предполагает использование конечно-элементной модели для выполнения пошагового интегрирования уравнений, описывающих движение сооружений. Возможности прямого динамического расчета при использовании современных программных комплексов типа «ANSYS», «ABACUS» и других чрезвычайно широки. Модель, рассчитываемая пошаговым методом, может учитывать как физическую, так и геометрическую нелинейность исследуемого объекта. В частности, модель может выявить образование в процессе нагружения пластических зон в сооружении.

Как правило, физически нелинейная конечно-элементная модель сооружения в условиях сейсмического воздействия описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [D]\{\dot{U}\} + \{f_s(U, \dot{U})\} = -M(I_x \cdot \ddot{X}_0(t) + I_y \cdot \ddot{Y}_0(t) + I_z \cdot \ddot{Z}_0(t)). \quad (6.7)$$

где $\{U\}$ – вектор относительных перемещений (в системе координат, связанной с основанием); $[M]$ и $[D]$ – матрицы масс и диссипации системы ($n \times n$); $f_s(U, \dot{U})$ – нелинейная гистерезисная функция (нелинейная зависимость сила – перемещение); $\ddot{X}_0(t)$, $\ddot{Y}_0(t)$, $\ddot{Z}_0(t)$ – компоненты вектора ускорений грунта; I_x , I_y , I_z – матрицы-столбцы косинусов углов между обобщенными перемещениями и осями x , y , z (соответственно).

Как мы видим, в случае сейсмического (кинематического) возмущения в качестве нагрузки выступают переносные силы инерции.

При решении физически нелинейной (упругопластической) задачи все виды нагрузок одновременно вводятся в правую часть, так как принципы суперпозиции нагрузок не действуют.

Следует отметить, что внешнее воздействие может включать в себя ротационную составляющую (крутящий момент вокруг вертикальной оси) – [8,9]. Если в правой части (6.7) учитывать ротационные составляющие воздействия, то компонентами матрицы M будут, в том числе, и моменты инер-

ции конечных элементов. В матрицах I_x, I_y, I_z косинусы между векторами, имеющими различную физическую природу (косинусы между векторами угловых поворотов и векторами линейных перемещений) принимаются равными нулю.

Современные программные комплексы позволяют выполнять упруго-пластические расчеты конечно-элементных моделей большой размерности. При проведении упругопластических расчетов используется либо деформационная теория текучести, либо теория течения. В первом случае матрица в (6.7) будет переменной, т. е. зависеть от U .

Во втором случае уравнения (6.7) записываются отдельно для каждого приращения нагрузки. При этом, связи между внутренними усилиями и перемещением конечных элементов устанавливаются как зависимости между приращениями этих параметров, т. е. в инкрементальной форме.

Уравнения (6.7) слишком сложны для выполнения расчетов в приемлемые для проектирования сроки. Кроме того, как указывалось выше (см. глава 1), если исходные данные, нужные для расчетов, известны приближенно, то нет смысла использовать подробную и сложную модель. Поэтому прямой динамический расчет обычно проводят в рамках линейной модели сооружения. Для такой модели уравнения колебаний сооружения в условиях сейсмических воздействий имеет вид

$$M \cdot \ddot{U} + D \cdot \dot{U} + C \cdot U = -M(I_x \cdot \ddot{X}_0(t) + I_y \cdot \ddot{Y}_0(t) + I_z \cdot \ddot{Z}_0(t)). \quad (6.8)$$

В (6.8) M, D, C – матрицы масс, диссипации и жесткостей конечно-элементной модели соответственно; U – вектор относительных обобщенных перемещений (в системе координат, связанной с основанием);

$(I_x \cdot \ddot{X}_0(t) + I_y \cdot \ddot{Y}_0(t) + I_z \cdot \ddot{Z}_0(t))$ – матрица, компонентами которой являются косинусы углов между обобщенными перемещениями и вектором ускорения основания (грунта).

Так как уравнения (6.8) линейны, то можно найти решения для каждой из компонент внешнего воздействия отдельно, а полученные результаты сложить.

Отдельная задача – учет взаимодействия сооружения с грунтовым основанием. Вообще говоря, эта проблема для скальных грунтов решается достаточно просто. В этом случае движение грунта и фундамента совпадают. Сложной является задача динамического взаимодействия массивного сооружения со слоями мягкого грунта, расположенными между скальным основанием и фундаментом. Существующие методики учета взаимодействия сооружения и грунта при сейсмических воздействиях кратко описаны ниже.

Важной стороной прямого динамического расчета является следующее. В качестве исходных данных – $\ddot{X}_0(t), \ddot{Y}_0(t), \ddot{Z}_0(t)$ используются инструментальные записи ускорений грунтового основания, выполненные сейсмическими станциями, а также синтезированные акселерограммы. Эти исходные

данные являются случайными функциями. Следовательно, чтобы результаты расчета отражали объективную ситуацию, прямой динамический расчет должен проводиться на ряд воздействий, образующих представительную выборку из всего ансамбля сейсмозодействий. Это приводит к резкому увеличению объема расчетов. При этом результатами каждого варианта расчета являются огромные числовые массивы, описывающие изменения во времени силовых и кинематических параметров всех конечных элементов модели. Таким образом, выполнение прямых динамических расчетов на представительный ансамбль сейсмических воздействий чрезвычайно сложно, трудоемко и длительно. Полученный в результате таких расчетов огромный числовой массив результатов сложно обработать и правильно физически интерпретировать. Ведь из огромного множества временных процессов нужно выбрать наилучшее сочетание внутренних усилий в наиболее нагруженных элементах. Этому недостатка (сложной статистической обработки результатов расчета для каждого конкретного сооружения) лишен расчет линейно-спектральным методом. Этот метод описан ниже.

6.3.2. Динамический расчет линейно-спектральным методом (ЛСМ)

1. Расчет по спектральному методу предполагает, что анализируемое сооружение ведет себя как физически и геометрически линейная система. При таких предположениях движения сооружения описываются линейными дифференциальными уравнениями. Линейно-спектральный метод основан на разложении решения этих уравнений по собственным формам (см. главу 3). При использовании ЛСМ нагрузки для расчета на прочность задаются с помощью спектра отклика по ускорениям (далее он именуется спектром ускорений). Возможность появления в конструкции частичных разрушений и пластических зон учитывается косвенно введением в результаты расчета коэффициента снижения нагрузки K_I . Спектральный метод существенно менее информативен и точен нежели прямой динамический расчет. Преимуществом спектрального метода является его существенная простота (по сравнению с прямым динамическим расчетом). Надежность его результатов достигается использованием расчетно-экспериментальных коэффициентов, которые основаны на анализе результатов воздействия на эти конструкции землетрясений.

2. Расчет по ЛСМ использует в качестве исходных данных спектры ускорений. Эти спектры определяются из решения следующих уравнений:

$$\ddot{x} + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{x} + \omega^2 x = -\ddot{X}_0(t). \quad (6.9)$$

В (6.9) x – относительное перемещение обобщенного осциллятора; ξ – безразмерный коэффициент затухания; ω – собственная круговая частота осциллятора $1/c$; $\ddot{X}_0(t)$ – акселерограммы землетрясений (рис. 6.7).

Для расчета спектра отклика ускорений вводится в рассмотрение представительный ансамбль акселерограмм $\{\ddot{X}_{0i}\}$. Для каждой акселерограммы строится спектр отклика как зависимость максимальных значений модулей абсолютных ускорений от собственной частоты осциллятора ω и затухания ξ .

При этом, как правило, собственная частота варьируется в диапазоне $0 \div 33$ Гц (33 Гц – «частота среза»). При построении спектра отклика его значения вычисляют для дискретных значений частоты осциллятора. Спектральный коэффициент динамичности β (для фиксированного ω) находится по формуле

$$\beta(\omega) = \frac{\ddot{x}_a}{\max_t |\ddot{X}_0(t)|}, \quad (6.10)$$

где $\ddot{x}_a = \max_t |\dot{x}(t) + \ddot{X}_0(t)|$ – максимальное значение абсолютного ускорения осциллятора.

Коэффициент динамичности $\beta(\omega)$ это нормированный спектр отклика ускорений. Для получения расчетного спектра ускорений производится статистическая обработка функций $\beta_i(\omega)$, полученных для различных $\ddot{X}_i(t)$. В результате находится расчетный (нормативный) спектр абсолютных ускорений, как $\max_i \beta_i(\omega)$ при рассмотрении всего ансамбля воздействий. Расчетный спектр можно задать как функцию любого из нижеуказанных параметров: ω , $f = \frac{\omega}{2\pi}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Могут использоваться спектры двух видов; стандартные (не зависящие от географического пункта) и специальные (для конкретной площадки строительства). Принятые в РФ стандартные спектры [3] приведены на рис. 6.7. Следует указать, что из теоретических соображений следует, что $\beta(T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$ (см. п. 3.3.2 – 3.3.3). Однако стандартные нормативные спектры задаются с запасом и принимается, что для всех T коэффициенты динамичности $\beta(T) \geq 0,8$.

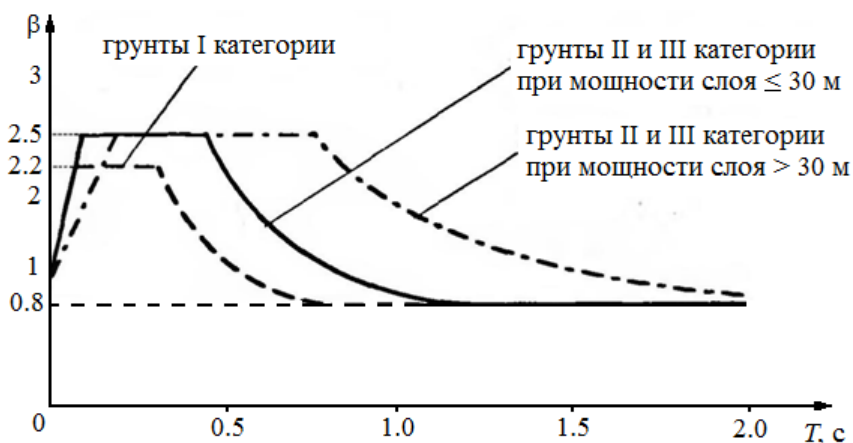


Рис. 6.7. Стандартные спектры для различных грунтов, принятые в РФ

При построении спектра его значения вычисляют для дискретных значений частоты осциллятора. Надо учитывать, что спектры, определяемые по записям реальных землетрясений, имеют пикообразный характер, и чтобы не пропустить их максимумы, приращения по частоте должны быть достаточно малыми. В табл. 6.1 даны величины приращений в зависимости от частоты, установленные нормами США [2].

Обобщенные спектры вычисляются для 3-х разных категорий грунтов. При построении стандартных спектров производится, как указано выше, статистическая обработка коэффициентов $\beta(T)$, полученных на основе представительного ансамбля различных инструментальных акселерограмм. Таким образом, ЛСМ учитывает стохастический характер сейсмических воздействий.

Таблица 6.1.

Величины приращений в зависимости от частоты

Диапазон частот f , Гц	0,1–3	3–3,6	3,6–5	5–8	8–15	15–18	18–22
Приращение Δf , Гц	0,1	0,15	0,2	0,25	0,5	1	2

3. Метод расчета сейсмостойкости с помощью спектров ускорений основан на разложении решения уравнений (6.8) по собственным формам. Этот метод включает в себя следующие этапы:

а) по спектру ускорений вычисляют модальные (соответствующие собственным формам) инерционные сейсмические нагрузки;

б) эти нагрузки прикладывают как статические и определяют внутренние усилия в конструкции, соответствующие каждой собственной форме (модальные отклики);

в) вычисляют суммарный сейсмический отклик, суммируя модальные отклики по специальным формулам;

г) используя суммарный отклик в сочетании с другими нагрузками, оценивают сейсмостойкость конструкции.

Существо ЛСМ рассмотрим на примере расчета здания, которое моделируется консольной балкой с сосредоточенными массами – рис. 6.8. Основание балки движется по закону $\ddot{y}(t)$.

4. Уравнения движения, соответствующие расчетной схеме на рис. 6.8.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -\delta_{11}m_1\ddot{x}_1 - \dots - \delta_{1n}m_n\ddot{x}_n; \\
 x_2 &= -\delta_{21}m_2\ddot{x}_2 - \dots - \delta_{2n}m_n\ddot{x}_n; \\
 x_3 &= -\delta_{31}m_3\ddot{x}_3 - \dots - \delta_{3n}m_n\ddot{x}_n; \\
 x_n &= -\delta_{n1}m_1\ddot{x}_1 - \dots - \delta_{nn}m_n\ddot{x}_n.
 \end{aligned}
 \tag{6.11a}$$

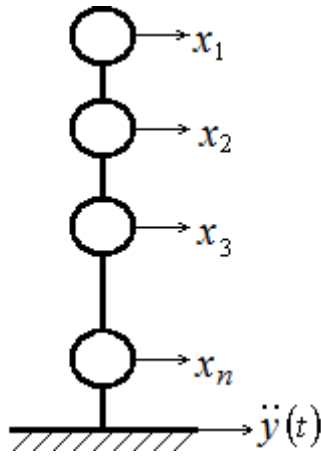


Рис. 6.8. Схема для расчета сейсмостойкости сооружения [12]

$$x_{i,abc} = x_i + y; \quad \ddot{x}_{i,abc} = \ddot{x}_i + \ddot{y};$$

$$x_i = -\delta_{i1}m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{y}) - \delta_{i2}m_2(\ddot{x}_2 + \ddot{y}) \dots - \delta_{in}m_n(\ddot{x}_n + \ddot{y}) \quad (6.116)$$

или

$$P_1(t) = -m_1\ddot{y}(t); \quad \dots \quad P_n(t) = -m_n\ddot{y}(t);$$

$$x_i = -\delta_{i1}m_1\ddot{x}_1 - \delta_{i2}m_2\ddot{x}_2 - \dots - \delta_{in}m_n\ddot{x}_n - \delta_{i1}m_1\ddot{y} - \delta_{i2}m_2\ddot{y} \dots - \delta_{in}m_n\ddot{y}, \quad (6.12)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

5. Вывод формул СП 14.13330.2018 [12].

Пусть $\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_n$ – система собственных функций на интервале $[0, l]$.

Любую непрерывную функцию на этом интервале можно разложить в ряд, который сходится всюду, кроме, может быть, граничных точек:

$$F(s) = a_1\phi_1(s) + \dots + a_n\phi_n(s) + \dots$$

Так как собственные формы ортогональны (с весом $\mu(s)$ – см. п. 3.5), то

$$\int_0^l \mu(s) \cdot \phi_i(s) \cdot \phi_k(s) ds \begin{cases} = 0, & \text{если } i \neq k \\ = 1, & \text{если } i = k \end{cases}.$$

Тогда

$$a_i = \frac{\int_0^l \mu(s) \cdot F(s) \cdot \phi_i(s) ds}{\int_0^l \mu(s) \cdot \phi_i^2(s) ds}. \quad (6.13a)$$

Для функций, заданных в точках s_k :

$$a_i = \frac{\sum_{k=1}^n \mu(s_k) \cdot F(s_k) \cdot \phi_i(s_k)}{\sum_{k=1}^n \mu(s_k) \cdot \phi_i^2(s_k)}. \quad (6.136)$$

Пусть $F(s_k) = 1$; $\phi_i(s_k) = u_{ik} - i^{\text{ая}}$ собственная форма; $k = 1, 2, \dots, n$.
Тогда

$$F(s_k) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \phi_i(s_k) = \sum_{i=1}^n u_{ik} \frac{\sum_{k=1}^n \mu(s_k) \cdot u_{ik}}{\sum_{k=1}^n \mu(s_k) \cdot u_{ik}^2} = 1. \quad (6.14)$$

Обозначим: Q_k – весовую нагрузку в точке k . Тогда инерционная горизонтальная нагрузка в точке k :

$$\mu(s_k) = \frac{Q_k}{g} \ddot{y}(t). \quad (6.15)$$

Далее будем использовать метод приведения к собственным формам и формулы, приведенные в п. 3.5.

Обобщенная нагрузка (приведенная к собственной i -й форме)

$$P_i(t) = \ddot{y}(t) \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{g} u_{ik}. \quad (6.16)$$

Уравнения колебаний по i -й форме:

$$\ddot{q}_i + 2\varepsilon p_i \dot{q}_i + p_i^2 q_i = \frac{P_i(t)}{m_i}, \quad (6.17)$$

где

$$m_i = \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{g} u_{ik}^2. \quad (6.18)$$

Подставляя (6.16) и (6.17) в (6.18), получаем

$$\ddot{q}_i + 2\varepsilon p_i \dot{q}_i + p_i^2 q_i = \frac{-\sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{g} u_{ik}}{\sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{g} u_{ik}^2} \ddot{y}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.19)$$

Одновременно с (6.16) рассмотрим уравнения:

$$\ddot{u}_k(t) = \sum_{k=1}^n \ddot{q}_i(t) u_{ik} = \sum_{k=1}^n \ddot{q}_i(t) \eta_i u_{ik} = \sum_{k=1}^n \eta_{ik} \ddot{q}_i(t). \quad (6.20)$$

Сравнивая (6.19) и (6.20), видим, что $q_i = \eta_i \tilde{q}_i$:

$$\eta_i = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{g} u_{ik}}{\sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{g} u_{ik}^2}. \quad (6.21)$$

Следовательно,

$$\ddot{u}_k(t) = \sum_{k=1}^n \ddot{q}_i(t) u_{ik} = \sum_{k=1}^n \ddot{q}_i(t) \eta_i u_{ik} = \sum_{k=1}^n \eta_{ik} \ddot{q}_i(t). \quad (6.22)$$

где

$$\eta_{ik} = \eta_i u_{ik} = \frac{u_{ik} \sum_{k=1}^n Q_k u_{ik}}{\sum_{k=1}^n Q_k u_{ik}^2}.$$

Абсолютные ускорения в точке « k »:

$$\ddot{u}_{абс.k}(t) = \ddot{u}_k(t) + \ddot{y}(t) = \sum_{k=1}^n (\eta_{ik} \ddot{q}_i(t) + \eta_{ik} \ddot{y}(t)). \quad (6.23)$$

Так как в соответствии с (6.14) $\sum_{i=1}^n \eta_{ik} = 1$, то

$$\ddot{u}_{абс.k}(t) = \sum_{i=1}^n \eta_{ik} (\ddot{q}_i(t) + \ddot{y}(t)). \quad (6.24)$$

Сейсмические сосредоточенные силы в точке « k », создаваемые i -й формой колебаний, определяются формулой

$$\tilde{S}_{0ik} = \pm \eta_{ik} \max |\ddot{q}_i(t) + \ddot{y}(t)| \cdot \frac{Q_k}{g}. \quad (6.25)$$

Спектр ответа $\beta(p_i)$ по определению равен

$$\beta(p_i) = \frac{\max |\ddot{q}_i(t) + \ddot{y}(t)|}{A}, \quad (6.26)$$

где A – соответствующее заданной балльности максимальное (по абсолютной величине) значение ускорений грунта.

Используя (6.26), вместо (6.25) получаем

$$\tilde{S}_{0ik} = \eta_{ik} \cdot \beta(p_i) \cdot A \cdot \frac{Q_k}{g}. \quad (6.27)$$

Если в (6.27) ввести множитель K_ψ , учитывающий диссипативные свойства конструкций конкретного типа, то получим формулу

$$S_{0ik} = K_\psi \cdot \tilde{S}_{0ik}, \quad (6.28)$$

совпадающую с формулой (5.2) в [12].

Нормы [12] требуют, чтобы инерционные сейсмические нагрузки вычислялись по формуле

$$S_{ik} = K_0 \cdot K_1 \cdot S_{0ik}. \quad (6.29)$$

Коэффициент K_0 учитывает ответственность сооружения, коэффициент K_1 возможность появления и уровень пластических деформаций в сооружении. Значения коэффициентов K_ψ , K_0 , K_1 приведены в таблицах 4.2, 5.2, 5.3 [12].

Используя матричный аппарат можно получить формулу (6.28) для любой (одномерной, плоской, пространственной) динамической расчетной схемы сооружения.

Каждой внешней сейсмической силе S_{ik} соответствует система внутренних усилий N_{ik} (N_{ik} – матрица-столбец, состоящая в общем случае из 6-ти компонент). Компоненты N_{ik} можно считать случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. Если собственные частоты f_r и f_i не близки, то эти компоненты, соответствующие разным формам, можно считать статистически независимыми. И наоборот, если частоты близки, то коэффициент корреляции близок единице. Учтем также, что максимумы усилий можно находить по правилу 3σ , где σ – среднеквадратическое значение случайной величины. Исходя из этих соображений, переход от спектральных откликов S_{0ik} , характеризующих инерционные нагрузки, к нагрузкам на отдельные элементы конструкции производится по формуле, по которой находятся среднеквадратические значения независимых и коррелированных случайных величин:

$$N_k = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^s N_{ik}^2 + \sum_{l=1}^m \sum_{r=1}^m |N_{lk} N_{rk}|}; \quad l \neq r. \quad (6.30)$$

В (6.30) N_{ik} – внутреннее усилие в элементе, соответствующие нагрузке S_i ; $\sum_{i=1}^s$ – соответствует далеко расположенным друг от друга частотам; $\sum_{l=1}^m \sum_{r=1}^m$ – соответствует близким частотам и частотам для которых $\beta \approx 1$.

Две частоты f_i, f_r считаются близкими, если они отличаются не более чем на 10 %:

$$\frac{f_i}{f_k} - 1 \leq 0,1.$$

Число учитываемых в расчете собственных форм рекомендуется устанавливать из предположения, что неучтенные собственные формы могут увеличить отклик системы не более чем на 10 %.

Главным преимуществом ЛСМ является то, что лежащий в основе расчета спектр отклика получается путем вероятностей обработки спектров, соответствующих многим реальным записям сейсмических колебаний грунта. Тем самым данный метод позволяет учесть опыт прошлых землетрясений, и чем больше их было рассмотрено при построении спектра, тем меньше вероятность того, что при новом землетрясении нагрузки на сооружение превысят ожидаемые. Удобно также и то, что согласно этому методу нагрузки для расчета на прочность являются квазистатическими (т. е. их величина и распределение зависят от динамических параметров системы, но в расчете прочности они рассматриваются как статические). Основным недостатком ЛСМ является его неприменимость к нелинейным системам. Поэтому эта теория не позволяет учесть неупругое поведение сооружений при землетрясениях. В российских строительных нормах [12] это обстоятельство учтено полуэмпирически: расчет сооружения выполняется по линейной схеме, но на заниженные инерционные нагрузки (в нагрузки вводится понижающий их коэффициент K_1). Предполагается, что при реальных, более сильных нагрузках сооружение получит некоторые повреждения, которые, однако, останутся в допустимых пределах. При этом, неточность такого подхода, компенсируется коэффициентом запаса – K_1 [12].

6.3.3. Учет влияния грунтового основания в сейсмических расчетах сооружений

1. Как правило, при выполнении сейсмических расчетов сооружений грунт моделируют как линейное вязкоупругое тело. При этом используют механические характеристики при средних значениях напряжений в основании, созданных суммой основных и сейсмических нагрузок. На основе этих характеристик вычисляют эквивалентные значения жесткостей и рассеивания энергии грунтового основания. Приведенные ниже формулы и таблицы взяты из [2].

Расчетными динамическими характеристиками грунтов являются: плотность ρ ; модуль упругости и сдвига – E , G ; коэффициент диссипации ζ ; скорости распространения упругих волн – продольной V_p и поперечной V_s . Для этих параметров существуют следующие взаимозависимости:

$$E = \rho \cdot V_p^2 \frac{3\delta^2 - 4}{\delta^2 - 1}; \quad (6.31)$$

$$\nu = \frac{\delta^2 - 2}{2(\delta^2 - 1)}; \quad G = \rho \cdot V_s^2; \quad \delta^2 = \frac{V_p}{V_s}; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

При определении жесткости грунтового основания, состоящего из слоев мягких грунтов, используется еще одна характеристика: модуль деформации грунта E_g . Эта характеристика имеет смысл секущего модуля упругости для нелинейной диаграммы « $\sigma - \epsilon$ » и используется вместо E в формулах (6.31). В табл. 6.2 приведены инженерно-геологические характеристики различных грунтов.

Таблица 6.2

Инженерно-геологические характеристики грунтов

Наименование грунтов	Плотность ρ , т/м ³	Скорость распространения упругих волн, км/с		Модуль деформации $E_g \times 10^{-2}$, МПа
		Прод. V_p	Попер. V_s	
Мягкие грунты				
Насыпные грунты рыхлые (пески, супеси, суглинки и др.), неводонасыщенные	1,40–1,70	0,1–0,3	0,007–0,15	≈ 0,1
Гравелисто-песчаные грунты	1,60–1,90	0,2–0,5	0,10–0,25	0,05–1,3
Песчаные грунты маловлажные (сухие)	1,40–1,70	0,15–0,9	0,13–0,50	
Песчаные грунты средней влажности	1,60–1,90	0,25–1,3	0,16–0,60	0,03–1,0
Песчаные грунты водонасыщенные	1,70–2,20	0,3–1,6	0,20–0,80	
Супеси	1,60–2,00	0,3–1,2	0,12–0,60	0,05–1,3
Суглинки	1,60–2,10	0,3–1,4	0,14–0,70	0,05–1,2
Глинистые грунты влажные, пластичные	1,70–2,20	0,5–2,8	0,13–1,20	0,05–2,0
Глинистые грунты плотные, полутвердые и твердые	1,90–2,60	2,0–3,5	1,10–2,00	
Лесс и лессовидные грунты	1.30–1.60	0.38–0.4	0.13–0.14	0.05–1.0

Наименование грунтов	Плотность ρ , т/м ³	Скорость распространения упругих волн, км/с		Модуль деформации $E_g \times 10^{-2}$, МПа
		Прод. V_p	Попер. V_s	
Полускальные и скальные породы				
Мергель	1,80–2,60	1,4–3,5	0,8–2,0	
Песчаник рыхлый	1,80–2,20	1,5–2,5	0,8–1,7	
Песчаник плотный	2,00–2,60	2,0–4,3	1,1–2,5	
Песчаник сильно выветрелый	1,70–2,20	1,0–3,0	0,6–1,8	
Известняк прочный	2,00–3,00	3,0–6,5	1,5–3,7	
Глинистые сланцы	2,00–2,80	2,0–5,0	1,2–3,0	
Изверженные и метаморфические породы (гранит, гнейс, базальт, диабаз) трещиноватые	2,40–3,00	3,0–5,0	1,7–3,0	
Изверженные и метаморфические породы (гранит, гнейс и др.) нетрещиноватые	2,70–3,30	4,0–6,5	2,7–4,3	

Примечание: Нижний предел скоростей распространения упругих волн относится к грунтам и скальным породам с минимальным объемным весом, а верхний – с максимальным.

Таблица 6.3

**Эквивалентные характеристики жесткостей и рассеяния энергии
в основании круглого и прямоугольного в плане сооружения**

Направление колебаний	Круглый фундамент	
	Эквивалентные жесткости	Эквивалентные затухания
Горизонтальные	$K_x = \frac{32(1-\nu)GR}{7-8\nu}$, Н/м	$b_x = 0,576K_x R \sqrt{\frac{\rho}{G}}$, Нс/м
Вертикальные	$K_z = \frac{4GR}{1-\nu}$, Н/м	$b_z = 0,85K_z R \sqrt{\frac{\rho}{G}}$, Нс/м
Качение в вертикальной плоскости	$K_\phi = \frac{8GR^3}{3(1-\nu)}$, Нм	$b_\phi = \frac{0,30}{1+B_\phi} K_\phi R \sqrt{\frac{\rho}{G}}$, Нмс
Поворот в горизонтальной плоскости	$K_\theta = \frac{16}{3} GR^3$, Нм	$b_\psi = \frac{1}{1+B_\psi} \sqrt{K_\psi I_\psi}$, Нмс

Обозначения: $B_\phi = \frac{3(1-\nu)I_{0m}}{8\rho R^5}$; $B_\psi = \frac{2I_{\psi m}}{\rho R^5}$, где R – радиус фундамен-

та, м; I_{0m} – момент инерции сооружения относительно горизонтальной оси качания, проходящей через центр основания, кг · м²; $I_{\psi m}$ – полярный момент инерции сооружения относительно вертикальной оси симметрии, кг · м².

Таблица 6.4

**Эквивалентные характеристики жесткостей и рассеяния энергии
в основании прямоугольного в плане сооружения**

Направление колебаний	Прямоугольный фундамент	
	Эквивалентные жесткости	Эквивалентные затухания
Горизонтальные	$K_x = 2(1+\nu)G\beta_x\sqrt{BL}$, Н/м	Как для круглого фундамента $R = \sqrt{BL/\pi}$ То же – с радиусом $R = \sqrt[4]{BL^3/(3\pi)}$
Вертикальные	$K_z = \frac{G}{1-\nu}\beta_z\sqrt{BL}$, Н/м	
Качание в вертикальной плоскости	$K_\phi = \frac{G}{1-\nu}\beta_\phi BL^2$, Нм	
Поворот в горизонтальной плоскости	Как для круглого фундамента $R = \sqrt[4]{BL(B^2 + L^2)/(6\pi)}$	

Обозначения: B – ширина фундамента в направлении, перпендикулярном направлению горизонтального сейсмического возмущения, м; L – длина фундамента в направлении, параллельном горизонтальному сейсмическому возмущения, м; $\beta_x, \beta_z, \beta_\phi$ – коэффициенты, зависящие от отношения B / L .

6.4. Примеры расчетов

6.4.1. Расчет типового 9-этажного крупнопанельного здания¹

Здание – прямоугольное в плане, с габаритами 22,5×12 м. Количество этажей: 9 надземных и 1 подвальный.

Высота 27,4 м (до кровли здания).

Для проведения расчетов использовалась модель, в которой здание представляет собой пространственную систему пластин. Стены и перекрытия представлялись конечными элементами (КЭ) типа – оболочка. Все узлы расчетной модели соединены жестко.

Расчет производился с помощью программного комплекса Ing+, основанного на методе конечных элементов, по линейной спектральной теории в соответствии со СНиП II-7-81* «Строительство в сейсмических районах».

¹ Примечание: параграф написан инженером Д. Юсуповым.

Сейсмическое воздействие принято для 8 бальной площадки. В связи с конструктивными особенностями здания, приняты следующие коэффициенты для расчета на сейсмическое воздействие (СНиП II-7-81* «Строительство в сейсмических районах»):

K_l	0,22
K_ψ	1
A	0,2

Расчетный собственный вес железобетонных конструкций – 27,5 кН/м³.
Остальные нагрузки, принятые в расчете, указаны в табл. 6.5. Расчетные параметры конечных элементов и их стыков сведены в табл. 6.6.

Таблица 6.5

Нагрузки расчетные

№	Наименование	Значение, кН/м ²
Отм. +0,050 ... +25,000 (1-9 эт.)		
1	Полезная (в квартирах)	1,95
2	Полезная (в коридорах и лестницах)	3,60
3	Конструкции пола, перегородки	2,40
4	Теплоизоляционный и ограждающий слой наружных панелей	9,00
Отм. +26,300 (покрытие)		
5	Кровля	3,20
6	Снег	1,20

Таблица 6.6

Расчетные параметры элементов

Сечение	Материал	Модуль упругости E , кН/м ²	Коэф. Пуассона μ	Объемный вес γ , т/м ³
Наружные стеновые панели, несущий слой $t = 100$ мм	Бетон В15	$2,4 \cdot 10^7$	0,2	27,5
Стык горизонтальный	Раствор М100			
Стык вертикальный	Бетон В15	$2,4 \cdot 10^7$	0,2	27,5
Внутренние стеновые панели $t = 160$ мм	Бетон В15	$2,4 \cdot 10^7$	0,2	27,5
Стык горизонтальный	Раствор М100			

Сечение	Материал	Модуль упругости E , кН/м ²	Коэф. Пуассона μ	Объемный вес γ , т/м ³
Стык вертикальный	Бетон В15	$2,4 \cdot 10^7$	0,2	27,5
Плита перекрытия $t = 160$ мм	Бетон В15	$2,4 \cdot 10^7$	0,2	27,5

Расчетные характеристики материалов приняты СП52-101-2003 «Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения»: бетона В15 – $R_b = 8,5$ МПа; $R_{bt} = 0,75$ МПа; арматура А400 – $R_s = 355$ МПа; $R_{sw} = 285$ МПа; $R_{sc} = 355$ МПа.

Общий вес здания без снеговой и полезной нагрузок составил примерно 3000 тонн.

На рис. 6.9 представлено наихудшее направление поступательного сейсмического воздействия для 9-ти этажного здания.

На рис. 6.10 представлена расчетная схема 9-ти этажного здания.

Результаты расчетов собственных частот 9-ти этажного здания представлены в табл. 6.7.

Таблица 6.7

Динамические характеристики конструкции

Форма колебания	ω , рад/с	f , Гц	T , с
1	18,64	2,967	0,337
2	21,07	3,353	0,2983
3	28,54	4,542	0,2202
4	62,89	10,01	0,09991
5	72,61	11,56	0,08653
6	79,53	12,66	0,079
7	86,35	13,74	0,07276
8	89,84	14,30	0,06994
9	94,21	14,99	0,0667
10	96,69	15,39	0,06499
11	104,7	16,66	0,06003
12	107,9	17,18	0,05821

На основе динамических характеристик здания, было определено наихудшее направление для поступательного сейсмического воздействия:

Далее в табл. 6.8 приведены результаты расчета на статические нагрузки и совместное действие статических и сейсмическихна грузов.

Обозначения принятые в табл. 6.8:

« $S_r +$ » – максимальные растягивающие горизонтальные напряжения;

« $S_r -$ » – максимальные сжимающие горизонтальные напряжения;

« $S_s +$ » – максимальные растягивающие вертикальные напряжения;

« $S_s -$ » – максимальные сжимающие вертикальные напряжения.

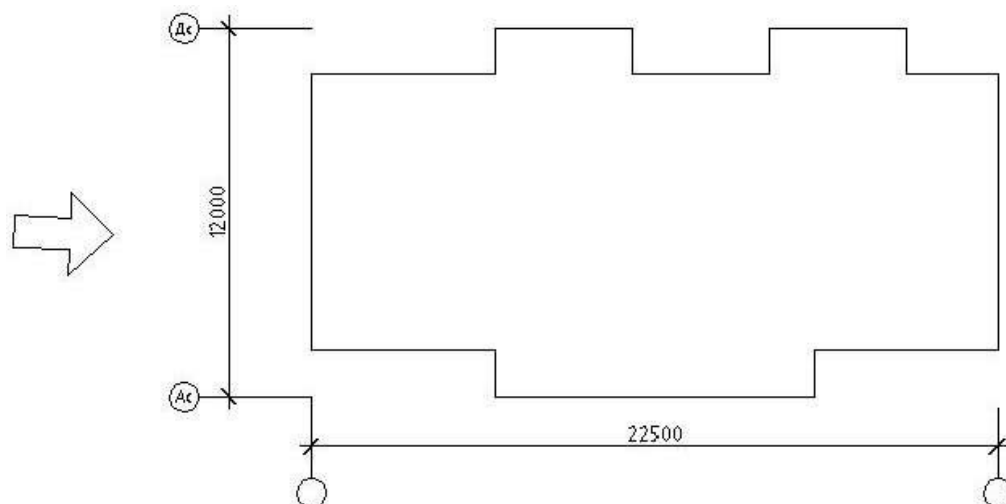


Рис. 6.9. Наихудшее направление поступательного сейсмического воздействия для 9-ти этажного здания

Таблица 6.8

Максимальные и минимальные значения напряжений кН/м²

	Стены подвала	Стены первого этажа	Надоконные перемычки
от статического воздействия			
$S_r +$	283,64	716,33	595,20
$S_r -$	-1143,91	-865,24	-385,47
$S_s +$	–	–	271,50
$S_s -$	-4007,37	-4415,42	-131,26
от статического и сейсмического воздействия			
$S_r +$	369,47	1554,96	2216,81
$S_r -$	-1098,74	-1708,55	-3092,25
$S_s +$	–	1146,66	820,72
$S_s -$	-4930,76	-5661,17	-787,37

Полученные результаты расчетов показывают, что вследствие сейсмического воздействия в несущих элементах появляются значительные горизонтальные напряжения. Вертикальные напряжения также увеличиваются.

В панелях наружных стен значения напряжений превышают допустимые. Но как было отмечено выше, конструктивная схема здания поперечно-

стенная, и локальная потеря несущей способности наружной панелью не повлечет разрушения здания. Это дает возможность говорить о том, что здание обеспечит необходимую безопасность людей и сохранность оборудования при допустимых повреждениях и деформациях.

Анализ собственных форм, представленных на рис. 6.11 показывает, что энергосодержащими являются 1–6 формы. В колебаниях по этим формам участвует всё здание. В колебаниях по следующим формам принимают участие преимущественно локальные участки здания. Если ограничить этот локальный участок неподвижным жестким контуром, то собственная частота здания будет близка к собственной такого участка с условными граничными условиями (т. е. к парциальной частоте). Поэтому для расчета общей прочности в данном случае нужно учитывать 6 первых собственных форм. Остальные формы колебаний определяют местную прочность при сейсмике.

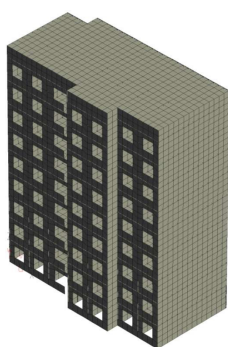


Рис. 6.10. Расчетная схема 9-ти этажного здания

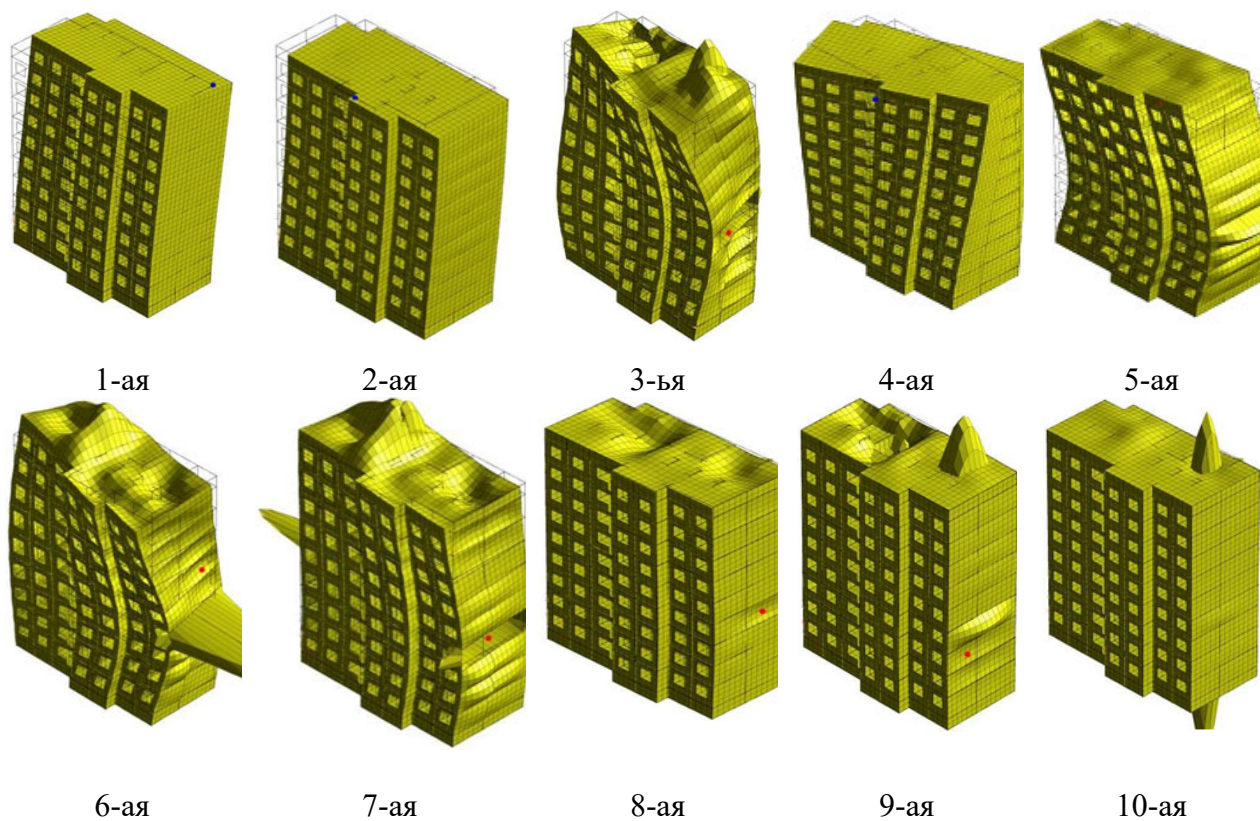


Рис. 6.11. Формы колебаний здания

6.4.2. Расчет 70-ти метрового радиотелескопа РТ-70²

1. Общий вид радиотелескопа (г. Евпатория) приведен на рис. 6.12. На рис. 6.13 приведен фрагмент ферменного каркаса, позволяющий оценить масштаб наполненности ферменного каркаса.

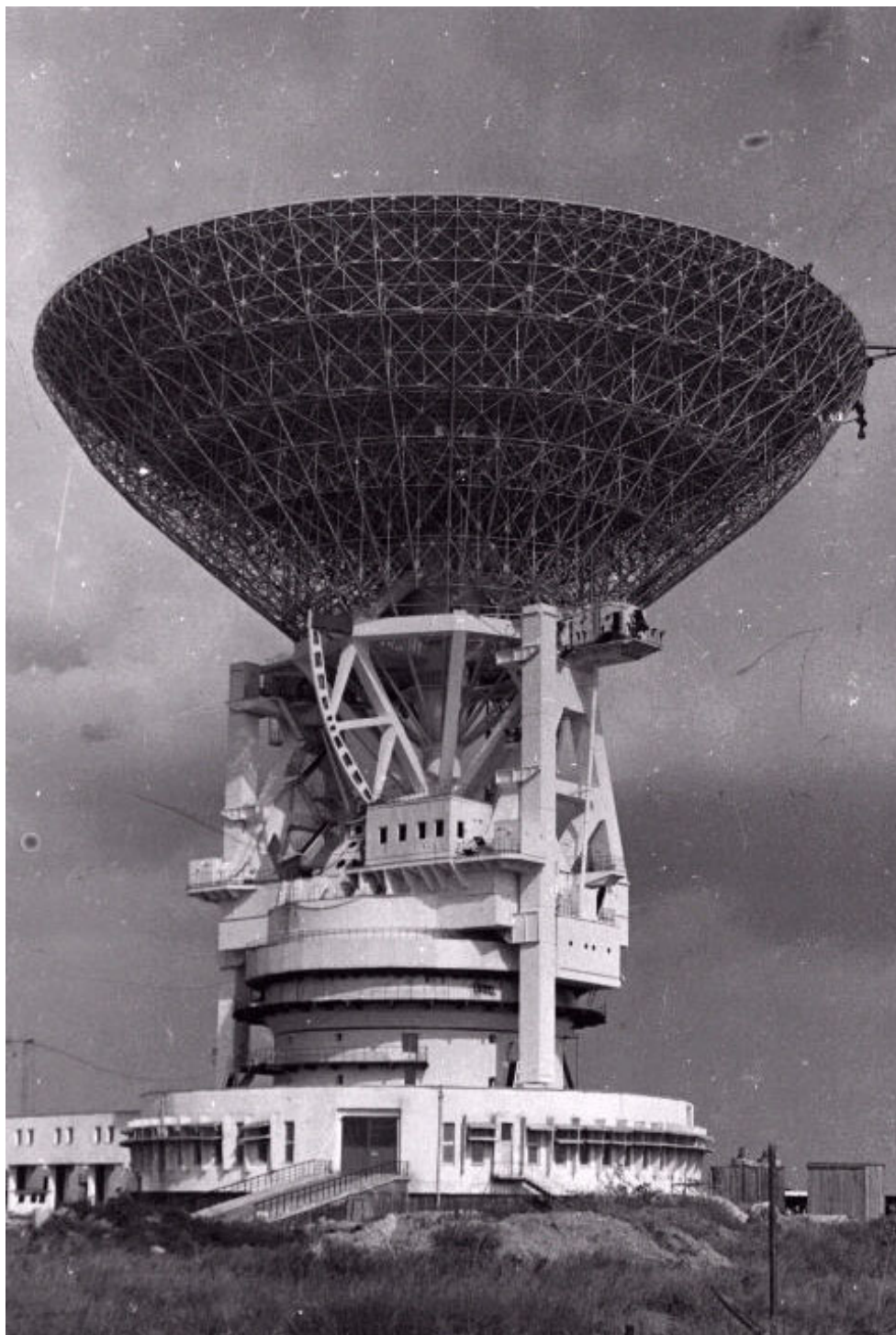


Рис. 6.12. Радиотелескоп РТ-70 в г. Евпатория

² *Примечание: параграф написан к.т.н. В. В. Ковальковым.*



Рис. 6.13. Фрагмент каркаса ГЗ

Конструкция АУ включает зеркальную систему, опорно-поворотное устройство (ОПУ) со стойками оси наведения по углу места и установленными на платформе ОПУ приводами наведения по азимуту и углу места.

Зеркальная система (ЗС) является составной частью антенной установки (АУ) и предназначена для переотражения и фокусировки радиолуча.

Зеркальная система состоит из следующих основных частей:

- основного зеркала (ОЗ);
- вторичной системы (ВС);
- основания зеркальной системы (ОЗС);
- аппаратных и юстировочных кабин;
- электрооборудования, вспомогательных и грузоподъемных устройств.

Основное зеркало представляет собой крупногабаритную стержневую металлоконструкцию каркаса с расположенными на ней щитами рабочей (отражающей) обшивки.

Каркас ОЗ является пространственной стержневой сварной конструкцией, в основе которой заложены радиальные фермы, опирающимися верхним и нижним силовыми поясами на центральную трубу ОЗС. Радиальные фермы связаны между собой тангенциальными (кольцевыми) связями и раскосами.

ОЗС является несущей конструкцией ЗС, на которой закреплены стойки с ригелем вспомогательного зеркала (ВЗ) с приводами, аппаратные и юстировочные кабины. На ОЗС закреплены цапфенные узлы, образующие угломестную ось ЗС, относительно которой осуществляется поворот ЗС в угломестной плоскости, а также вспомогательные устройства и площадки обслуживания.

Основание входит в состав ОЗС и выполнено в виде пространственной сварной металлоконструкции, состоящей из центральной двухстенной трубы и восьмигранника, соединенных между собой спицами и подкосами. С центральной трубой и восьмигранником соединен сектор с зубчатым венцом, посредством которого осуществляется наведение по углу места.

Центральная труба разделена по высоте межэтажными перекрытиями, вдоль внутренней трубы установлена кабина грузового лифта.

Общая масса РТ-70 (Евпаторийский вариант) составляет 4100 тонн.

2. Формирование КЭ модели. Общий вид модели приведен на рис. 6.14. Модели подсистем приведены на рис. 6.15–6.19.

Модель содержала до 15 000 элементов каркаса и отражающих щитов.

В модели использованы балочные элементы и элементы типа толстых пластин. Модель АУ содержит 12 077 элементов, из них 10 080 элементов описывает ГЗ.

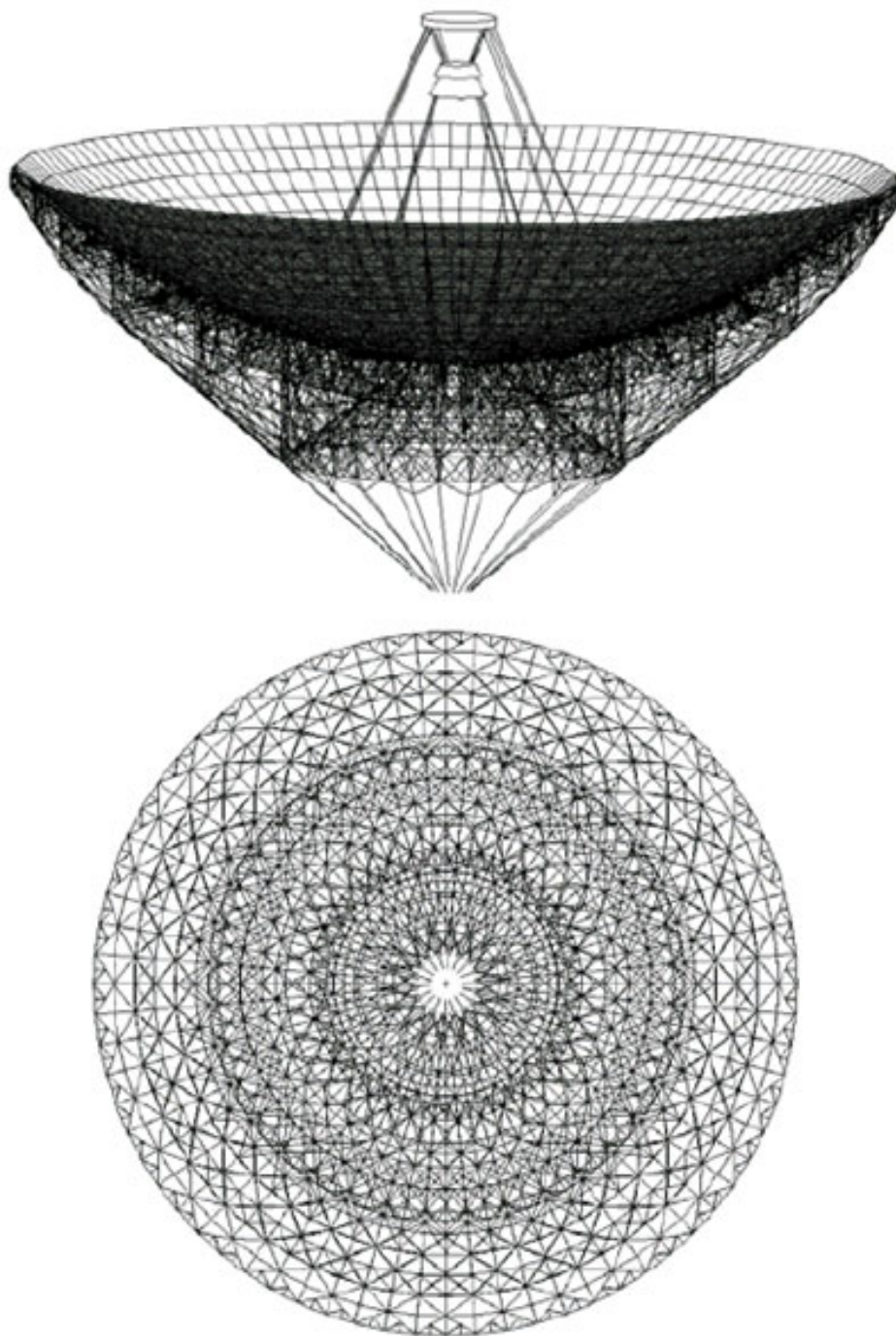


Рис. 6.14. Общий вид КЭ модели (Полная расчетная модель АУ)

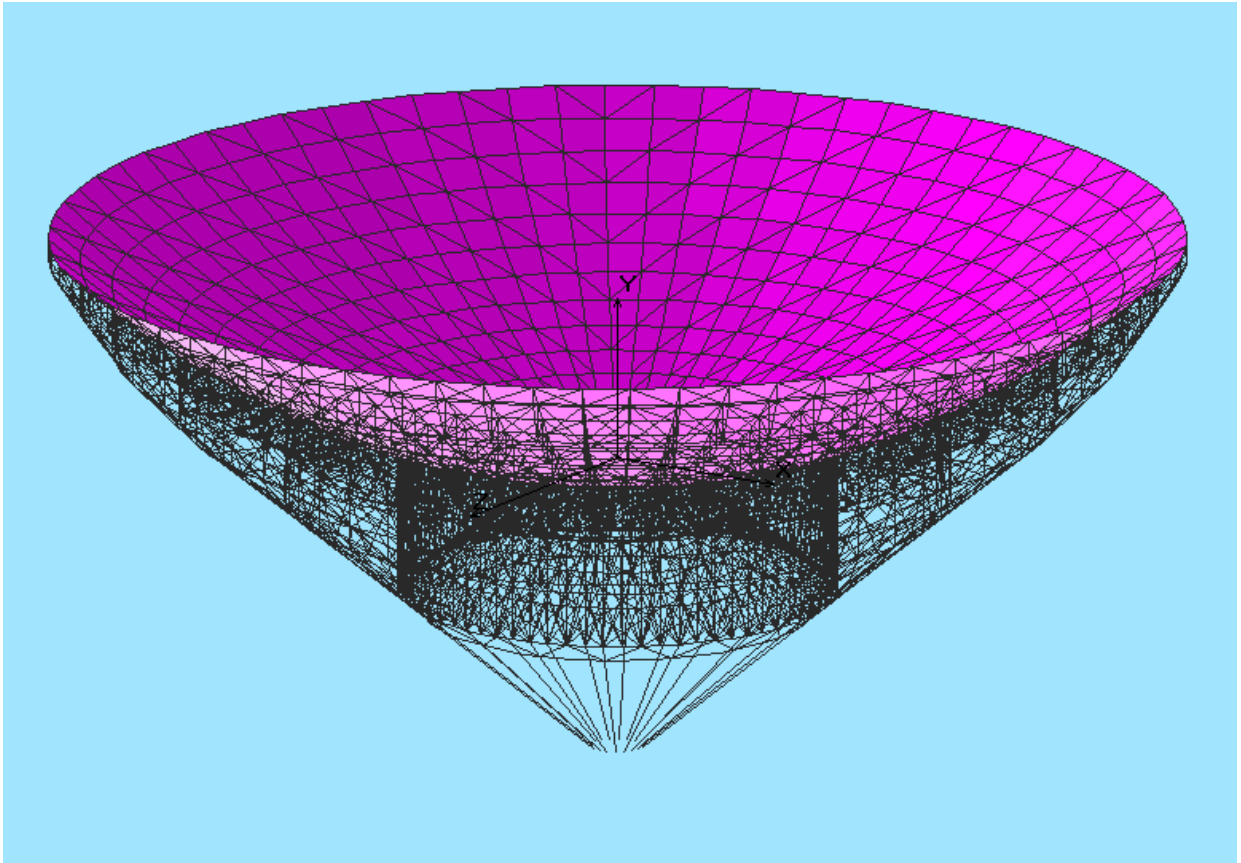


Рис. 6.15. Модель ГЗ с отражающей поверхностью

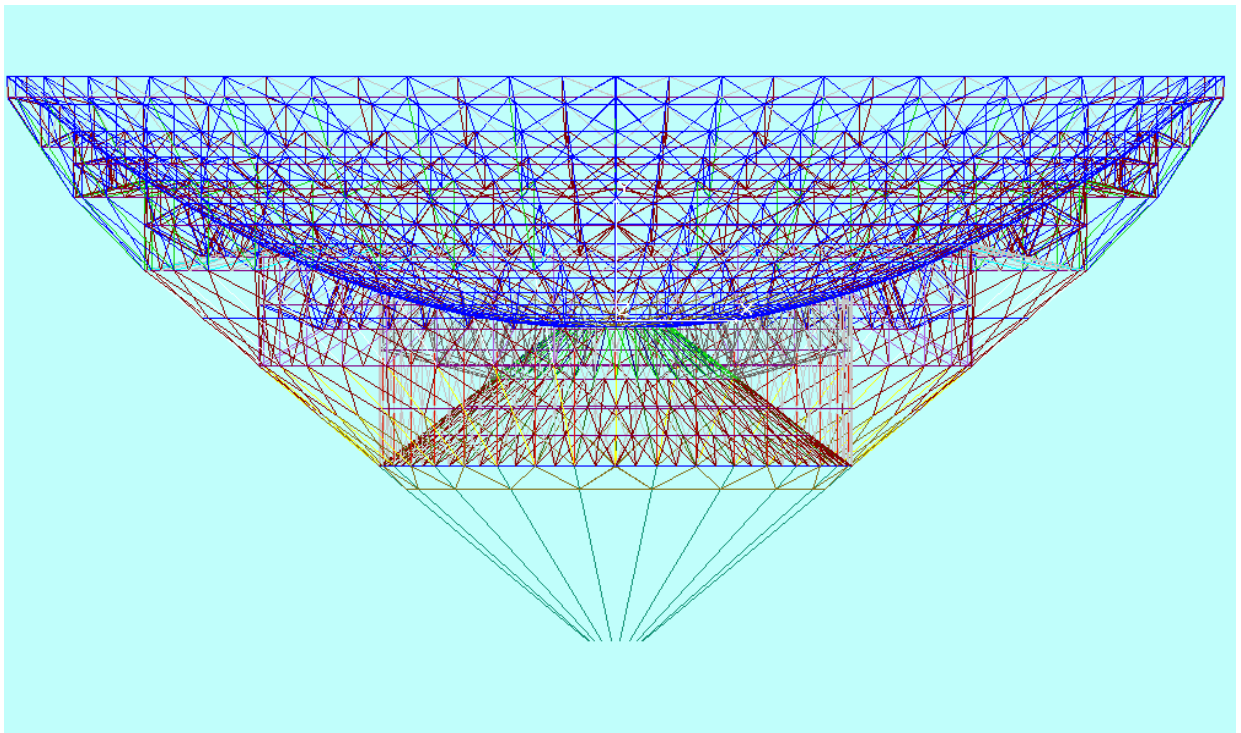


Рис. 6.16. Модель ГЗ с прозрачными панелями

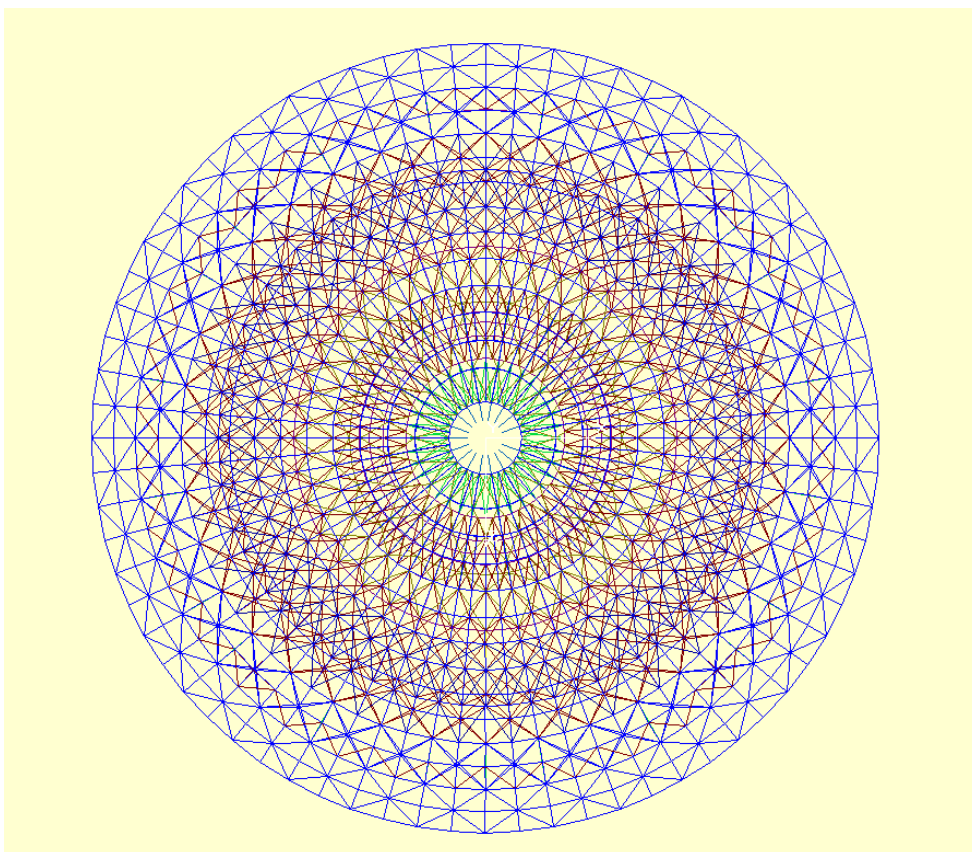


Рис. 6.17. Ферменный каркас при виде сверху

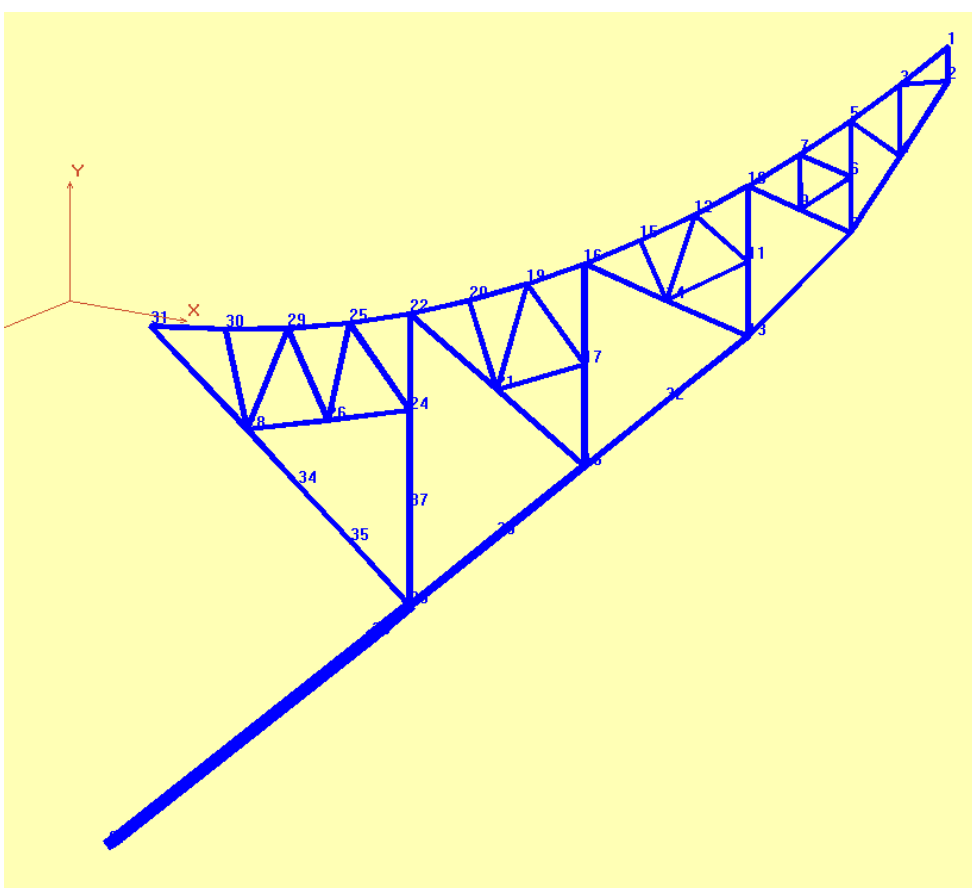


Рис. 6.18. Модель основной радиальной фермы

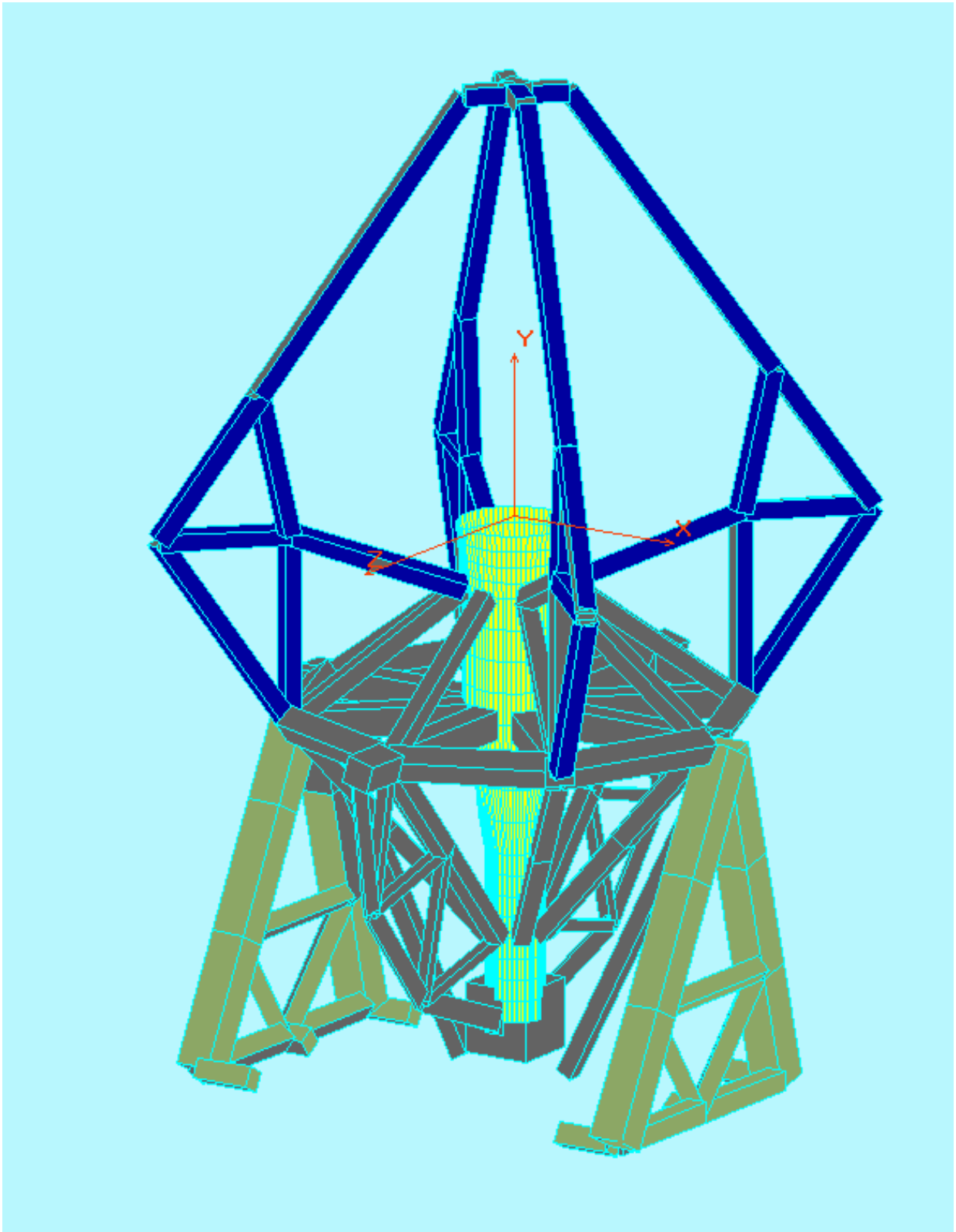


Рис. 6.19. Расчетная модель ОЗС, ВС и ОПУ

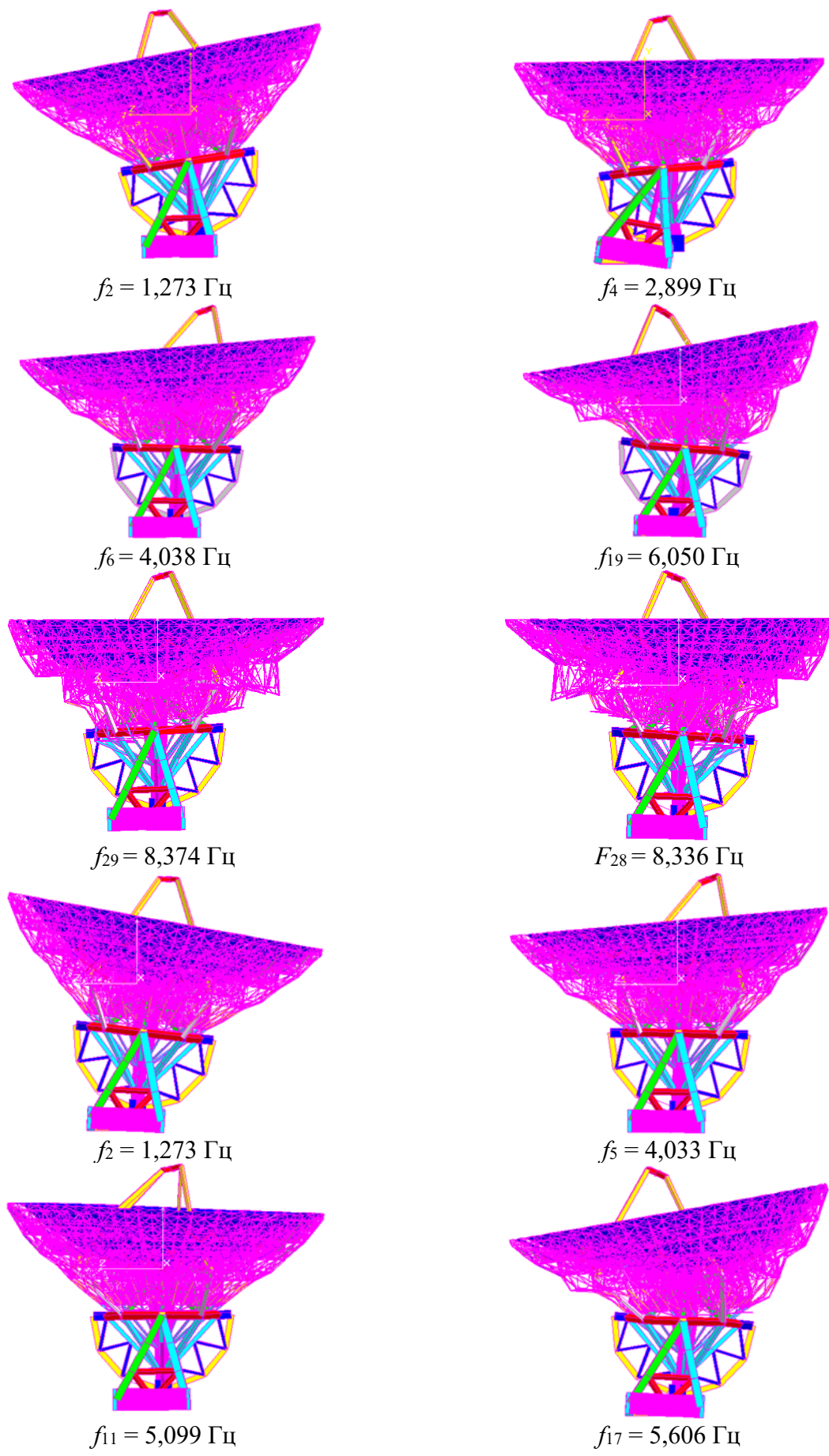


Рис. 6.20. Формы колебаний незаштыренной модели с различными частотами

Расчеты РТ-70 проводились по ЛСМ. При расчете РТ-70 на девятибалльное сейсмическое воздействие были приняты следующие коэффициенты:

$$k_1 = 0,25; \quad k_{\psi} = 1.$$

Для выполнения прочностного анализа были составлены таблицы эквивалентных напряжений (по критерию Губера-Мизеса), позволяющие установить вклад сейсмических напряжений в общий уровень напряженного состояния (определяемого как сейсмическими, так и весовыми нагрузками).

Для удобства анализа таблицы напряжений сортировались по различным критериям и при каждой сортировке анализировалось наиболее нагруженные по данному критерию 20–30 элементов. Результаты сортировок для незаштыренной АУ помещены в табл. 6.9–6.11. Результаты таких сортировок для заштыренной модели отличаются не более чем на 10 %.

Результаты поэлементных расчетов содержат:

- итоговые эквивалентные напряжения (σ) от сейсмонагрузки и весовой нагрузки при положении зеркала в зенит ($\beta_{\text{ум}} = 90^\circ$);
- вклад в общую сумму напряжений от сейсмонагрузки ($\sigma_{\text{сейс}}$);
- процент вклада в общую сумму напряжений от сейсмонагрузки ($\sigma_{\text{сейс}}/\sigma$, %).

Анализ приведенных результатов показывает:

1) Наибольшие напряжения $\sigma = 188,5$ МПа (табл. 6.9, 6.11) достигаются в элементах платформы АУ и определяются весовыми напряжениями, дающими вклад в суммарные напряжения 188,3 МПа.

2) Наибольшие добавки к весовым напряжениям возникают в мало-нагруженных от веса элементах.

Как видно из табл. 6.9, вклад сейсмических напряжений в наиболее нагруженные элементы АУ не превышает 20 %. Однако такая ситуация возникла из-за того, что коэффициент k_1 был принят равным 0,25, т. е. в АУ допускались значительные пластические деформации при сейсмике. Если принять $k_1 = 1$, что означает требование работоспособности АУ после сейсмического воздействия, то опасность сейсмических напряжений резко возрастает.

Таблица 6.9

Сортировка по итоговым напряжениям σ (незаштыренная АУ)

№ элем	σ , МПа	$\sigma_{сейс}$, МПа	$\sigma_{сейс} / \sigma$, %
12072	188.543	7.350	3.898
12073	188.540	7.277	3.860
11922	129.801	7.221	5.563
11921	129.798	7.166	5.521
11524	87.477	2.560	2.927
11546	87.465	2.487	2.843
12070	86.036	41.890	48.688
12068	86.017	41.850	48.653
11523	85.298	2.559	3.000
11545	85.296	2.486	2.914
5080	80.287	9.610	11.969
4572	80.195	12.340	15.388
508	80.123	8.221	10.260
5588	80.059	6.912	8.634
1016	79.990	6.056	7.571
4064	79.975	14.821	18.532
9144	79.935	10.664	13.342
8636	79.667	13.174	16.536
3556	79.624	15.753	19.784
1524	79.530	5.046	6.345
6096	79.498	4.505	5.666
3048	79.298	14.984	18.895
8128	79.297	14.116	17.802
2032	79.232	8.991	11.347
2540	79.141	12.609	15.932
6604	79.060	7.432	9.401
7620	78.989	13.366	16.921
7112	78.892	11.007	13.952
9143	78.606	9.660	12.289
507	78.543	12.388	15.772
4571	78.435	8.249	10.518
8635	78.362	6.990	8.920
1015	78.354	14.872	18.980
5079	78.289	10.732	13.708
4063	78.276	6.073	7.758
5587	78.040	13.234	16.958
1523	78.014	15.789	20.238
3555	77.811	4.999	6.425
8127	77.783	4.543	5.840
6095	77.674	14.171	18.244
2031	77.672	14.998	19.309
3047	77.530	8.963	11.561
2539	77.482	12.601	16.263

Таблица 6.10

Сортировка по сейсмическим напряжениям $\sigma_{\text{сейс}}$ (незаштыренная АУ)

№ элем	σ , МПа	$\sigma_{\text{сейс}}$, МПа	$\sigma_{\text{сейс}} / \sigma$, %
12071	61.872	49.702	80.329
12069	61.864	49.691	80.324
12070	86.036	41.890	48.688
12068	86.017	41.850	48.653
6753	62.960	32.406	51.471
7002	62.956	32.397	51.460
2181	62.504	31.562	50.495
2430	62.504	31.562	50.496
6494	62.068	30.986	49.923
7261	62.090	30.979	49.893
1922	61.629	30.151	48.923
2689	61.647	30.134	48.882
6245	61.296	29.969	48.893
7510	61.323	29.953	48.845
1673	60.878	29.142	47.870
2938	60.906	29.127	47.822
2027	31.612	28.318	89.580
3044	31.182	28.113	90.157
6599	31.349	28.024	89.394
2535	30.189	27.863	92.295
7616	30.891	27.790	89.961
2536	29.732	27.643	92.971
7107	29.921	27.568	92.137
7108	29.440	27.328	92.826
5986	58.970	25.874	43.877
7769	59.009	25.861	43.825
1519	29.808	25.400	85.212
3552	29.463	25.288	85.828
6091	29.550	25.103	84.950
1414	58.589	25.057	42.768
3197	58.633	25.034	42.696
8124	29.192	24.971	85.541
3043	25.862	24.095	93.168
5737	57.731	23.969	41.518
8018	57.767	23.946	41.453
2028	25.448	23.938	94.064
7615	25.576	23.786	93.001
6600	25.141	23.609	93.908
1165	57.381	23.159	40.360
3446	57.427	23.136	40.288
6754	41.142	21.198	51.525
7001	41.142	21.198	51.525
2182	40.842	20.645	50.548
2429	40.842	20.645	50.548
6246	40.307	19.939	49.467

Таблица 6.11

**Сортировка по проценту вклада в общую сумму напряжений
от сейсмонагрузки $\sigma_{\text{сейс}}$ (незаштыренная АУ)**

№ элем	σ , МПа	$\sigma_{\text{сейс}}$, МПа	$\sigma_{\text{сейс}}/\sigma$, %
6467	16.943	16.353	96.515
7236	16.927	16.332	96.486
1895	16.823	16.230	96.479
2664	16.807	16.210	96.449
6728	17.664	17.017	96.339
6220	16.248	15.653	96.337
6975	17.664	17.017	96.337
7483	16.233	15.633	96.303
2156	17.544	16.895	96.302
2403	17.544	16.895	96.300
1648	16.126	15.529	96.296
2911	16.111	15.508	96.261
5959	14.288	13.732	96.110
7744	14.250	13.691	96.078
1387	14.167	13.607	96.047
3172	14.130	13.566	96.013
5712	12.996	12.415	95.523
7991	12.960	12.374	95.483
1140	12.874	12.287	95.441
3419	12.828	12.237	95.393
6468	18.340	17.360	94.658
7235	18.321	17.340	94.643
1896	18.261	17.276	94.607
2663	18.243	17.256	94.594
6976	18.730	17.701	94.509
12081	0.859	0.812	94.504
12079	0.859	0.811	94.501
6727	18.732	17.702	94.499
2404	18.652	17.618	94.458
2155	18.663	17.628	94.455
2025	18.645	17.550	94.128
6597	18.612	17.515	94.105
2028	25.448	23.938	94.064
3042	18.458	17.340	93.942
7614	18.418	17.297	93.914
6600	25.141	23.609	93.908
12080	0.802	0.751	93.725
12078	0.801	0.751	93.721
5451	10.151	9.466	93.251
3043	25.862	24.095	93.168
8252	10.102	9.411	93.160
879	10.029	9.335	93.083
7615	25.576	23.786	93.001
5960	16.053	14.928	92.991
3680	9.979	9.279	92.988

6.5. Упрощенный нелинейный динамический расчет

1. Нелинейная модель с одной степенью свободы начала применяться в работах Ньюмарка Н., Розенблюэта Э. [9], Ивена В., Велетсос А. и др. и применяется до сих пор в исследованиях Датта Т. К. и Чопры А. К. [7, 34].

Нелинейная модель с одной степенью описывается дифференциальным уравнением:

$$m\ddot{u} + \alpha\dot{u} + F(u, \dot{u}) = -m\ddot{X}_0(t). \quad (6.32)$$

Нелинейная упругопластическая силовая характеристика модели показана на рис. 6.21. Разделив правую и левую часть уравнения на m , получаем уравнение:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + f(u, \dot{u}) = -\ddot{X}_0(t). \quad (6.33)$$

$$\text{В (6.33) } \omega^2 = \frac{c_{упр}}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{c_{нл}}{m}, \quad f_T = \frac{F_T}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

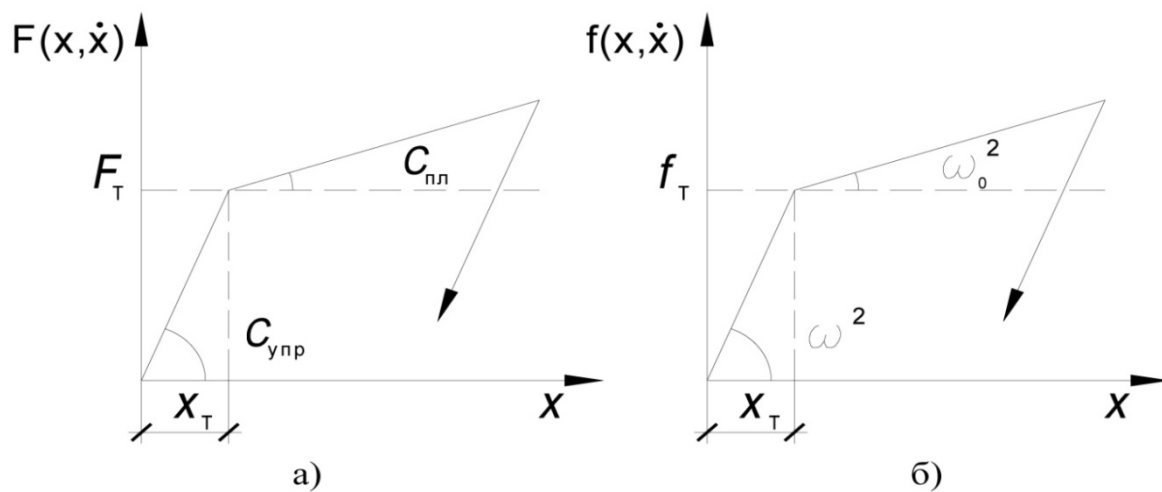


Рис. 6.21. Билинейная диаграмма с упругой разгрузкой

При упругопластическом расчете ряда сооружений уравнение (6.33) дает результаты, близкие к результатам, полученным для многомерных моделей. Ниже выполнено сравнение результатов, полученных при расчете многоэтажного каркасного здания по модели (6.33) и многомерной модели (6.7).

Динамические характеристики исследуемого объекта, как системы с одной степенью свободы, приведены в табл. 6.12.

Динамические характеристики

Тип сооружения	Период T , с	Круговая частота ω , рад/с	Частота f , Гц	ω^2	ω_0^2	f_T , м/с ²
Многоэтажное каркасное здание	1,612	3,897	0,6202	15,19	0,30374÷ 0,7594	2,4

Исходные сейсмические воздействия были задано в виде пяти акселерограмм землетрясений. Основные характеристики данных землетрясений приведены в табл. 6.13.

Основные характеристики землетрясений

Запись землетрясения	Максимальное ускорение, м/с ²	Продолжительность воздействия t , с	Преобладающий период воздействия T , с
Bucharest (BU x) RO	1.901	21.950	1.440
Corralitos (CO x) USA	7.830	16.890	0.560
Kobe (KO x) JP	8.179	40.020	0.360
Northridge (NR x) USA	5.566	24.580	0.260
San Fernando (SF x)	11.480	20.460	0.380

2. Сравнение результатов расчетов.

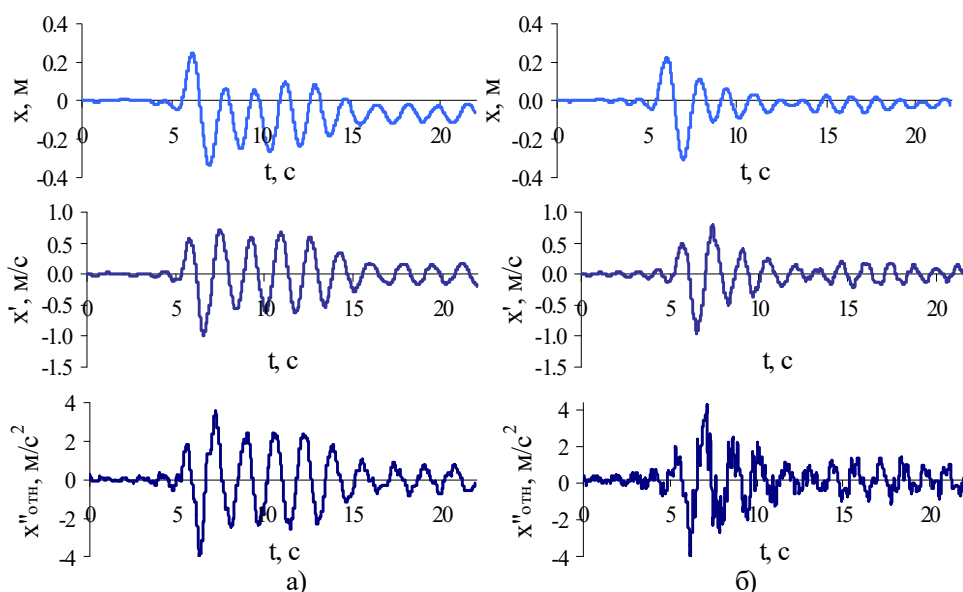


Рис. 6.22. Сравнение результатов, полученных по модели (2):
 а – с результатами, полученными по модели со многими степенями свободы
 б – для случая многоэтажного каркасного здания на воздействие ВU x.

**Сравнение результатов расчета модели со многими степенями свободы
с расчетом модели с одной степенью свободы**

Многоэтажное каркасное здание	Система с одной степенью свободы		Система со многими степенями свободы (центр масс здания)	
	max	min	max	min
BU x				
Перемещения, м	0.243	-0.339	0.224	-0.308
Скорости, м/с	0.720	-0.999	0.803	-0.949
Отн. ускорения, м/с ²	3.558	-4.018	4.110	-4.351
CO x				
Перемещения, м	0.153	-0.222	0.098	-0.206
Скорости, м/с	0.680	-1.017	0.839	-0.809
Отн. ускорения, м/с ²	5.833	-8.732	9.230	-9.043
КО x				
Перемещения, м	0.175	-0.355	0.191	-0.249
Скорости, м/с	1.415	-1.284	1.333	-1.280
Отн. ускорения, м/с ²	10.715	-8.295	12.739	-11.850
NR x				
Перемещения, м	0.347	-0.317	0.314	-0.319
Скорости, м/с	1.371	-1.022	1.458	-0.948
Отн. ускорения, м/с ²	8.317	-9.375	10.326	-9.220
SF x				
Перемещения, м	0.243	-0.158	0.140	-0.089
Скорости, м/с	0.875	-0.780	0.625	-0.724
Отн. ускорения, м/с ²	4.036	-8.173	6.894	-10.360

Основным результатом расчета по модели (6.33) является вычисление коэффициента пластичности (ductility):

$$\mu = \frac{u_{\max}}{u_T}, \quad (6.34)$$

где $u_{\max} = \max_t u$, $u_T = \frac{f_T}{\omega^2}$.

Если μ не превосходит предельных значений, то работа конструкции в пластической зоне допустима и не приводит к разрушению. В литературе есть ряд рекомендаций по выбору таких предельных значений [1]. Предельные значения K_μ (для различного типа конструкций), принятые в нормах США, приведены в [18]. Например, для стальных балок $\mu = 20$.

Модель (6.33) позволила построить кривые для выбора коэффициента редукиции сейсмических нагрузок K_1 на основе вышеуказанных нормативов. Такие исследования были выполнены в [11]. Построенные в [11] единые кривые для определения значений коэффициентов редукиции K_1 в зависимости от T и заданного уровня коэффициента пластичности μ приведены на рис. 6.22.

Функции K_1 - T - μ , получены в результате статистической обработки ансамбля решений (6.33) и сглаживания кривых, представляющих собой среднее значение K_1 плюс одно стандартное отклонение.

Кривые на рис. 6.23 являются развитием известных рекомендаций Ньюмарка [9], согласно которым:

$$K_1 = R_y, R_y = \begin{cases} 1 & T < 0,1 \text{ с} \\ \sqrt{(2\mu - 1)} & T = 0,1-0,5 \text{ с} \\ \mu & T > 0,5 \text{ с} \end{cases}$$

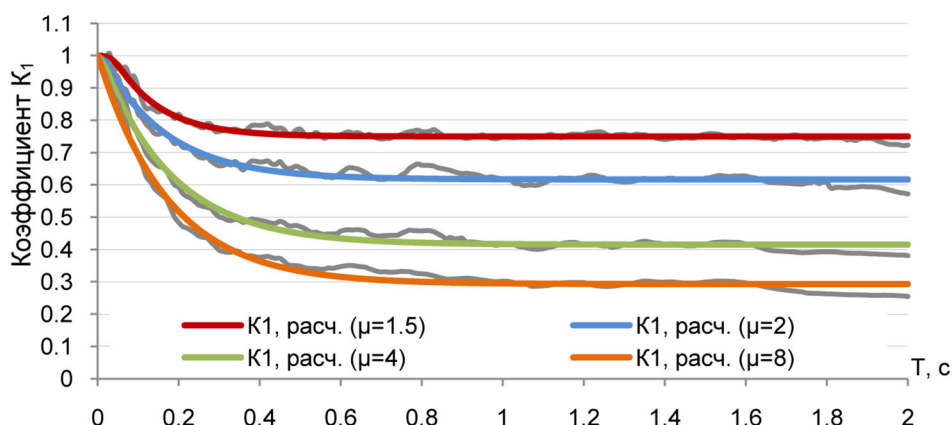


Рис. 6.23. Зависимость коэффициента редукиции сейсмических нагрузок K_1 от периода собственных колебаний T для заданных уровней коэффициента пластичности μ

6.6. Нелинейный статический анализ Pushover³

6.6.1. Область применения и цели. Преимущества и недостатки

Нелинейный статический метод (далее НСМ), встречающийся в зарубежных нормативных документах и руководствах по расчету сооружений на сейсмические воздействия под названием «*Nonlinear Static Pushover Analysis*», в настоящее время является популярным инструментом оценки сейсмостойко-

³ Примечание: параграф написан аспирантом А.Ю. Ивановым.

сти как существующих, так и проектируемых конструкций. Различные исследования подтверждают для определенных ситуаций адекватность результатов расчета, выполненных по данному методу. НСМ является удобным методом оценки несущей способности здания при землетрясении, дающий представление о его неупругой работе, которая главным образом зависит от принятого к расчету сейсмического воздействия и заданной зависимости «сила–перемещение» для несущих элементов модели здания при циклической нагрузке. Если для расчета на МРЗ окончательным решением на сегодняшний день, по сути, является нелинейный динамический анализ с использованием инструментальных или синтезированных акселерограмм, то НСМ представляется наиболее подходящим инструментом для проведения нелинейного расчета сооружения в тех случаях, когда нелинейный динамический анализ является слишком трудоемким для данной схемы, для оценки сейсмостойкости существующих зданий или, например, для сравнительного анализа сейсмостойкости разных вариантов сейсмического усиления здания, когда необходимо в сжатые сроки определить экономически оптимальный вариант.

НСМ представляет собой диаграммный метод расчета, берущий за исходные данные определяемую проектом несущую способность конструкции. Рассматриваемая конструкция будет иметь различные повреждения при различных сейсмических воздействиях, уровень которых и позволяет определить данный метод. Цель НСМ – спрогнозировать поведение конструкции путем определения требований по прочности и деформациям, предъявляемое некоторым сейсмическим воздействием с помощью статического неупругого расчета, и сравнить эти требования с несущими способностями интересующих уровней повреждаемости. Оценка основана на определении важных параметров того или иного уровня повреждаемости. Этими параметрами могут быть глобальные смещения, межэтажные перекосы, неупругие деформации элементов и т. п. Основой для проведения расчетов по НСМ является кривая несущей способности, на которой рассматриваемые уровни повреждаемости связаны с величинами этих параметров, зависящих от горизонтальной реакции в уровне поверхности земли (рис. 6.24).

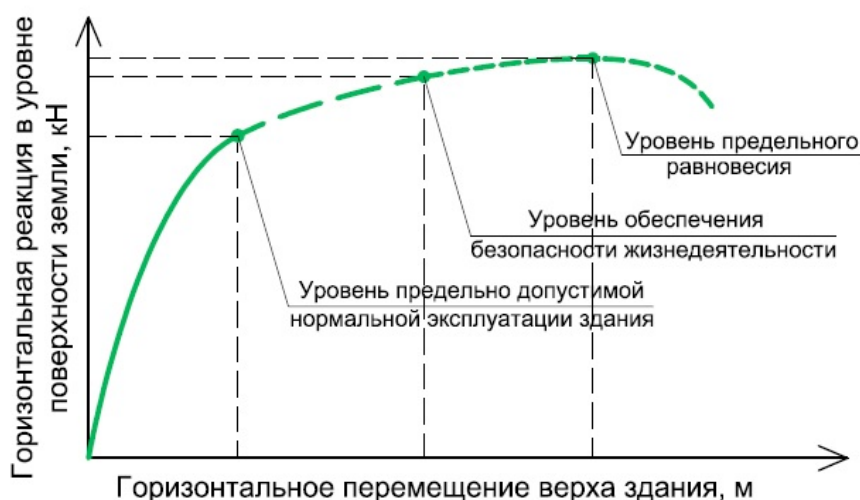


Рис. 6.24. Общий вид кривой несущей способности здания

Основные преимущества НСМ заключаются в том, что он:

а) позволяет использовать вместо труднодоступных акселерограмм спектр реакций, который в случае отсутствия дополнительных данных по площадке может быть принят по нормам;

б) требует значительно меньше вычислительного времени по сравнению с нелинейным динамическим анализом.

Главным недостатком НСМ является то, что он дает приемлемые результаты только если влияние высших форм колебаний конструктивной системы незначительно (для конструктивных схем с периодом первой формы менее 2 секунд).

6.6.2. Теоретическая основа НСМ

1. Одними из главных основоположников НСМ, как и идеи расчета зданий по рабочим характеристикам (*Performance-based Seismic Design*), по праву можно считать П. Фаджфара и Х. Крауинклера, которые наиболее эксплицитно изложили теоретическую базу НСМ в работах «Преимущества и недостатки *Pushover*-анализа при оценке сейсмостойкости» в 1998 году [18], а также «Нелинейный сейсмический анализ и проектирование железобетонных зданий» в 2005 году [19]. НСМ основан на допущении, что сейсмический отклик конструкции может быть соотнесен с откликом эквивалентной системы с одной степенью свободы. Это подразумевает, что откликом управляет одна форма колебаний, и что описывающая эту форму кривая остается постоянной в процессе колебаний системы. Очевидно, что такое допущение в общем случае некорректно, но лежащие в основе этой идеи расчеты исследования, проведенные рядом ученых, показали, что эти приближения приводят к достаточно хорошему прогнозированию максимального сейсмического отклика тех конструкций, который осуществляется преимущественно по одной форме. Исходя из сказанного полагается, что описывающая отклонение системы со многими степенями свободы кривая может быть представлена вектором формы $\{\Phi\}$, который принимается постоянным во всей временной области реагирования. Определяя соответствующий вектор перемещений системы со многими степенями свободы как $X = \{\Phi\} x_t$, где x_t – перемещение верха системы, основополагающее дифференциальное уравнение для системы со многими степенями свободы, представленное в [18], может быть записано в виде

$$M \{\Phi\} \ddot{x}_t + C \{\Phi\} \dot{x}_t + Q = -M \{1\} \ddot{x}_g. \quad (6.35)$$

где M и C – матрицы масс и демпфирования; Q – вектор внутренних (сейсмических) сил, действующих в пределах рассматриваемого уровня системы (этажа здания); \ddot{x}_g – ускорение поверхности земли; $\{1\}$ – единичный вектор. Если представить базисное перемещение системы с одной степенью свободы x^* как

$$x^* = \frac{\{\Phi\}^T M \{\Phi\}}{\{\Phi\}^T M \{1\}} x_t, \quad (6.36)$$

и умножить равенство (6.35) на $\{\Phi\}^T$, а также заменить x_t , используя выражение (6.36), получаем следующее дифференциальное уравнение для отклика эквивалентной системы с одной степенью свободы:

$$M^* \ddot{x}^* + C^* \dot{x}^* + Q^* = -M^* \ddot{x}_g, \quad (6.37)$$

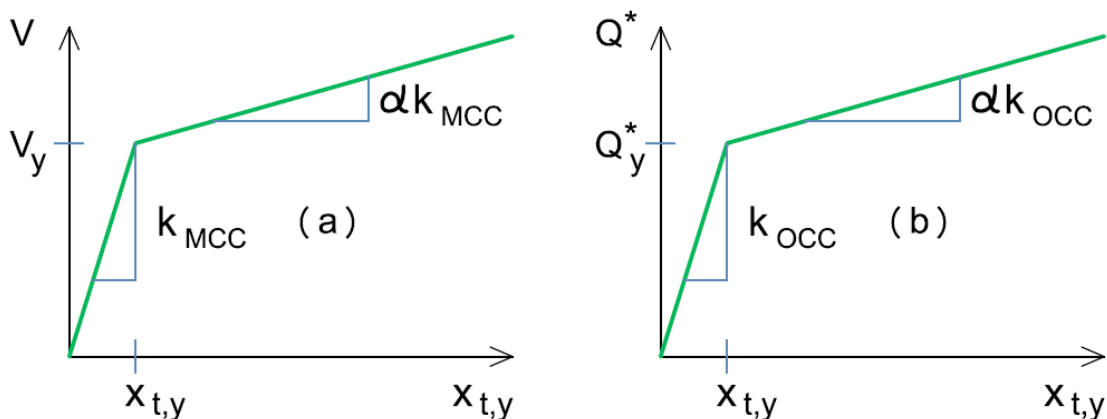
где M^* , Q^* и C^* описывают свойства эквивалентной системы с одной степенью свободы и равны

$$M^* = \{\Phi\}^T M \{1\},$$

$$Q^* = \{\Phi\}^T Q, \quad (6.38)$$

$$C^* = \{\Phi\}^T C \{\Phi\} \frac{\{\Phi\}^T M \{1\}}{\{\Phi\}^T M \{\Phi\}}.$$

Полагая, что вектор формы $\{\Phi\}$ известен, определяется силовая характеристика « $Q^* - x^*$ » эквивалентной системы с одной степенью свободы (рис. 6.25, а) на основании результатов статического расчета всей конструкции в физически нелинейной постановке. По результатам такого расчета строится кривая зависимости «Горизонтальная реакция в уровне поверхности земли (V) – Горизонтальное перемещение верха здания (δ_t)», аналогичная показанной на рис. 6.24, вид которой показан на рис. 6.26.



ОСС - система с одной степенью свободы
 МСС - система со многими степенями свободы

Рис. 6.25. Характеристики «сила – перемещение» для системы со многими степенями свободы (МСС) и эквивалентной системы с одной степенью свободы (ОСС)

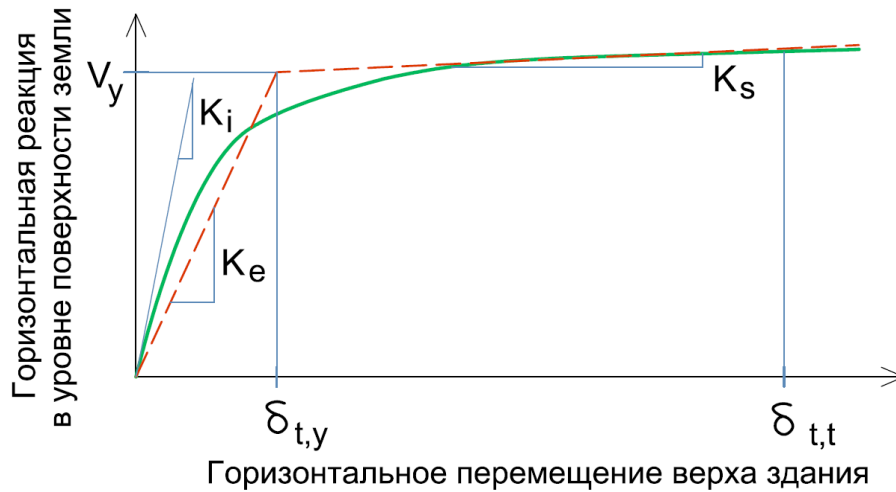


Рис. 6.26. Статический отклик «Горизонтальная реакция в уровне поверхности земли – Горизонтальное перемещение верха здания» для системы со многими степенями свободы

Для того, чтобы установить значения прочности и деформаций, построенную кривую зависимости « $V - \delta_t$ » необходимо привести к билинейному виду, что в дальнейшем позволит определить точку начала текучести V_y , эффективную упругую жёсткость $K_e = \frac{V_y}{\delta_{t,y}}$ и жёсткость упрочнения $K_s = \alpha K_e$

конструкции. Билинейная основа кривой несущей способности (рис. 6.25, а) необходима для определения характеристик эквивалентной системы с одной степенью свободы.

Величина горизонтальной реакции в уровне поверхности земли V_y , соответствующая пределу текучести и соответствующее ей значение горизонтального перемещения верха здания $x_{t,y}$, принятые по рис. 6.25, а, используются вместе с равенствами (6.37) и (6.38) для того, чтобы определить зависимость «сила–перемещение» для эквивалентной системы с одной степенью свободы:

$$x_y^* = \frac{\{\Phi\}^T M \{\Phi\}}{\{\Phi\}^T M \{1\}} x_{t,y} Q_y^* = \{\Phi\}^T Q, \quad (6.39)$$

где Q_y^* – вектор внутренних (сейсмических) сил, действующих в пределах рассматриваемого уровня системы (этажа) при начале текучести.

Период колебаний эквивалентной системы с одной степенью свободы T_{eq} может быть посчитан как

$$T_{eq} = 2\pi \left[\frac{x_y^* M^*}{Q_y^*} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.40)$$

Коэффициент деформации упрочнения α зависимости « $V - \delta_t$ » для системы со многими степенями свободы определяет соотношение жесткостей и при деформационном упрочнении системы с одной степенью свободы.

Теперь основные свойства эквивалентной системы с одной степенью свободы известны. Целью расчета по НСМ является поиск величины горизонтального перемещения системы, при котором реализуется определенный уровень ее повреждаемости. Оцениваемое горизонтальное перемещение служит для определения общего перемещения конструкции, ожидаемого при расчетном землетрясении. Наиболее приемлемым в качестве оцениваемого горизонтального перемещения является горизонтальное перемещение верха здания над его центром массы. Свойства эквивалентной системы с одной степенью свободы вместе со спектральными данными, полученными с учетом ее неупругой работы, дают необходимую информацию для определения оцениваемого горизонтального перемещения.

Горизонтальное перемещение верха здания x_t связано с перемещением эквивалентной системы с одной степенью свободы x^* уравнением (6.36). Следовательно, оцениваемое горизонтальное перемещение может быть найдено, если имеется возможность определить перемещение эквивалентной системы с одной степенью свободы при расчетном сейсмическом воздействии. Для упругой системы с одной степенью свободы такое перемещение определяется спектральным перемещением. Для неупругих систем с одной степенью свободы это перемещение должно быть получено с использованием неупругого спектра отклика. Для применения необходимых данных в случае неупругого спектра требуется оценка в виде отношения предела упругости к пределу текучести эквивалентной системы с одной степенью свободы, обычно задаваемая коэффициентом R . Так как неупругий спектр обычно строится для одномассовых систем, то для получения дифференциального уравнения эквивалентной одномассовой системы необходимо разделить уравнение (6.37) на M^* :

$$\ddot{x}^* + \frac{C^*}{M^*} \dot{x}^* + \frac{Q^*}{M^*} = -\ddot{x}_g. \quad (6.41)$$

Уравнение (6.41) описывает отклик одномассовой системы с периодом колебаний T_{eq} и пределом текучести $F_{y,eq}$, которая определяется по формуле

$$F_{y,eq} = \frac{Q_y^*}{M^*}. \quad (6.42)$$

Если известен упругий спектр отклика, предел упругости одномассовой системы может быть определен из зависимости

$$F_{e,eq} = S_a(T_{eq}), \quad (6.43)$$

где $S_a(T_{eq})$ – ордината упругого спектра ускорений. Тогда коэффициент редукиции R может быть получен из соотношения

$$R = \frac{F_{e,eq}}{F_{y,eq}} = \frac{S_a(T_{eq})M^*}{Q_y^*}. \quad (6.44)$$

Коэффициент R и оцениваемое горизонтальное перемещение зависят от выбора вектора формы $\{\Phi\}$. Рекомендуется использовать нормализованную эпюру перемещений с оцениваемым перемещением в качестве определяющего. Поскольку это перемещение заранее неизвестно, то, вообще говоря, требуется проводить итерационный расчет по выбранному вектору формы. Однако, как показали исследования, использование простого заранее определенного вектора формы (например, вектора, описывающего первую форму колебаний упругой системы) приводит к хорошим прогнозам оцениваемого горизонтального перемещения верха здания. При исследовании конструкций с гибкими этажами было выявлено, что использование вектора, описывающего прямолинейную форму отклонения, дает лучший прогноз горизонтального перемещения верха здания, чем использование вектора, описывающего криволинейную форму. Применение указанных упрощений облегчает вычисление свойств эквивалентной системы с одной степенью свободы и устраняет необходимость в итерациях.

Существует множество факторов, которые также оказывают влияние на точность прогнозов работы конструкции при расчетной сейсмической нагрузке, определяемой с помощью НСМ. К числу этих факторов должны быть в первую очередь отнесены способ оценки горизонтального перемещения и приложение горизонтальной статической нагрузкой на конструкцию, условно моделирующей расчетное землетрясение. Также существенное влияние могут оказывать принятое соотношение предела упругости к пределу текучести, снижение жесткости конструкции, снижение прочности материалов элементов конструкции, влияние « $P - \Delta$ » эффекта (влияние гравитационных нагрузок на систему, находящуюся в деформированном состоянии), влияние эффективного вязкого демпфирования и других факторов, описанных в [18].

6.6.3. Практическая основа НСМ

Применение НСМ для анализа работы сооружений регламентировано рядом зарубежных нормативных документов, например, АТС-40 [21], ASCE 41-43 [22], FEMA 440 [23], Eurocode 8 [24] и др. НСМ в этих нормативных документах реализован в виде различных подходов. В качестве основного

подхода рассмотрим метод спектра несущей способности, представленный в АТС-40 [21]. Приводится алгоритм вычислений по процедуре «А» МСНС. Существуют также и другие расчетные процедуры, которые в данном разделе не рассматриваются. Алгоритмы расчета по ним приведены в главе 8, АТС-40 и других источниках, регламентирующих применение НСМ.

Метод спектра несущей способности (МСНС) нацелен на нахождение горизонтального перемещения верха здания над центром масс, т. е. на поиск точки, в которой пересекаются спектр несущей способности и спектр расчетного сейсмического воздействия (расчетный спектр). Другими словами, полученное на пересечении этих спектров перемещение свидетельствует об адекватности деформированного состояния системы данному расчетному воздействию. При этом в элементах конструкции могут развиваться неупругие деформации, если воздействие имеет достаточную силу. Проявляется это в виде текучести отдельных конструктивных элементов в определенных сечениях, при этом при увеличении горизонтальной нагрузки усилия будут распределяться с перешедших в пластику элементов на другие, имеющие еще некоторый упругий запас прочности. Перераспределение усилий по элементам в соответствии с остатками резервов несущей способности в конечном счете приведет к образованию механизма из конструкции и потере ее общей устойчивости. По сути, расчет по НСМ должен показать, на каком этапе разрушения находится конструкция при рассматриваемом сейсмическом воздействии. Важной задачей является построение кривой несущей способности здания (рис. 6.24). Для ее построения могут быть использованы различные расчетные предпосылки и методы, имеющие адекватное теоретическое обоснование. Учитывая возможности современной компьютеризированной расчетной практики построение кривой несущей способности возможно путем проведения расчета трехмерной модели конструкции в физически нелинейной постановке.

Рассмотрим алгоритм вычислений:

1. Сейсмическое воздействие задается в виде спектра. Строится 5 % упругий спектр отклика на основании данных о сейсмической нагрузке для рассматриваемой площадки. Для расчета также может быть использован нормативный спектр.

2. Строится кривая несущей способности здания, которая имеет исходную размерность «Горизонтальная реакция в уровне поверхности земли – Горизонтальное перемещение верха здания». Для проведения расчета по МСНС необходимо произвести преобразование этой кривой, построенной для пространственной системы со многими степенями свободы, в спектр несущей способности эквивалентного осциллятора формата «Спектральное ускорение (ось ординат) – Спектральное перемещение (ось абсцисс)» (рис. 6.27).

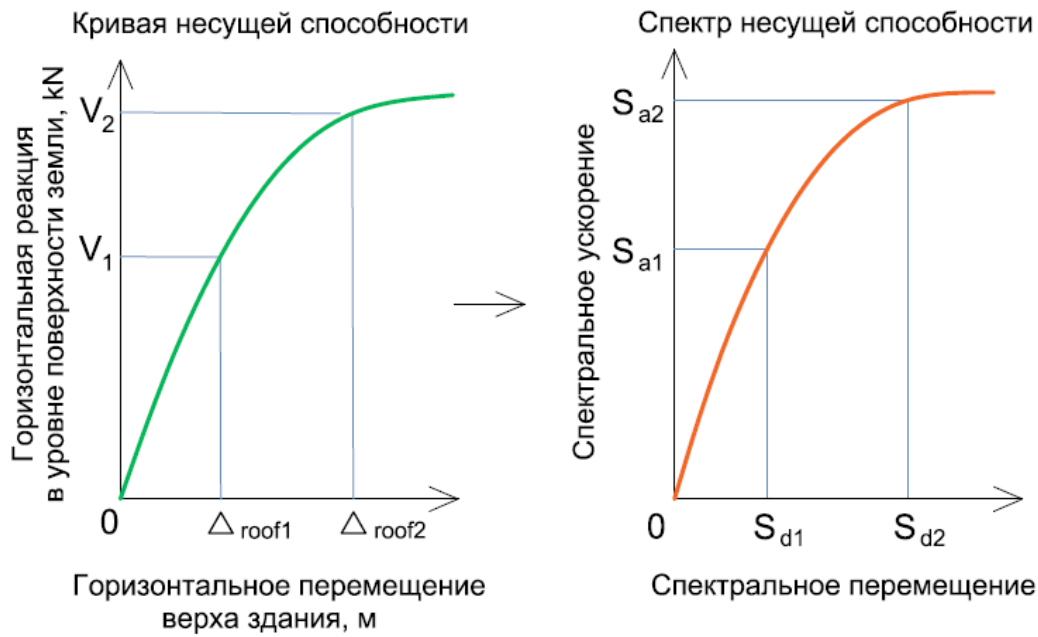


Рис. 6.27. Преобразование кривой несущей способности в спектр несущей способности

Такое преобразование необходимо для корректного наложения спектра несущей способности на спектр отклика, который строится для системы с одной степенью свободы. Для этого по характеристическим точкам на кривой несущей способности рассчитывается спектральное ускорение S_a и спектральное перемещение S_d

$$S_a = \frac{V}{W\alpha_1}, \quad (6.45)$$

$$S_d = \frac{\Delta_{roof}}{PF_1\varphi_{roof,1}}, \quad (6.46)$$

где PF_1 – коэффициент трансформации, определяемый как

$$PF_1 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{w_i}{g} \varphi_{i1}}{\sum_{i=1}^N \frac{w_i}{g} \varphi_{i1}^2}, \quad (6.47)$$

α_1 – коэффициент модальной массы, вычисляемый по формуле

$$\alpha_1 = \frac{\left[\sum_{i=1}^N \frac{w_i}{g} \varphi_{i1} \right]^2}{\left[\sum_{i=1}^N \frac{w_i}{g} \right] \left[\sum_{i=1}^N \frac{w_i}{g} \varphi_{i1}^2 \right]}. \quad (6.48)$$

В формулах (6.47) и (6.48) $\frac{W_i}{g}$ – масса i -й точки системы (уровня или этажа здания); φ_{i1} – амплитуда колебаний i -й точки системы (уровня или этажа здания) по первой форме колебаний; $\varphi_{roof,1}$ – амплитуда колебаний верхней точки системы (верхнего уровня или верхней точки последнего этажа здания) по первой форме колебаний; N – верхняя точка системы (верхний уровень или последний этаж здания); V – горизонтальная реакция в уровне поверхности земли; W – сейсмический вес здания (сумма постоянных и длительных нагрузок, действующих на здание в момент, когда происходит землетрясение); Δ_{roof} – горизонтальное перемещение верха здания.

На рис. 6.28 показано изменение коэффициента трансформации PF_1 и коэффициента модальной массы α_1 в зависимости от принимаемой схемы приложения сейсмических сил по высоте системы. При этом отклонение массы осциллятора на расстояние S_d связано с перемещением Δ_{roof} .

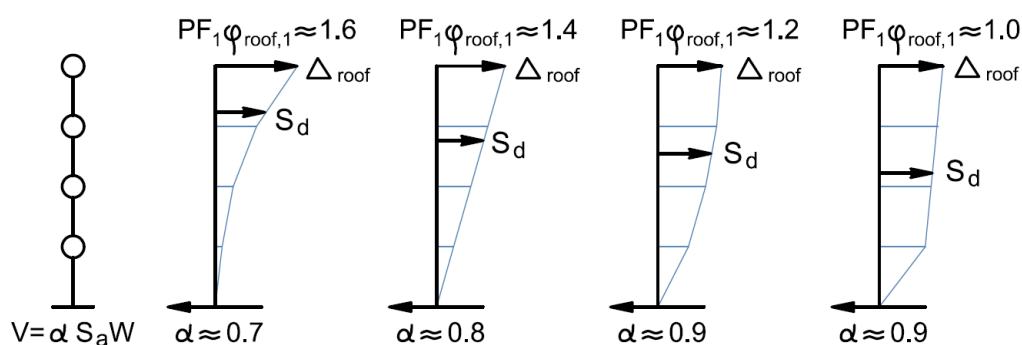


Рис. 6.28. Примерные значения коэффициента трансформации и коэффициента модальной массы

Упругий 5 % спектр отклика также должен быть преобразован в формат спектральных координат, в котором проведенные из начала координат линии характеризуются постоянным периодом (рис. 6.29).

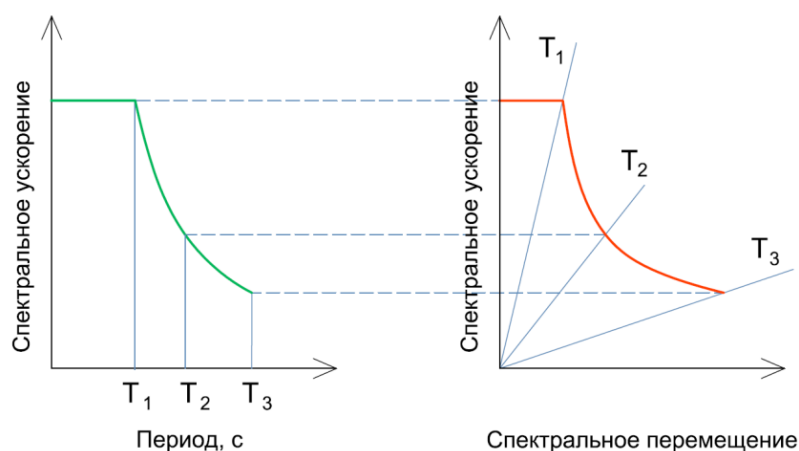


Рис. 6.29. Преобразование спектр отклика из традиционного формата в формат «Спектральное ускорение – Спектральное перемещение»

После произведенных преобразований (рис. 6.27, 6.29) спектр несущей и 5 % упругий спектр отклика могут быть построены на плоскости одной системы координат с обязательным соответствием порядков основных величин и соблюдением масштаба.

Предварительно назначается пробная точка состояния системы a_{pi} , d_{pi} (рис. 6.30), которая может быть выбрана на первом шаге исходя из допущения о равенстве упругого и пластического перемещений.

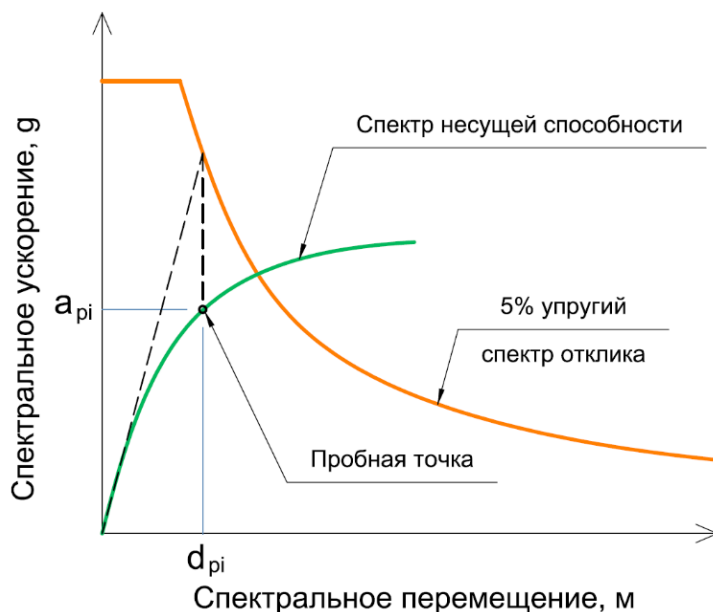


Рис. 6.30. Метод спектра несущей способности. Шаг 3

Характеризующая спектр несущей способности кривая должна быть аппроксимирована билинейной диаграммой, которая необходима для оценки эффективного затухания и последующего корректного редуцирования расчетного спектра воздействия. Для билинейного аппроксимирования спектра требуется определить точку a_{pi} , d_{pi} . Это точка является пробной. При этом, если в результате расчета оказывается, что в этой точке пересекаются спектр несущей способности и редуцированный расчетный спектр, то точка с этими координатами a_{pi} , d_{pi} соответствует искомому перемещению. На рис. 6.31 показан пример билинейного представления спектра несущей способности. Первую прямую билинейно представленного спектра, характеризующую начальную жесткость системы $K_{нач}$, необходимо провести через начало координат. Далее проводится вторая прямая через пробную точку a_{pi} , d_{pi} таким образом, чтобы ее пересечение с первой прямой в точке a_y , d_y давало равные площади A_1 и A_2 , заключенные между спектром несущей способности и его билинейной основой (рис. 6.31).

Физический смысл таких геометрических построений заключается в том, чтобы добиться равенства энергий, соответствующих площадям E_{S0} и E_D , получаемым на основании прямых билинейной основы.

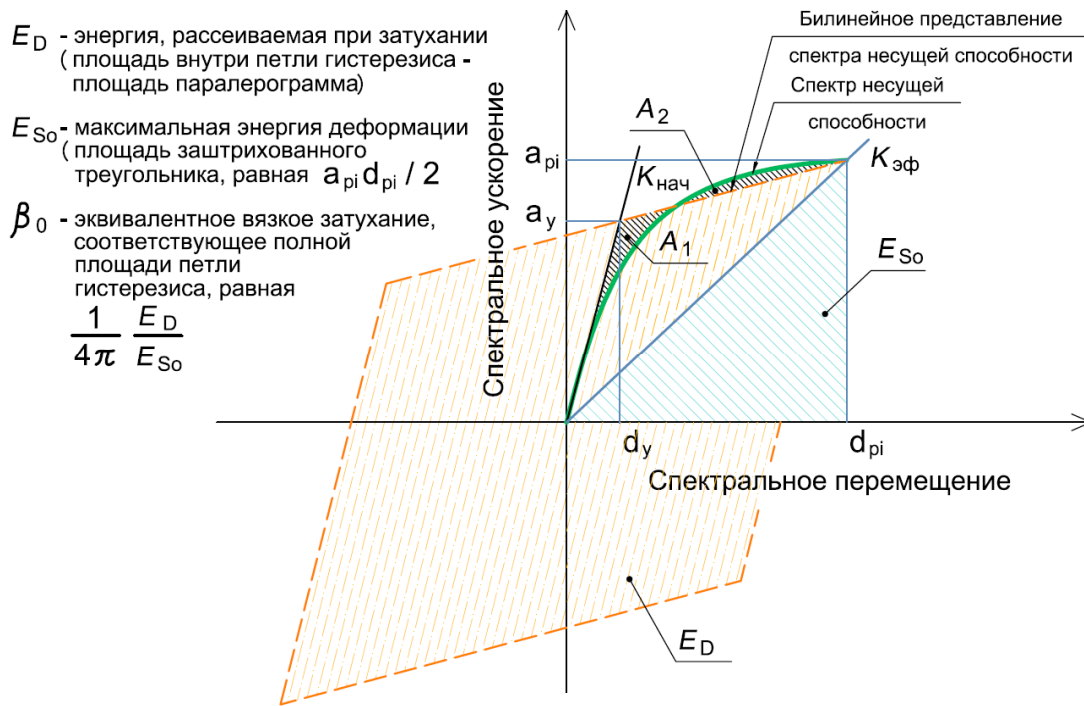


Рис. 6.30. К построению билинейной диаграммы и определению затухания для редуцирования спектра воздействия: E_{S0} E_D β_0

Определяется эквивалентное вязкое затухание (в процентах от критического):

$$\beta_{eq} = \beta_0 + 5 = \frac{63,7(a_y d_{pi} - d_y a_{pi})}{a_{pi} d_{pi}} + 5, \quad (6.49)$$

где

$$\beta_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{E_D}{E_{S0}} = \frac{63,7(a_y d_{pi} - d_y a_{pi})}{a_{pi} d_{pi}}. \quad (6.50)$$

Это затухание, как видно из формулы (6.49), будет больше, чем 5 %, однако его значение не рекомендуется принимать более 30 %.

Рассчитывается эффективное вязкое затухание

$$\beta_{eff} = k\beta_0 + 5 = \frac{63,7k(a_y d_{pi} - d_y a_{pi})}{a_{pi} d_{pi}} + 5. \quad (6.51)$$

Здесь коэффициент k характеризует соотношение реального гистерезиса здания к идеализированному параллелограмму, представленного на рис. 6.30. Коэффициент k зависит от работы конструктивной системы (каркаса) здания при динамических нагрузках и определяется по табл. 6.14.

Определение значений коэффициента κ

Характер работы конструктивной системы	β_0 (проценты)	κ
Тип А	$\leq 16,25$	1,0
	$> 16,25$	$1,13 - \frac{0,51(a_y d_{pi} - d_y a_{pi})}{a_{pi} d_{pi}}$
Тип Б	≤ 25	0,67
	> 25	$0,845 - \frac{0,446(a_y d_{pi} - d_y a_{pi})}{a_{pi} d_{pi}}$
Тип С	любое значение	0,33

К типу А относятся здания, затухание которых под динамической нагрузкой может быть охарактеризовано петлей гистерезиса, максимально приближенной к идеализированной (рис. 6.31). Коэффициент κ при этом равен 1 кроме некоторых случаев, когда затухание велико. Типу Б соответствует основное значение κ , равное $2/3$, что представляет собой умеренную редукцию площади. Тип С представляет слабый гистерезис с существенной редукцией площади петли (сильно сжатой), коэффициент κ в этом случае принимается равным $1/3$. Пределы изменения коэффициента κ в зависимости от β_0 наглядно продемонстрированы на рис. 6.32.

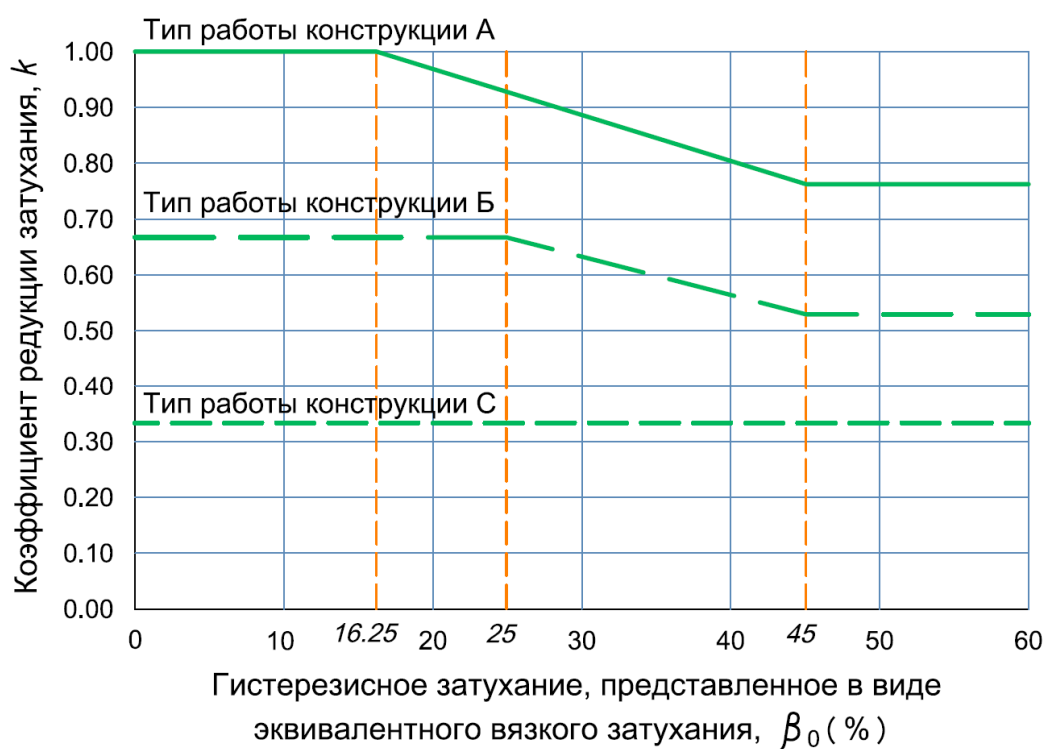


Рис. 6.32. Коэффициент редукции затухания, κ , для типов работы конструкции А, Б и С

3. Рассчитываются коэффициенты SR_A и SR_V , понижающие заданный спектр отклика (рис. 6.33). SR_A представляет собой коэффициент, понижающий диапазон постоянных значений спектрального ускорения. SR_V – понижающий коэффициент для диапазона постоянных значений спектральных скоростей. Коэффициенты C_A и C_V вычисляются по формулам

$$C_A = 0,4S_{MS} \text{ и } C_V = S_{M1}, \quad (6.52)$$

где S_{MS} – спектральное ускорение короткопериодного диапазона спектра; S_{M1} – спектральное ускорение для периода, равного 1 с.

В соответствии с предписаниями [18] равенства, определяющие значения C_A и C_V , в общем случае варьируются в зависимости от свойств грунтов площадки.

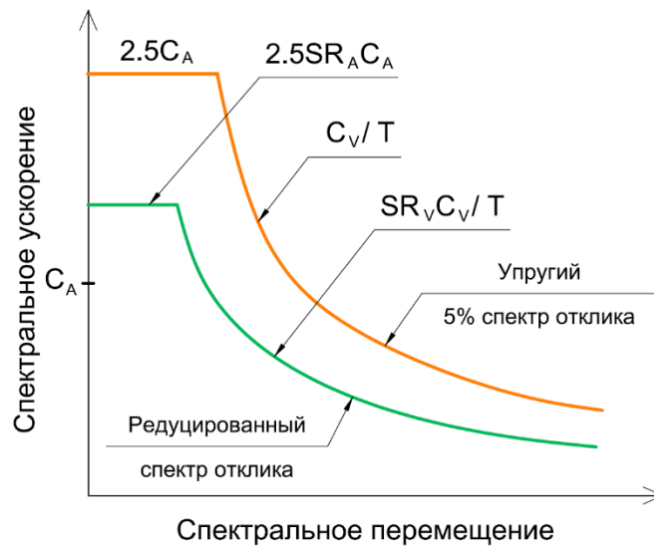


Рис. 6.33. Редуцированный спектр отклика

Значения SR_A и SR_V определяются по формулам

$$SR_A = \frac{3,21 - 0,68 \ln \left[\frac{63,7 \kappa (a_y d_{pi} - d_y a_{pi})}{a_{pi} d_{pi}} + 5 \right]}{2,12}, \quad (6.53)$$

$$SR_V = \frac{2,31 - 0,41 \ln \left[\frac{63,7 \kappa (a_y d_{pi} - d_y a_{pi})}{a_{pi} d_{pi}} + 5 \right]}{1,65}. \quad (6.54)$$

Коэффициенты, вычисленные согласно (6.53) и (6.54) должны быть не ниже значений, приведенных в табл. 6.15. Полученный таким образом редуцированный спектр является расчетным.

Минимально допустимые значения SR_A и SR_V

Характер работы конструктивной системы	SR_A	SR_V
Тип А	0,33	0,50
Тип Б	0,44	0,56
Тип С	0,56	0,67

4. Проверяется, пересекаются ли спектр несущей способности и расчетный спектр в точке a_{pi}, d_{pi} (рис. 6.34) с допуском $0,95d \leq d_i \leq 1,05d_{pi}$.

5. Если спектр несущей способности и расчетный спектр не пересекаются в рамках указанного допуска, выбирается новая точка a_{pi}, d_{pi} и процедура возобновляется с шага 4. При этом в качестве новой a_{pi}, d_{pi} точки принимается точка пересечения спектров, полученная на шаге 6 (рис. 6.34).

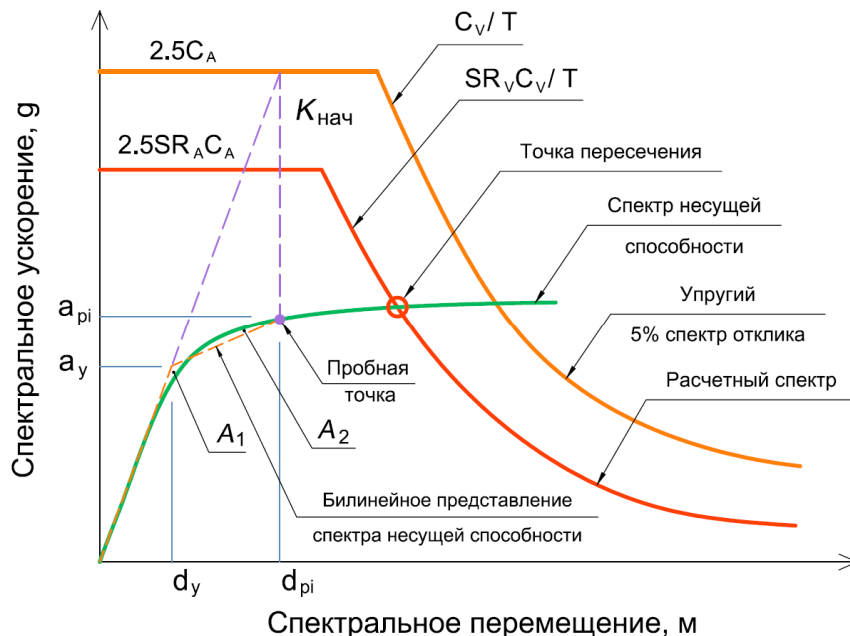


Рис. 6.34. Метод спектра несущей способности. Шаг 6

6. Если расчетный спектр пересекает спектр несущей способности в рамках указанного допуска, то последняя пробная точка a_{pi}, d_{pi} является искомой точкой состояния системы a_p, d_p и спектральное перемещение d_i соответствует наибольшему ожидаемому при рассматриваемом сейсмическом воздействии перемещению этой системы.

Необходимо помнить, что полученное окончательное значение перемещения является спектральным S_d и должно быть преобразовано в формат для системы со многими степенями свободы по формуле

$$d = PF_1 \cdot \varphi_{i1} \cdot S_d. \quad (6.55)$$

Список литературы

1. *Бирбраер А. Н.* Экстремальные воздействия на сооружения / А. Н. Бирбраер, А. Ю. Роледер – СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2009. – 593 с.
2. *Бирбраер А. Н.* Расчет конструкций на сейсмостойкость / А. Н. Бирбраер. – СПб.: Наука, 1998. – 255 с.
3. *Завриев К. С.* Расчет инженерных сооружений на сейсмостойкость / К. С. Завриев. – Изд-ва Тифлиского политех. ин-та, 1928.
4. *Клаф Р.* Динамика сооружений: пер. с англ. / Р. Клаф, Д. Ж. Пензиен. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
5. *Корчинский И. Л.* Сейсмостойкое строительство зданий: учеб. пособие для вузов / И. Л. Корчинский. – М.: Высшая школа, 1971 – 320 с.
6. *Масленников А. М.* Расчет конструкций при нестационарных воздействиях. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1991. – 164 с.
7. *Медведев С. В.* Инженерная сейсмология / Гос. изд-во по строительству и архитектуре. – М., 1962. – 284 с.
8. *Назаров А. Г.* Метод инженерного анализа сейсмических сил / Ереван, АН Армянской ССР, 1959. 260 с.
9. *Ньюмарк Н.* Основы сейсмостойкости строительства / Н. Ньюмарк, Э. Розенблют; пер. с англ. Г. Ш. Подольского; под. ред. Я. М. Айзенберга. – М.: Стройиздат, 1980. – 344 с.
10. *Поляков С. В.* Сейсмостойкие конструкции зданий: учеб. пособие для вузов, 2-е изд. / С. В. Поляков. – М.: Высшая школа, 1983. – 304 с.
11. *Симборт Э.* Методика выбора коэффициента редукации сейсмических нагрузок K1 при заданном уровне коэффициента пластичности μ // Инженерно-строительный журнал. – 2012. – № 1 (27). С. 44–52.
12. *Симборт Э.* Определение коэффициента редукации с учетом динамических характеристик сейсмических воздействий: дис. ... канд. техн. наук / Э. Симборт. – СПб.: СПбГАСУ, 2012. – 144 с.
13. СП 14.13330.2018 (актуализированная редакция СНиП-11-7-81) / – М. Минстрой России, 2018.
14. Справочник проектировщика. Динамический расчет сооружений на специальные воздействия / под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1981. – 215 с.
15. *Уздин А. М.* Основы теории сейсмостойкости и сейсмостойкого строительства зданий и сооружений / А. М. Уздин, Т. А. Сандович, М. С. Аль-Насер. – СПб.: Изд-во ВНИИГ, 1993.
16. *Хачиян Э. Е.* Расчет сооружений на сейсмостойкость по акселерограммам сильных землетрясений / Э. Е. Хачиян // Известия АН Армянской ССР, т. 15. – 1962. – № 5. – 36 с.
17. *Чылбак А. А.* Расчет и рациональное проектирование сейсмозащиты для существующих и вновь строящихся зданий: дис. ... канд. техн. наук / А. А. Чылбак. – СПб.: СПбГАСУ, 2009. – 144 с.
18. *Biot M. A.* Mechanical Analysis for The Prediction of Earthquake Stresses // Bulletin of the Seis. Soc. of America. – Vol. 31, № 2. – 1941.
19. *Fajfar P., Krawinkler H.* Nonlinear seismic analysis and design of reinforced concrete buildings // Elsevier Science Publishers. – 2005.
20. *Krawinkler H., Seneviranta G. D.* Pros and cons of a pushover analysis of seismic performance evaluation // Engineering Structures. – 1998. – № 20 (4). – Pp. 452–464.
21. Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings // Applied Technology Council. – Vol. 1: ATC-40 Report. – RedwoodCity, California, 1996. – 334 p.
22. ASCE/SEI Standard 41-13. Seismic Evaluation and of Retrofit of Existing Buildings / Structural Engineering Institute, American Society of Civil Engineers, 2014.

23. FEMA 440. Improvement of nonlinear static seismic analysis procedures / Federal Emergence Managment Agency. – Washington, DC, 2005.
24. EC8. Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance / European Committee for Standardisation: Brussels, Belgium, The European Standard EN 1998-1, 2004.

Глава 7. СЕЙСМОЗАЩИТА

Не слышно на нем капитана,
Не видно матросов на нем;
Но скалы, и тайные мели,
И бури ему нипочем.

М. Ю. Лермонтов «Воздушный корабль»

7.1. Введение

Примеры разрушительных землетрясений, унесших жизни тысяч людей и нанесших огромный урон экономике пострадавших стран, говорят о необходимости создания специальных средств сейсмозащиты для предотвращения таких катастрофических последствий (рис. 7.1).



Рис. 7.1. Последствия землетрясения. Китай. 2008 г. (источник: www.lenta.ru)

Идеи сейсмозащиты очень древны. Еще римляне устанавливали в Коллизее свинцовые маятники – прототип динамического гасителя колебаний. Сейсмоизоляция (снижение сейсмических воздействий) была реализована еще в средние века. Например, при строительстве среднеазиатских минаретов в фундаменты укладывались специальные «камышовые пояса» или подушки из сыпучего материала. В 20-х годах прошлого века начался очень активный период развития сейсмозащиты [18, 25, 34]. В 1925 г. Вискордини М. описал конструкции катковых сейсмоизолирующих опор и опорных колонн со сферическими верхними и нижними торцами. В дальнейшем стали развиваться другие средства сейсмозащиты: динамические гасители колебаний, адаптивные системы (системы с включающимися и выключающимися связями).

Один из основных способов обеспечения сейсмозащиты – применение системы сейсмоизоляции (ССИ). Суть этой системы в том, что защищаемое сооружение устанавливается на различного рода упруго-демпферные опоры

(рис. 7.2), кинематические опоры (рис. 7.4), маятниковые подвески (рис. 7.5) и т. д., с помощью которых уменьшается сейсмическое воздействие.



Рис. 7.2. Примеры различных типов упругих и демпферных опор

В данной главе рассмотрены принципы, основные конструктивные схемы и методы расчета системы «защищаемый объект – сейсмоизоляция» («ЗО–СИ»). Другие способы сейсмозащиты рассмотрены в следующей главе.

При применении ССИ снижение нагрузок на защищаемый объект (ЗО) может быть осуществлено на базе следующих принципов:

а) созданием, с помощью элементов ССИ, низкой собственной частоты системы «ЗО–СИ»;

б) применением в ССИ элементов, ограничивающих уровень усилия передаваемого на ЗО (пластически деформируемые или фрикционные элементы).

В существующих конструкциях ССИ указанные принципы используются или порознь, или в сочетании.

В основном, используют 1-й принцип: систему «ЗО – СИ» делают низкочастотной. В этом случае высокочастотные составляющие сейсмического

воздействия, если их частоты значительно выше собственной частоты системы «ЗО–СИ», имеют коэффициенты динамичности ниже единицы (см. п. 3.2–3.3). Это обстоятельство приводит к снижению внешней нагрузки. Так как основная энергия внешнего воздействия содержится в этих высокочастотных составляющих, а их уровень снижается за счет ССИ, то говорят о фильтрации энергосодержащих частот внешнего воздействия.

Низкая частота системы «ЗО–СИ» может быть реализована либо использованием в сейсмоопорах элементов с малой жёсткостью (пружин, резинометаллических устройств и т. д.), либо «гравитационным» методом (кинематические опоры). Последний заключается в том, что ЗО ставится на кегельные или скользящие по сферической поверхности опоры, и во время землетрясения ведёт себя как низкочастотный маятник. Возможно также создание системы «ЗО – маятниковые тяги» в виде обычного маятника.

Низкочастотная ССИ невозможна без диссипации энергии, т. е. без демпфирующих элементов, которые должны исключить резонансные явления при совпадении какой-либо частотной составляющей воздействия с частотой системы «ЗО–СИ». Такими элементами обычно являются либо вязкие демпферы; либо пластические демпферы (ПД).

Описание принципов работы различных средств сейсмозащиты содержатся, например, в [3, 25, 29, 35]. Наибольшую опасность представляет горизонтальное сейсмическое воздействие. Поэтому, в первую очередь, ССИ разрабатывались для защиты от горизонтальных воздействий. Создание ССИ для защиты сооружений как в горизонтальном, так и в вертикальном направлении является актуальной задачей, которая еще не решена.

Ниже описаны основные конструктивные схемы сейсмоизоляции. Все они (кроме маятника Зеленькова Ф. Д.) осуществляют защиту лишь в горизонтальном направлении.

7.2. Конструктивные решения систем сейсмоизоляции

1. Здания с гибким нижним этажом. Наиболее типичным приемом устройства сейсмоизоляции являются здания с гибким нижним этажом, использованные в практике строительства в 30-х годах прошлого века в СССР, Югославии, США, Румынии и других стран. Работы в этой области были направлены на снижение сейсмических нагрузок путем повышения периода основного тона колебаний (понижения собственной частоты) здания. Реальное воплощение эти идеи начали получать в 30-х годах прошлого века. Это были здания с первым гибким этажом. Но низкочастотная система без сильного демпфирования (каковой явились эти здания) опасна. В частотном спектре акселерограмм землетрясений содержатся воздействия с частотами до $0.5 \div 0.25$ Гц. В зоне таких землетрясений возможны катастрофические разрушения низкочастотных зданий. Поэтому такая система сейсмозащиты может применяться в районах, для которых прогнозируется землетрясения, с преобладающим периодом ускорений не более 1 с.

Особенности поведения зданий с гибкой нижней частью описаны, в [1], [19]. Существуют различные варианты конструктивного исполнения

гибкого нижнего этажа. Так, гибкий этаж может быть выполнен в виде каркасных стоек, упругих опор, свай и т. п. В [1] было предложено в качестве материала колонн нижних этажей использовать пластичную сталь.

2. Конструкции маятникового типа. Одной из первых в мире конструкций маятникового типа является фундамент-амортизатор, разработанный Зеленьковым Ф. Д., в основу работы которого положены два принципа: колеблющийся маятник с точкой подвеса и рессорный амортизатор, служащий для гашения сейсмической энергии вертикальных сейсмических воздействий. Предлагаемая конструкция (рис. 7.3, в) представляет собой одноэтажную железобетонную раму со стойками 1 и ригелями 2, причем в ригеле 2 имеются отверстия, через которые пропущены стальные подвески 3, опирающиеся на рессоры 4, на тягах подвешивается ранд-балка, на которую опирается стена здания. Этот фундамент был реализован при строительстве жилого дома в г. Ашхабаде в 1959 году.

Примером подвесных маятниковых конструкций также является конструкция свайного фундамента, предложенная Кочегаровым Б. И. и представленная на рис. 7.3, а. Маятниковая конструкция сейсмоизоляции осуществляется путем подвески ростверка 1 посредством металлических тяг 2 к консоли сваи 3.

В подвесной конструкции здания, разработанный Корчинским И. Л. (рис. 7.3, б) повышение его сейсмостойкости достигается при использовании амортизаторов 1, размещенных в местах крепления подвесок 2 к двухконсольным фермам 3 или в местах опирания их на опорный ствол 4. Амортизаторы могут быть выполнены в виде рессор, спиральных пружин и т. п. в сочетании с резиной или какими-либо другими упругими элементами.

Маятниковая сейсмоизоляция была также разработана в ОАО «Конструкторское бюро специального машиностроения» (КБСМ) [4, 23] – рис. 7.4, 7.5. Внешне ССИ КБСМ является набором отдельных опор. Маятниковый подвес содержится в каждой из опор. В каждой опоре есть две жесткие рамные конструкции. Верхняя рама «вставлена» в нижнюю. Рамы соединены между собой маятниковой тягой со сферическими подшипниками (или карданными устройствами). На опорные узлы верхней рамы садятся опорные узлы здания. Опорные узлы нижней рамы устанавливаются на фундамент. Таким образом, в целом данная конструкция работает как маятник, на конце которого расположен ЗО.

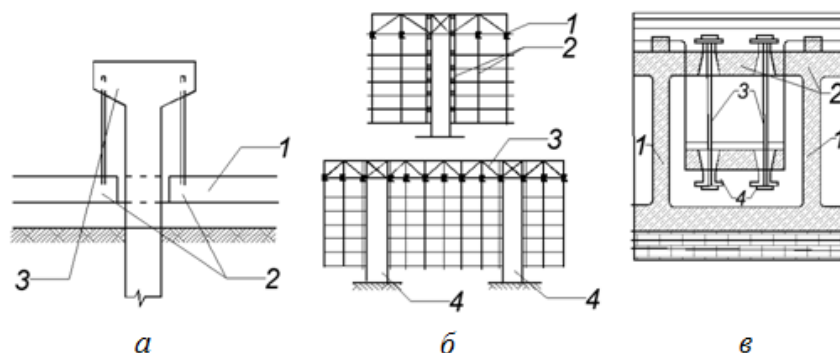


Рис. 7.3. Примеры подвесных конструкций: а – подвеска ростверка к консолям свай; б – подвесное здание; в – фундамент-амортизатор Зеленькова Ф. Д.

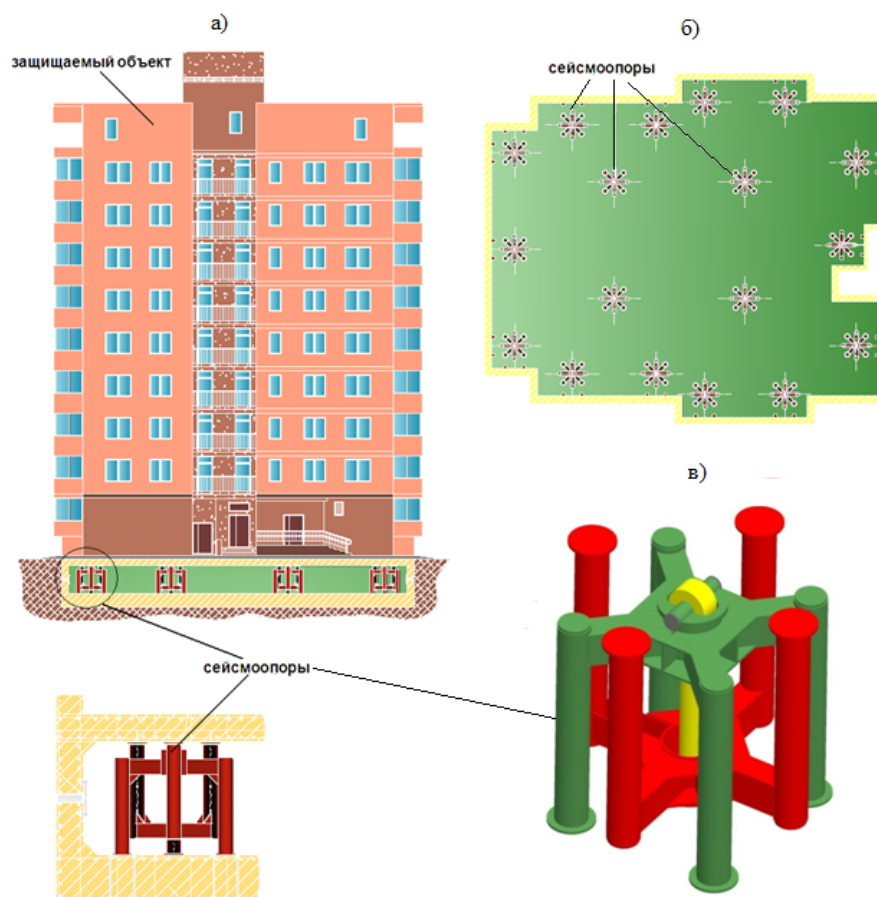


Рис. 7.4. Система сейсмоизоляции, разработанная КБСМ:
a – здание, расположенное на СИО; *б* – вид сверху; *в* – 3D модель СИО

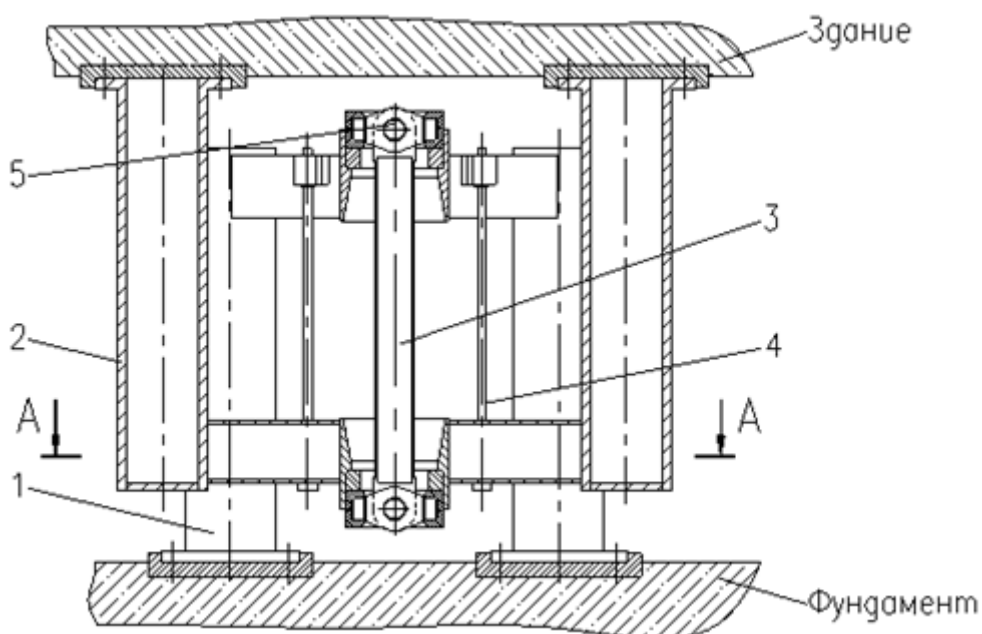


Рис. 7.5. Схема работы опоры маятникового типа с шарнирным узлом в виде сферических гайки и шайбы: 1 – опорная рама, соединенная с фундаментом; 2 – опорная рама соединенная со зданием; 3 – маятниковая тяга; 4 – демпфирующий стержень; 5 – сферическая гайка; 6 – сферическая шайба

3. Сейсмоизоляционные устройства гравитационного типа. Здания на гравитационных кинематических опорах на территории СССР были построены в Севастополе, Навои, Алма-Ате, Петропавловске-Камчатском. Примеры конструкций сейсмоизоляции гравитационного типа представлены на рис. 7.6, 7.7. Принцип работы таких конструкций состоит в том, что во время землетрясения центр тяжести опор поднимается, в результате образуется гравитационная восстанавливающая сила. Таким образом, гравитационные опоры являются развитием идеи маятниковых опор. Колебания здания происходят около положения равновесия и их начальная частота и период будут зависеть от геометрических размеров используемых опор [31, 32].

В конструкции (рис. 7.6) элементы подвижной связи 1 выполнены в виде цилиндра, имеющего, по крайней мере, один плоский торец 2 и установленного в углублениях 3, 4, образованных в опорных частях.

Предлагаемое решение позволяет увеличить площадь передачи нагрузки на опорные части и тем самым, уменьшить возникающие напряжения в зоне контакта подвижных элементов с опорными частями.

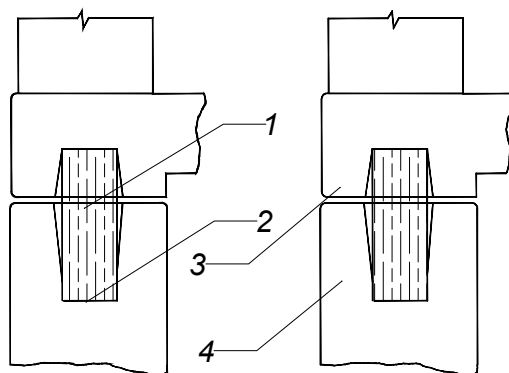


Рис. 7.6. Пример устройства гравитационного типа в виде цилиндра:
1 – цилиндр; 2 – плоский торец; 3, 4 – верхний и нижний опорные части

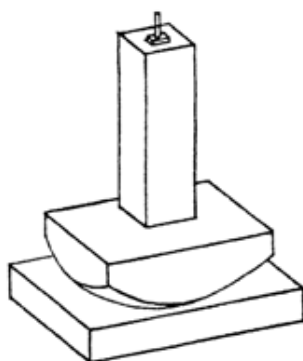


Рис. 7.7. Кинематические опоры фундамента, разработанные Черепинским Ю. Д.

На рис. 7.7 приведена кинематическая опора фундамента Черепинского Ю. Д. Здания на таких опорах построены в г. Алма-Ате и г. Петропавловске-

Камчатском, однако необходимо отметить, что построенные фундаменты этого типа не имеют специальных демпфирующих устройств и при длиннопериодных воздействиях силой более 8 баллов возможно падение здания с этих опор. Это указывает на опасность применения фундаментов на кинематических опорах, если в них не предусмотрены дополнительные демпфирующие элементы

Одним из наиболее эффективных средств сейсмоизоляции являются FrictionPendulum™ – маятники трения – рис. 7.8, 7.9. Сейсмоизоляционные опоры скользящего типа (FrictionPendulum™ – маятники трения) устанавливаются между ЗО и фундаментом и создают маятниковый эффект: конструкция, установленная на такие опоры, при движении фундамента ведет себя как маятник. Подшипник W скользит по сферической поверхности. Когда подшипник выше нижней точки этой поверхности, возникает восстанавливающая сила. «Длина» маятника – это радиус кривизны R сферической поверхности. Период маятника $T = \sqrt{R/g}$.

Демпфирование выбирается выбором коэффициента трения. Ротационные движения конструкции минимизированы, поскольку центр жесткости подшипников автоматически совпадает с центром массы поддерживаемой конструкции. При проектировании период маятника, грузоподъемность, демпфирование, предельные смещения могут выбираться независимо.

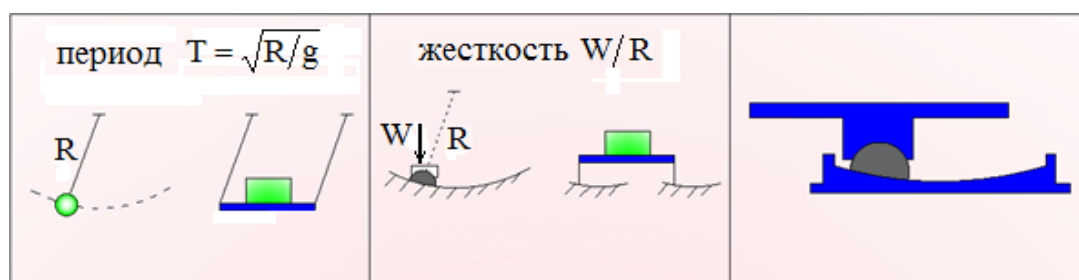


Рис. 7.8. FrictionPendulum™ – маятники трения: а – движение маятника; б – движение скользящего маятника; в – работа с одним маятником

Такие ССИ разрабатывают фирмы «Earthquake Protection Systems», «FIP Industriale», «Maurer».



Рис. 7.9. Шаровая опора для моста Venicia-Martenez в Калифорнии размером 3,73 м с ходом $\pm 1,34$ м

4. Резинометаллические сейсмоопоры. Прорыв в создании эффективных, компактных и сравнительно недорогих ССИ произошел в конце прошлого века, Робинсоном и Келли [37, 39], а затем и рядом других ученых и инженеров, было найдено удачное сочетание эластичных материалов с металлическими пластинами. Это позволило создать очень податливые упругие опоры, существенно повысив их диссипативные свойства. В результате были созданы резинометаллические опоры (РМО) которые получили широкое распространение как за рубежом (в Японии, Китае, Новой Зеландии, США, Италии и других странах), так и в России. Существует целый ряд зарубежных фирм, которые разрабатывают и изготавливают такие системы очень разнообразной номенклатуры и высокого качества. Лидерами являются фирмы: «FIP Industriale», «Robinson Seismic» «Earthquake Protection Systems», «Dymanic Isolation Systems», «Scougal Rubber», и другие.

Одним из основных типов таких сейсмоопор являются РМО на основе упругих полимеров серии SI. Они представляют собой армированные резиновые опорные конструкции, изготовленные из чередующихся слоёв стальных пластин и вулканизированной горячим способом резины. Резиновые соединения, используемые в производстве РМО на основе упругих полимеров серии SI, характеризуются динамическим модулем сдвига $G_{дин}$ (0,4 – 1,4 МПа) и демпфированием, эквивалентным коэффициенту относительного демпфирования, равному от 10 % до 15 %. Выбор делает инженер, разрабатывающий конструкцию. Однако такого демпфирования не хватает. Поэтому часто для увеличения демпфирующих свойств РМО используют свинцовый сердечник – рис. 7.10.

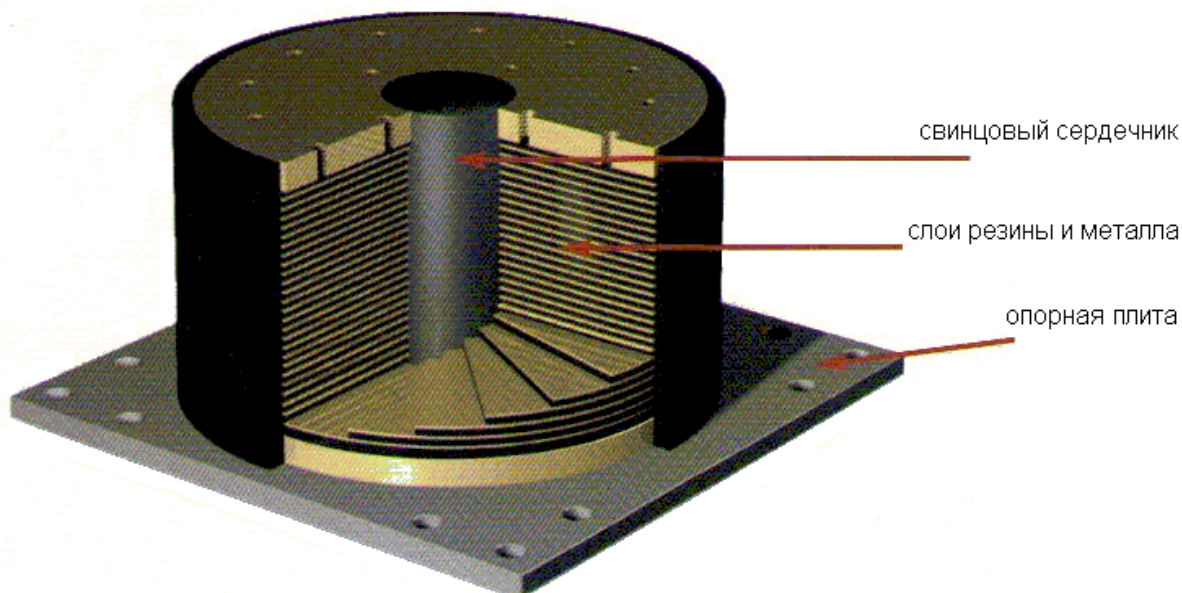


Рис. 7.10. Структура резинометаллической опоры

Некоторые конструктивные примеры резинометаллических опор представлены на рис. 7.11 – 7.14.

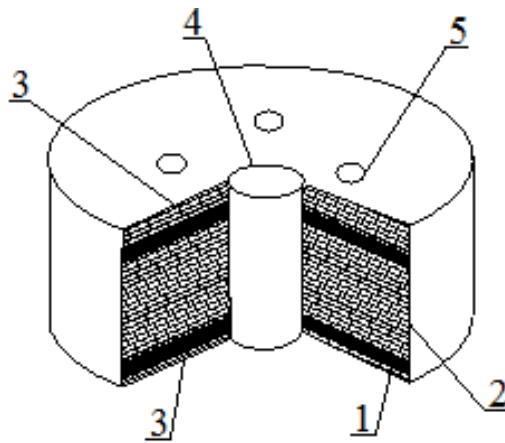


Рис. 7.11. Конструктивная схема сейсмоизолирующей опоры типа LRB (фирма Ойлес):
 1 – резиновая прокладка; 2 – внутренние прокладки из стального листа;
 3 – крайние прокладки из стального листа; 4 – свинцовый сердечник; 5 – отверстие

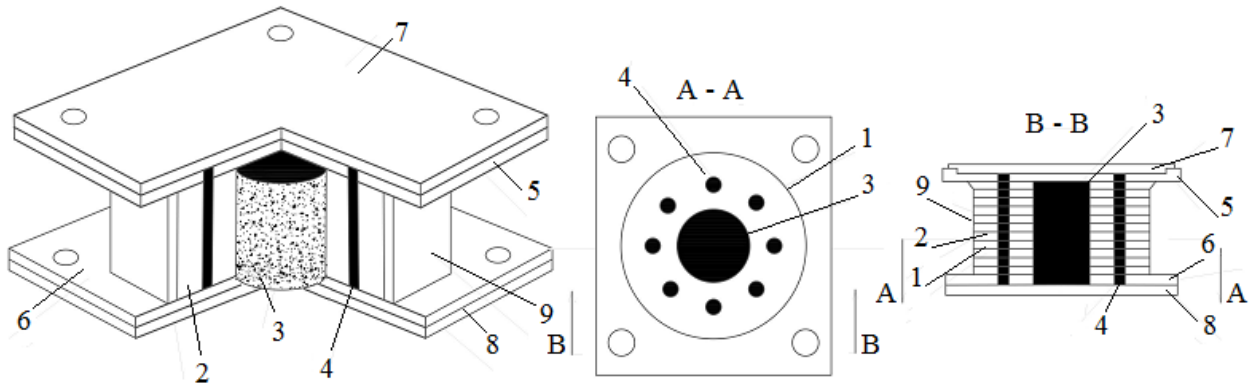


Рис. 7.12. Конструктивная схема многослойной опоры R-FBIsystem (США):
 1 – слой тефлона; 2 – стальной лист; 3 – центральный резиновый сердечник;
 4 – периферийный резиновый стержень; 5 и 6 – верхняя и нижняя плиты,
 в которых заделаны сердечник и стержни; 7 и 8 – верхняя и нижняя опорные
 стальные плиты; 9 – резиновый кожух

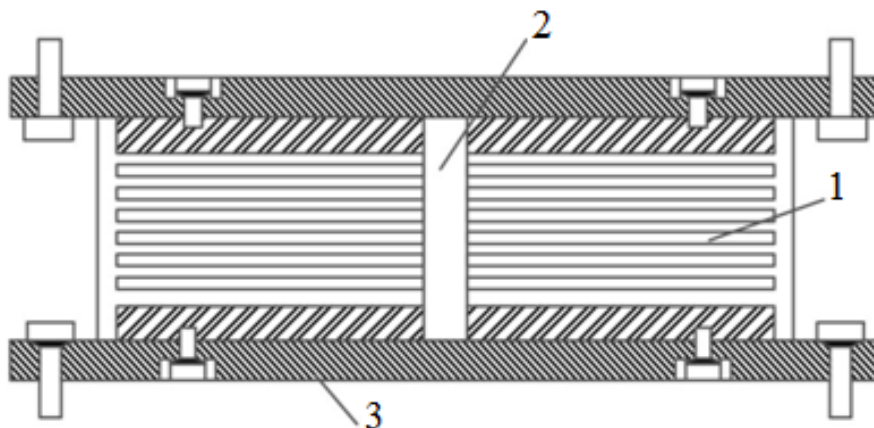


Рис. 7.13. Резинометаллическая опора (фирма VIBRO-TECH) в разрезе
 и расположение сейсмоизолирующих опор в плане здания (здание банка
 в Иркутске): 1 – слой резины и металлические пластины;
 2 – свинцовый сердечник; 3 – фланцевые пластины

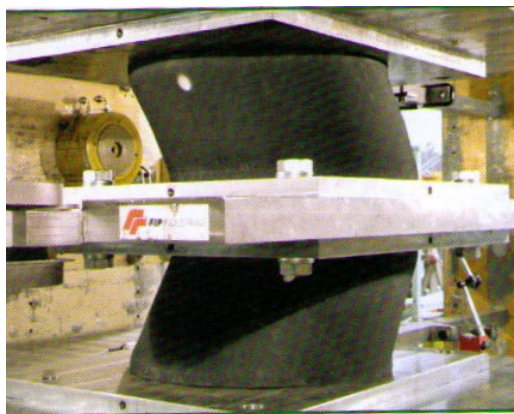


Рис. 7.14. Системы сейсмоизоляции итальянской фирмы «FipIndustriale»

В ряде случаев для ССИ используют опоры, основой которых являются винтовые пружины. Такие опоры применяются обязательно совместно с вязко-демпферными устройствами – рис. 7.15. Разрабатывает и изготавливает пружинные опоры фирма GERB.



Рис. 7.15. Виброизолятор со встроенным ВИСКО-демпфером
а – блок пружин со встроенным вискодемпфером; *б* – вискодемпфер

В вертикальном направлении резинометаллические и пружинные опоры на порядок жестче, чем в горизонтальном.

5. Фундаменты с сейсмоизолирующим скользящим поясом. При создании сейсмоизолирующего скользящего пояса реализуется 2-й принцип сейсмоизоляции – применением в ССИ устройств, ограничивающих уровень усилия передаваемого на ЗО (пластически деформируемые элементы или фрикционные поверхности).

Одно из наиболее известных технических решений такого типа - сейсмоизолирующий фундамент фирмы «SpieBatignolle». Конструкция антисейсмической фрикционной опоры показана на рис. 7.16, *а*. Опора, поддерживающая верхнюю фундаментную плиту, состоит из фрикционных плит, армированной прокладки из эластомера (неопрена), нижней фундаментной плиты и бетонной стойки, опирающейся на нижнюю фундаментную плиту. Жесткость опор в вертикальном направлении примерно в 10 раз выше, чем в горизонтальном.

К настоящему времени с применением сейсмоизолирующих опор указанного типа построены здания АЭС в г. Круа (Франция) и в г. Коберг (ЮАР).

В СССР фундамент с сейсмоизолирующим скользящим поясом был разработан Л. Ш. Килимником, Л. А. Солдатовой, С. В. Поляковым и В. П. Чуднецовым [17, 18]. Фундамент представлен на рис. 7.16, б. Он включает верхнюю обвязку и ростверк, между которыми введены фторопластовые пары, ограничители перемещений. При действии на здание сейсмических нагрузок происходит относительное смещение между ростверком и верхней обвязкой, что снижает нагрузки до величины сил трения между листами фторопласта. Смещение здания по отношению к фундаменту ограничивается безопасными пределами, определяемыми расстановкой ограничителей перемещений. Недостатками этой сейсмоизоляции является отсутствие возможности регулирования сил трения, а также возникновение паразитных колебаний в моменты перехода от совместного к раздельному движению системы и при ударах здания об ограничители. При переходе от совместного движения к раздельному происходит внезапное приложения силы трения к защищаемому зданию с коэффициентом динамичности 2 (см. п. 3.2.2).

Есть конструкции, в которых сочетаются как принцип низкочастотности, так и принцип ограничения передаваемых усилий. Сейсмоизолирующий фундамент фирмы «SpieBatignolle» является классическим примером такой сейсмоизоляции с последовательным расположением упругих и демпфирующих элементов. При относительно слабых воздействиях, когда горизонтальная нагрузка на опорную часть не превосходит сил трения, система работает в линейно-упругой области. При увеличении нагрузки сила трения преодолевается и происходит проскальзывание верхней фундаментной плиты относительно нижней.

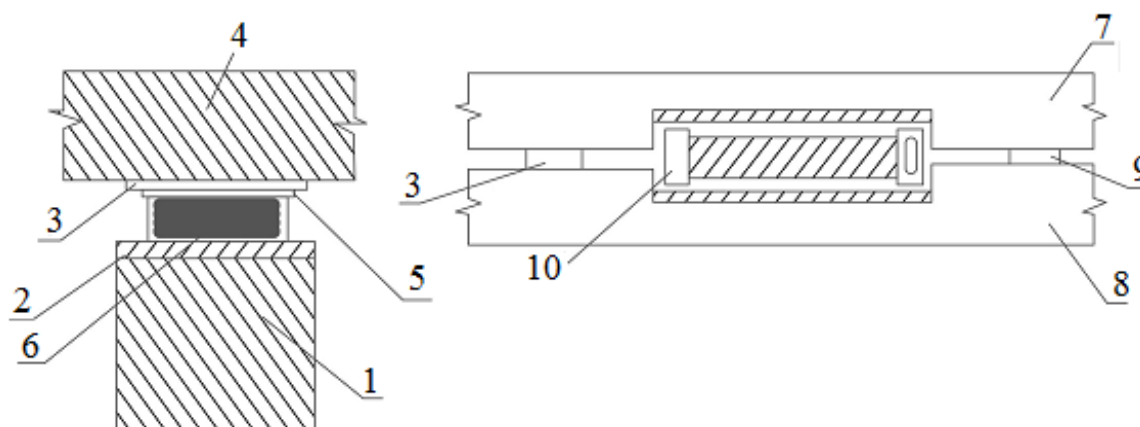


Рис. 7.16. Конструкция антисейсмической фрикционной опоры

В сейсмоизолирующем фундаменте «SpieBatignolle» ярко проявляются противоречия, связанные с выбором уровня силы трения. Анализ, представленный в [26, 30], показал, что небольшая сила трения выгодна при высокочастотных воздействиях. При таких воздействиях, как показали расчеты, вза-

имные смещения фундаментных плит не превосходят 20 см. Однако при оценке поведения этих фундаментов при низкочастотных воздействиях взаимные смещения плит приближаются к 1 м. Для снижения этих смещений необходимо увеличить силы трения, что, в свою очередь, ведет к увеличению абсолютных ускорений защищаемого объекта и снижению эффективности сейсмоизоляции. Подробно вопрос об оптимальном выборе уровня демпфирующих сил (в том числе силы трения) рассмотрен ниже в п.7.8.

6. Сейсмоизолирующие фундаменты с использованием сыпучих материалов. Сейсмические колебания могут быть существенно снижены за счет использования сыпучих материалов в виде песка, щебня, гравия и т. п. в фундаментных частях сейсмоизолированного сооружения [7]. При этом возможны различные варианты расположения сыпучих прокладок в фундаментах.

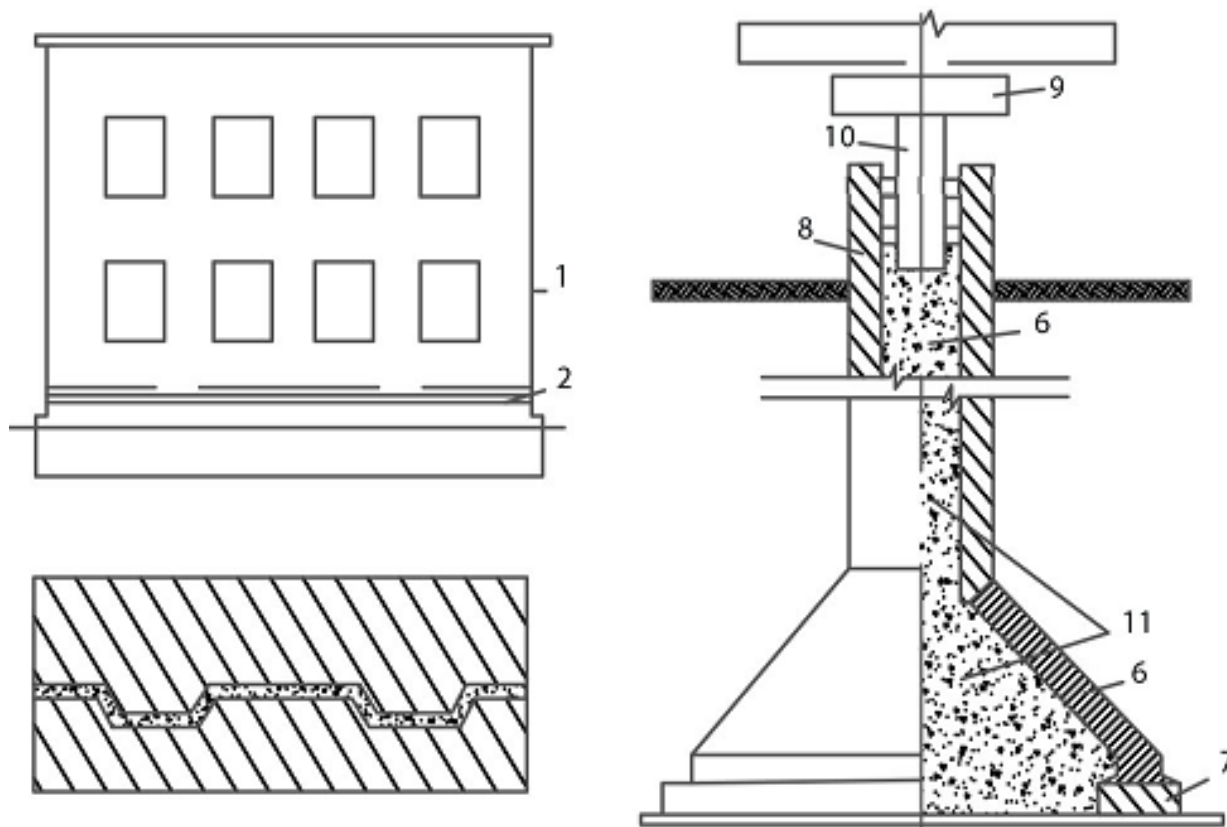


Рис. 7.17. – Конструкции сейсмоизолирующих фундаментов:
 1 – здание; 2 – горизонтальный шов; 3 – верхний элемент фундамента;
 4 – нижний элемент фундамента; 5 – песок; 6 – полая коническая оболочка;
 7 – опорное кольцо; 8 – полая стойка; 9 – оголовок стойки; 10 – поршень стойки;
 11 – сыпучий материал (песок)

Один из вариантов расположения антисейсмических подушек показан на рис. 7.17. Сейсмические колебания фундаментов здания на таких опорах оказываются сниженными вследствие проявления нелинейной упругости песка и значительного поглощения энергии в его слое.

Эффект снижения сейсмической нагрузки от предлагаемых фундаментов может быть весьма значительным, однако неясно их поведение при низкочастотных землетрясениях. В предлагаемых решениях нет возможности регулирования параметров демпфирования.

7.3. Демпфирующие устройства

Выше было сказано, что ССИ обязательно включают в себя демпфирующие (рассеивающее энергию) устройства. Рассмотрим основные виды таких устройств.

1. Вязкостные демпферы. Вязкостные демпферы типа, включают в себя цилиндр, заполненный силиконовой жидкостью (масло или мастика) и поршень, который разделяет их на две камеры и свободно движется в двух направлениях.

Большинство пружинных элементов могут поставляться в комплекте со встроенными демпферами вязкого трения – ВИСКО-демпферами. На рис. 7.15 показан пример типового пружинного элемента с ВИСКО-демпфером, рассчитанного на высокие нагрузки.

2. Пластические демпферы. Еще одним типом диссипативных элементов являются гистерезисные стальные демпферы – рис. 7.18.

Принцип их действия основан на пластической деформации специальных металлических элементов (стержней, пластин и оболочек). Эффективность ПД основана на высоком уровне диссипации механической энергии и незначительном изменении усилий их пластического сопротивления.

Эти устройства конструируют, используя элементы различных форм и поверхностей, из мягкопластичной стали. Основная идея этих демпферов заключается в рассеивании механической энергии при их пластическом деформировании (изгиб, кручение, растяжение-сжатие).

Фирма «FIPIndustriale» разработала целый ряд диссипативных элементов различных форм. Наиболее используемыми являются:

1. Элементы С-образной формы или лунный полумесяц;
2. Конусообразные стержни одинарные или двойные;
3. Х-образные или бабочкообразные элементы;
4. U-образные полосы;
5. E-образные элементы.

Окончательные размеры диссипативного элемента устанавливают в соответствии с расчетными перемещениями. Требуемая максимальная сила и упругопластическая жесткость гистерезисного стального демпфера получается в результате подбора необходимого количества диссипативных элементов, устанавливаемых параллельно.

Японская фирма «SumitomoMetalMiningCo, Ltd» разработала пластические демпферы, показанные на рис. 7.19, а, б.

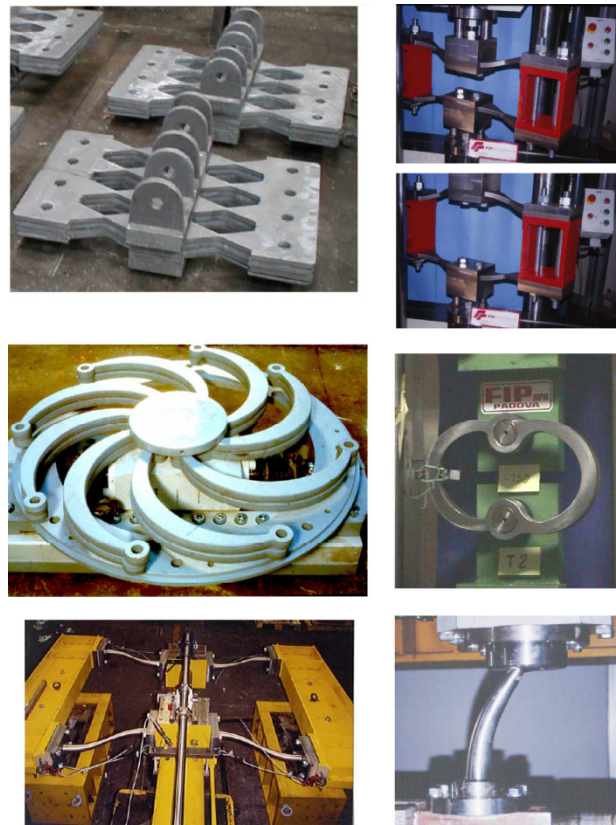


Рис. 7.18. Варианты исполнения гистерезисных стальных демпферов



Рис. 7.19. ПД японской фирмой «Sumitomo Metal Mining Co, Ltd»

Пластический демпфер (рис. 7.19, *a*) представляет собой *U*-образное стальное демпфирующее устройство. В центре этого устройства находится резинометаллическая опора со свинцовым демпфирующим устройством. Резинометаллическая опора выдерживает весовую нагрузку, за счет своей упругости возвращает ЗО в положение, близкое к первоначальному, и создает низкочастотность системы, а *U*-образные стальные демпфирующие устройства и свинцовые демпфирующие устройства поглощают энергию землетрясения.

Как было выше указано, сейсмоопоры компаний Robinson Seismic «Dynamic Isolation Systems» включают в себя: свинцовый стержень и резиновые опоры с высокой демпфирующей способностью. Опора несёт вес конструкции, обеспечивая упругую силу восстановления. Стержень обеспечивает требуемое демпфирование. Опора несёт вертикальную нагрузку от 100 до 3,500 тонн и выдерживает перемещения ± 600 мм.

В КБСМ были разработаны компактные пластические демпферы, обеспечивающие пространственную защиту по всем 6 степеням свободы – ППД (пространственные пластические демпферы) [4, 38]. Ряд ППД показан на рис. 7.20. В качестве демпфирующих устройств используются подверженные пластическому изгибу стержни, пластины и оболочки.

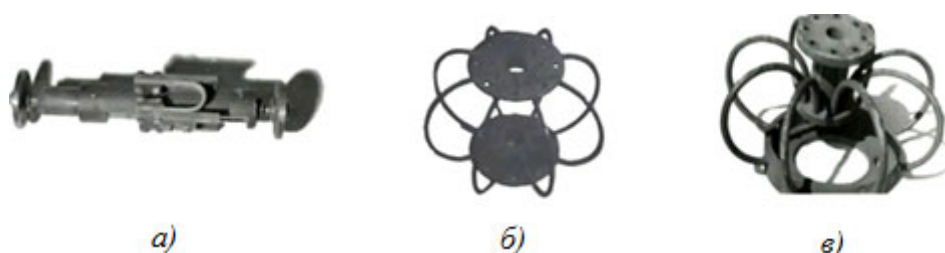


Рис. 7.20. Компактные пластические демпферы, разработанные КБСМ

3. Фрикционные демпферы. Принцип их действия основан на рассеивании энергии при взаимном скольжении поверхностей трения. Сочетание в ССИ резинометаллических опор и скользящих поверхностей представлено на рис. 7.21.

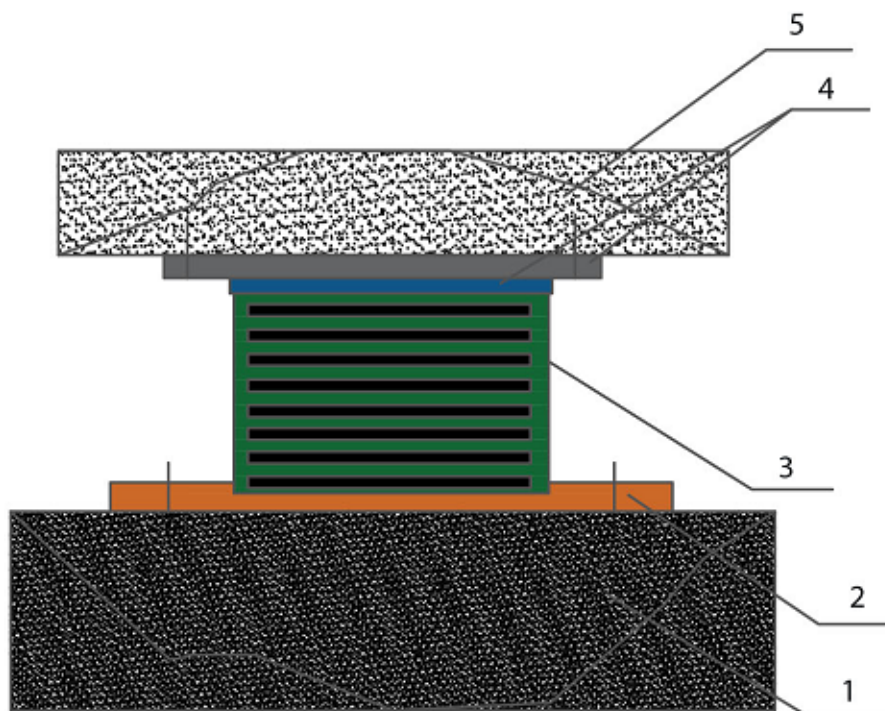


Рис. 7.21. Скользящая опорная часть фирмы «ElectricityDeFrance»

7.4. Силовые характеристики

При деформации рассмотренных выше сейсмоизолирующих опор вдоль одной оси их силовые характеристики описываются диаграммами, представленными на рис. 7.22.

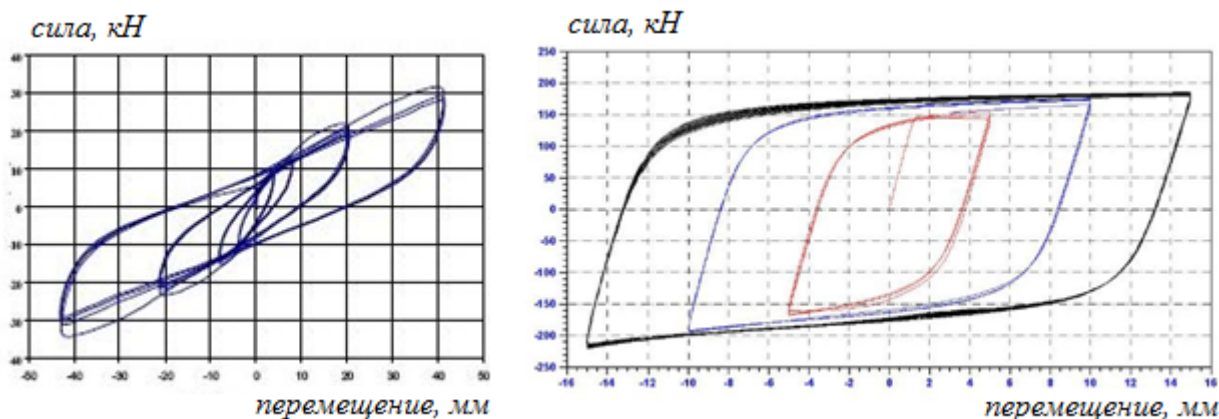


Рис. 7.22. Характеристика резинометаллической опоры серии SI и гистерезисного стального демфера фирмы «FIPIndustriale»

Физический смысл этих диаграмм может быть объяснен следующей структурной интерпретацией.

В ССИ скомпонованы упругие и демфирующие устройства, которые работают параллельно. Поэтому силовая диаграмма ССИ получается суммированием диаграмм отдельных элементов. Типовая силовая диаграмма упругого элемента представлена на рис. 7.23, б. Типовая диаграмма упругопластического демфера приведена на рис. 7.23, а. Таким образом, суммарные силовые характеристики ССИ можно описать приведенной на рис. 7.23, в би-линейной диаграммой с упругой разгрузкой. Такая силовая диаграмма полностью описывается тремя параметрами: P_T , c , $c_{пл}$.

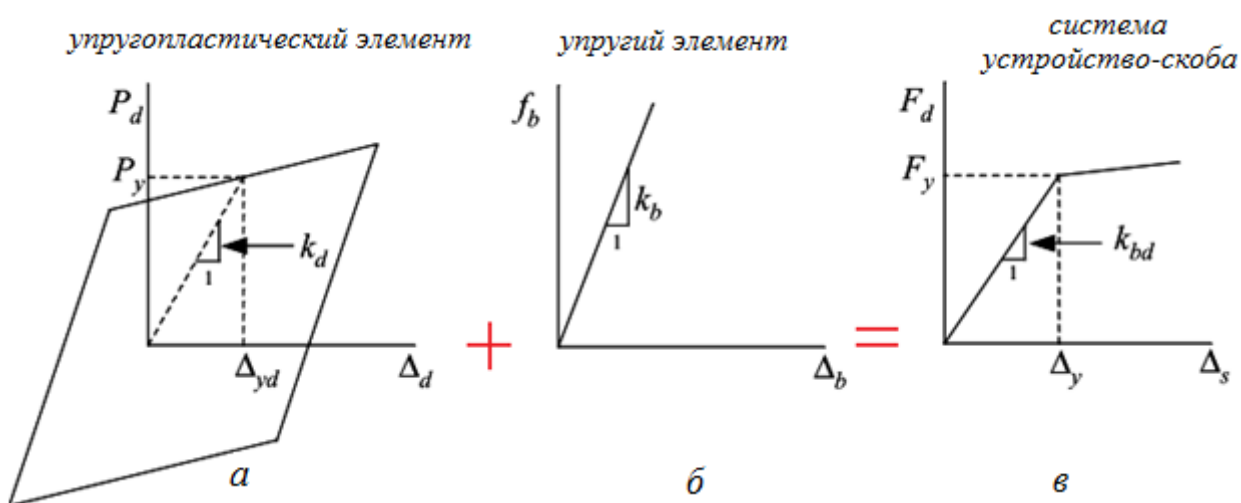


Рис. 7.23. Суммирование диаграмм сопротивления ССИ:

$$a - P_d; \quad b - f_d; \quad e - F_d = P_d + f_d$$

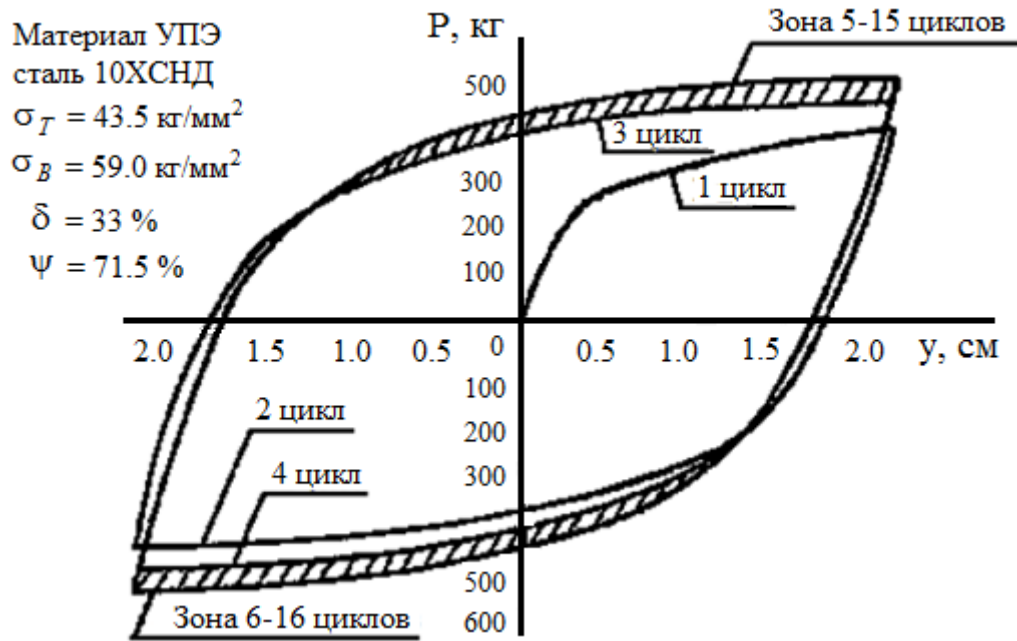


Рис. 7.24. Циклическая диаграмма сопротивления ССИ

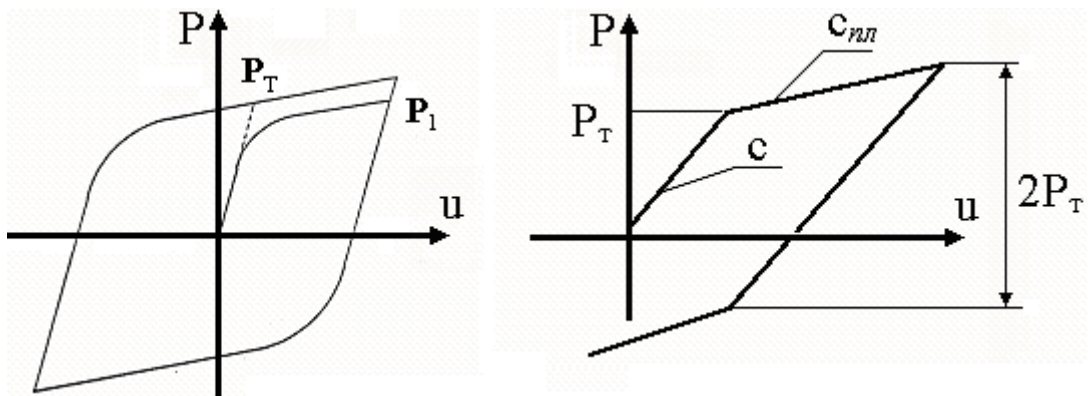


Рис. 7.25. Реальная и билинейная диаграмма сопротивления ССИ

В зависимости от соотношения указанных параметров, а также от величины максимального перемещения u_{\max} циклические диаграммы « $P - u$ » могут иметь самый разный вид – рис. 7.24.

Выше для наглядности был рассмотрен самый простой вид силовой характеристики демпфера из пластичной стали. Эта силовая характеристика соответствует гипотезе кинематического упрочнения стали и принципу Мазинга. Принцип Мазинга означает, что размах усилий между точкой, соответствующей началу упругой разгрузки, и точкой, соответствующей переходу на отрицательную пластическую ветвь характеристики, всегда равен $2P_T$. На самом деле, при циклическом нагружении пластического демпфера материал демпфера может циклически упрочняться или разупрочняться, приближаясь к некоторому стабильному циклу (рис. 7.25). Соответственно при одном

и том же размахе перемещений с каждым циклом силовая характеристика меняется. Это свойство материала описывается обобщенным принципом Мазинга [16]. Однако для моделирования силовых характеристик ССИ достаточную точность дает диаграмма, показанная на рис. 7.23, *a*.

Требуемые по расчету параметры диссипации обеспечиваются как числом демпферов, так и варьированием их параметров. Рассмотрим в качестве примера простейший пластический демпфер, показанный на рис. 7.26.

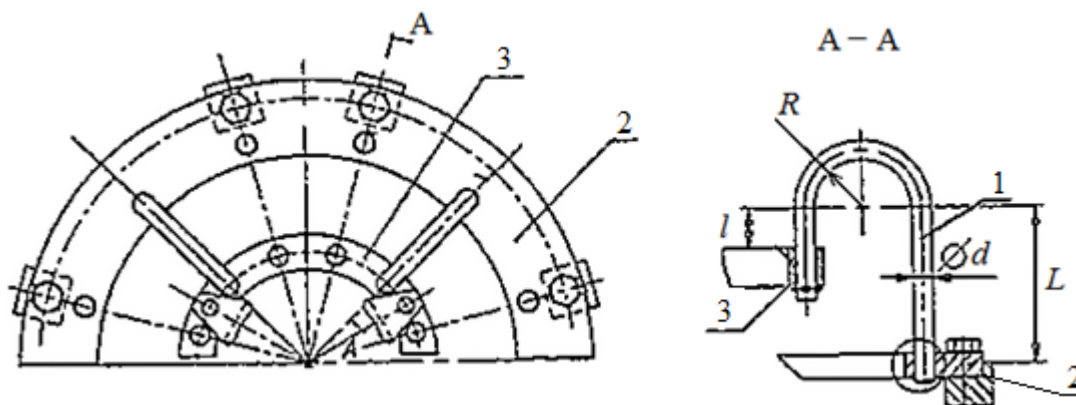


Рис. 7.26. Демпфер в виде криволинейного стержня:
1 – скоба; 2 – держатель; 3 – сепаратор

В этом демпфере диссипация энергии осуществляется вследствие пластического деформирования криволинейной скобы, соединенной с ЗО с помощью сепаратора и с фундаментом сооружения с помощью держателя.

Требуемые усилия срабатывания ПД подбираются с помощью варьирования следующих основных параметров скоб:

- геометрии L, l, R ;
- диаметра d ;
- количество n ;
- характеристик стали (модуля упругости, предела текучести).

7.5. Методы анализа систем сейсмоизоляции. Выбор параметров

7.5.1. Математические модели ССИ

Выбор параметров сейсмоизоляции базируется на анализе уравнений, описывающих колебания системы «ЗО–СИ» при сейсмических воздействиях. Так как с помощью ССИ создают, как правило, защиту от горизонтальных сейсмических воздействий, то для предварительного подбора параметров сейсмоизоляции достаточно математически моделировать структуру «ЗО–СИ» как систему с одной степенью свободы. На основании исследования таких моделей анализируется в первом приближении эффективность ССИ, устанавливается необходимость увеличения или уменьшения ее диссипативных свойств.

При этом необходимость математического описания существенно нелинейных эффектов, присущих многим системам сейсмоизоляции (трения, геометрической и физической нелинейности работы конструкций, мгновенного изменения жесткостных характеристик и др.) потребовало разработки соответствующих алгоритмов, проверки устойчивости колебаний, оценки чувствительности модели к изменениям параметров моделей и входных воздействий [17].

Более детальный анализ ССИ связан с учетом нескольких степеней свободы ЗО и рассмотрением их континуальных моделей. Временной динамический анализ таких моделей может существенно скорректировать в ряде случаев количественные оценки параметров реакции ССИ, а также позволяет выявить новые качественные эффекты [22, 26].

Сейсмическое воздействие является случайной функцией. Полноценный анализ эффективности ССИ возможен только при использовании теории случайных функций (см. глава 5). Акселерограммы как случайные функции либо математически синтезируются [9], либо находятся в результате обработки инструментальных записей, выполненных сейсмическими станциями. Для того чтобы решить задачу сейсмозащиты вероятностными методами, нужно задавать входные сейсмические воздействия в виде репрезентативных выборок инструментальных или искусственно смоделированных акселерограмм. Методы решения стохастических задач были рассмотрены выше, в главе 5. Применение этих методов в задачах сейсмоизоляции показано в п. 7.5.8.

7.5.2. Простейшая математическая модель системы «ЗО – СИ»

Как было указано, в начале проектирования ССИ обычно используется расчетная схема, в которой ЗО представляется как твердое тело. При этом считается, что за счет работы сейсмоизоляции ЗО смещается относительно движущегося фундамента только в одном направлении (рис. 7.27). Если силовые характеристики сеймоопор и демпфера линейны, то при таких допущениях математическая модель «ЗО–СИ» есть линейный осциллятор в условиях кинематического нагружения (см. глава 2):

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u = -\ddot{x}(t). \quad (7.1)$$

В (1) u – перемещение ЗО (за счет деформации сеймоопор) относительно фундамента, который движется вместе с грунтом; ω – собственная частота линейной системы; ζ – безразмерный коэффициент демпфирования; $\ddot{x}(t)$ – акселерограмма (ускорения грунта при землетрясении).

Если кинематические связи СИ с фундаментом – упругие элементы, то $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, где c – суммарная жесткость этих элементов, m – масса ЗО.

Если кинематические связи в ССИ конструктивно реализуются маятниковой тягой, то расчетная схема представляет собой математический маятник, к нижней точке которого прикреплена масса ЗО. Сила тяжести создает восстанавливающую силу и работает как некая условная пружина, жесткость которой определяется следующим образом:

$$R_M = mg \cdot \sin \varphi = mg \frac{\Delta}{l} = \frac{mg}{l} \cdot \Delta = c_M \cdot \Delta, \quad \omega_M = \sqrt{\frac{c_M}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (7.2)$$

где R_M – восстанавливающая сила маятника; φ – угол поворота маятника; Δ – перемещение нижней точки маятника (перемещение ЗО); m – масса ЗО; l – длина маятника; g – ускорение свободного падения.

Если собственная частота ω мала, то осциллятор (7.1) «фильтрует» высокочастотные компоненты сейсмического воздействия, т. к. коэффициенты динамичности этих компонент близки к нулю (см. п.п. 1.3.2 – 1.3.3). В результате абсолютные ускорения массы осциллятора

$$u_{\text{абс}} = \ddot{u} + \ddot{x}(t) = -2\zeta\omega \cdot \dot{u} - \omega^2 \cdot u. \quad (7.3)$$

оказываются близки к нулю. В пределе при $\zeta \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow 0$ абсолютные ускорения массы (то есть ЗО) равны нулю, относительные ускорения ЗО равны ускорениям фундамента (грунта) с обратным знаком. Физически это означает, что ЗО не двигается, так как связи ЗО с фундаментом отсутствуют.

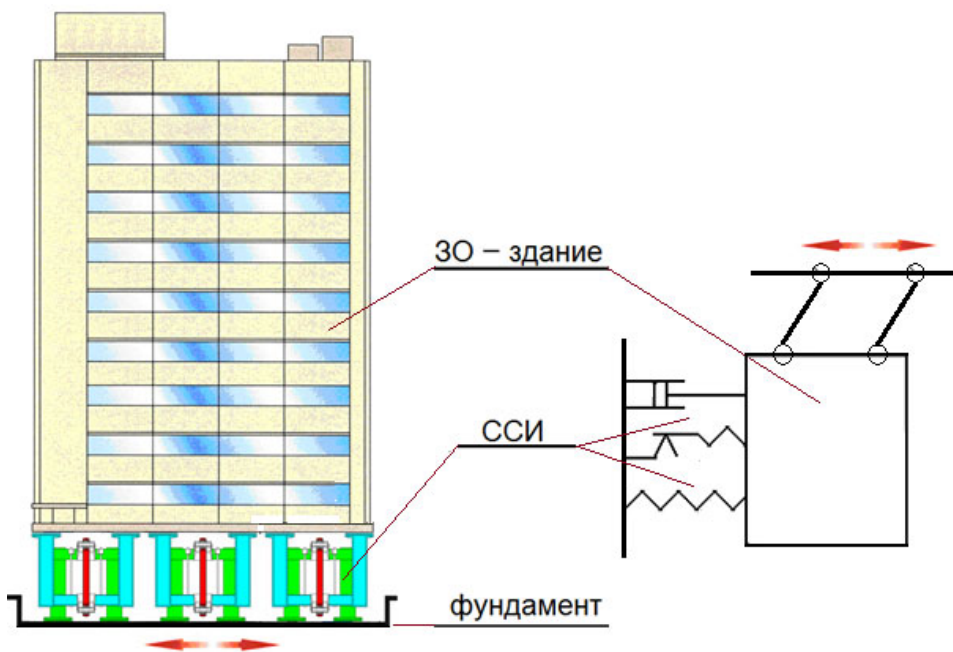


Рис. 7.27. Модель ССИ как линейного осциллятора

Уравнение (7.1) это простейшая приближенная модель, описывающая динамику системы ЗО-СИ. Такая модель учитывает только горизонтальное движение грунта и линеаризованные силовые характеристики упругих

и демпферных опор. В п. 1.1.1 было указано, что детальная расчетная схема может быть упрощена за счет потери точности и перехода к приближенным, оценочным решениям. В случае линейного осциллятора число степеней свободы было уменьшено за счет не учета вертикальных и угловых движений ЗО и пренебрежения упругостью защищаемого сооружения. Модель также упрощена за счет линеаризации силовых характеристик модели, связанных с ее физической или геометрической нелинейностью. К таким упрощениям следует относиться осторожно. Иногда такие упрощения приводят не только к уменьшению точности решения, но и к потере некоторых качественных эффектов. Это показано ниже в п. 7.5.7.

7.5.3. Эффективность ССИ

Эффективность ССИ определяется, в первую очередь, величиной снижения абсолютных ускорений ЗО:

$$u_{\text{абс}} = \max_t |\ddot{u}(t) + \ddot{x}(t)|.$$

Снижение абсолютных ускорений приводит к уменьшению инерционных нагрузок на ЗО. С помощью модели (7.1) находятся собственная частота ω и коэффициент безразмерного демпфирования ζ , при которых модель (7.1) дает требуемое снижение абсолютных ускорений. После этого выбирается конструкция СИ, обеспечивающая реализацию найденных параметров. При выборе конструкции СИ учитываются также: конструктивно возможные максимальные перемещения ЗО относительно фундамента, грузоподъемность СИ, ее габариты, технологичность, надежность, стоимость. Подбор частоты ω удобно производить с помощью спектров ответа. На рис. 7.30 показан спектр ускорений (см. п. 6.3.2) $a(\omega)$ в низкочастотной области для воздействия, приведенного на рис. 7.33. Здесь $a = u_{\text{абс}} = \max_t |\ddot{u}(t) + \ddot{x}(t)|$. При вычислении $a(\omega)$ с помощью (7.1) было принято, что коэффициент $\zeta = 0,01$.

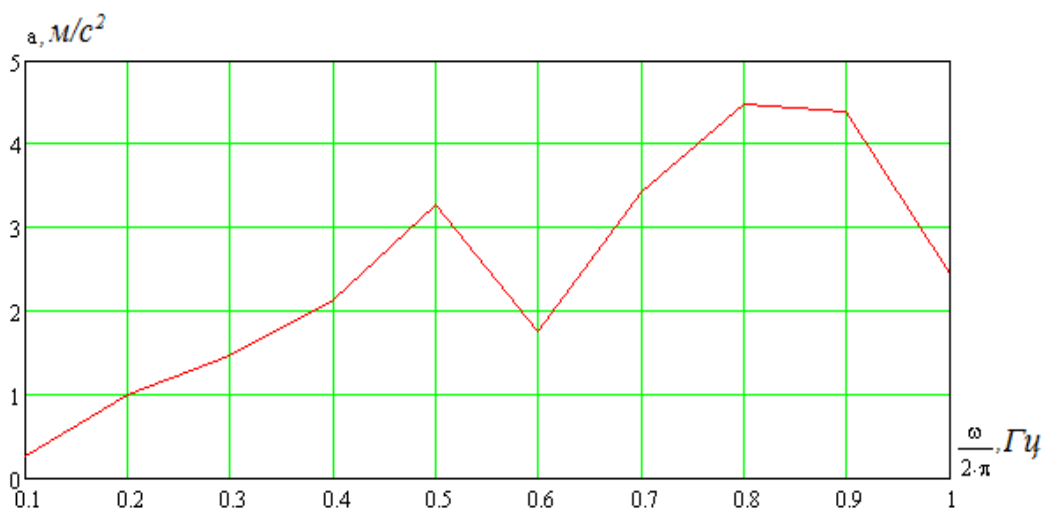


Рис. 7.28. Пример построения спектральной кривой для воздействия № 3

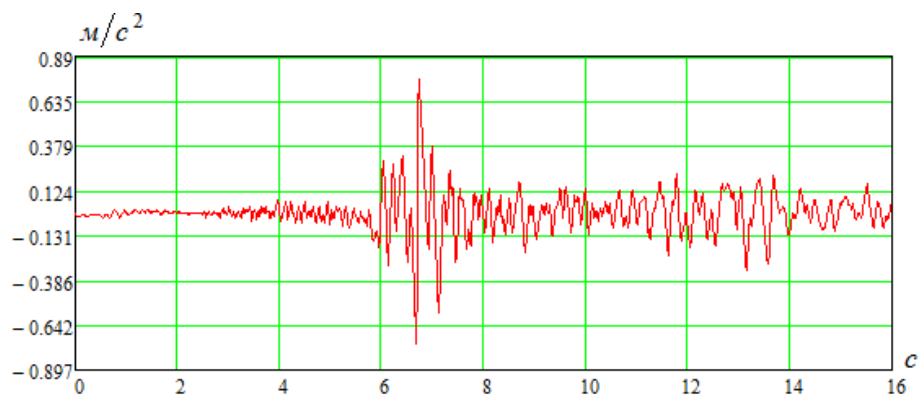


Рис. 7.29. Воздействие № 1, максимальное значение ускорения – 0,79 м/с²

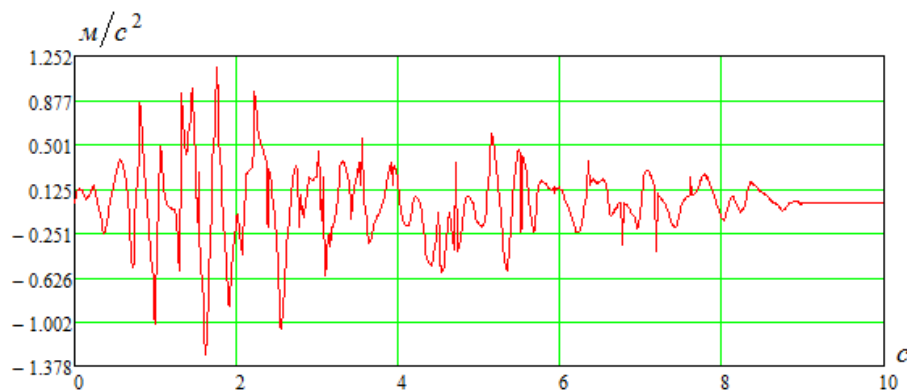


Рис. 7.30. Воздействие № 2, максимальное значение ускорения – 1,28 м/с²

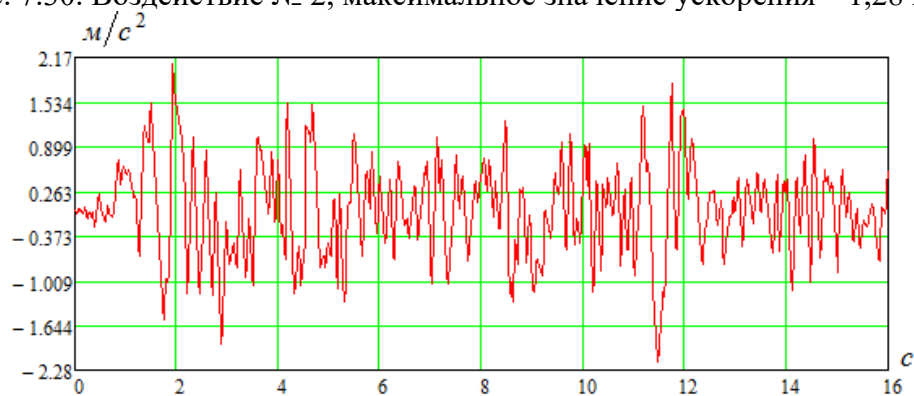


Рис. 7.31. Воздействие № 3, максимальное значение ускорения – 2,18 м/с²



Рис. 7.32. Воздействие № 4, максимальное значение ускорения – 3,5 м/с²

По результатам расчетов, представленных в виде зависимостей максимальных значений абсолютных ускорений от частоты в диапазоне 0...1 Гц на рис. 7.30, видно, если в сейсмическом воздействии имеется низкочастотная составляющая, то возможно резкое увеличение (всплеск) абсолютных ускорений ЗО. Избавиться от этих резонансных явлений позволяет применение ПД.

7.5.4. Численный анализ

Рассмотрим пример, в котором ССИ состоит из сейсмоизолирующих опор (СИО) маятникового типа, основной характеристикой которой является длина маятника ($l = 1,5$ м). Тогда собственная частота системы:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9,8}{1,5}} = 2,55 \frac{1}{c} (0,4 \text{ Гц}).$$

Для исследования степени снижения нагрузки, обеспечиваемой линейной схемой без пластического демпфирования, были проведены расчеты по уравнению (7.1) на сейсмическое воздействие №№ 1 – 4 (рис. 7.29 – 7.32) для коэффициента линейного демпфирования ζ от 0,1 до 0,4. Результаты, приведенные в табл. 7.1, показывают, что введение вязкого линейного демпфирования увеличивает эффективности СИО и избавляет от квазирезонансных явлений.

Таблица 7.1.

Параметры движения ЗО, защищенного с помощью ССИ

ζ	Воздействие № 1		Воздействие № 2		Воздействие № 3		Воздействие № 4	
	$ u_{\max} $ мм	$ \ddot{u}_{\max} $ м/с ²	$ u_{\max} $ мм	$ \ddot{u}_{\max} $ м/с ²	$ u_{\max} $ мм	$ \ddot{u}_{\max} $ м/с ²	$ u_{\max} $ мм	$ \ddot{u}_{\max} $ м/с ²
0.1	37.8	0.85	42.9	0.86	24.8	0.83	68.2	0.90
0.2	23.6	0.67	129	0.78	24.6	0.67	103	0.68
0.3	31.9	0.51	153	0.60	27.0	0.51	137	0.59

В табл. 7.1 показано, что варьирование ζ позволяет минимизировать абсолютные ускорения ЗО.

7.5.5. Анализ влияния демпфирования при сейсмическом воздействии

Сейсмическое воздействие является поличастотным. При таком воздействии на динамическую систему «ЗО–ССИ» возможны следующие ситуации:

1. Если в воздействии преобладают высокочастотные (по сравнению с частотой системы) составляющие, то при отсутствии демпфирования сейсмоизоляционный эффект максимален. При увеличении демпфирования этот эффект уменьшается. При очень большом демпфировании система приобретает признаки жесткой связи защищаемого объекта и основания.

2. Если в воздействии преобладает частота, близкая к собственной частоте системы, то увеличение демпфирования уменьшает коэффициент динамичности воздействия до 1 (см. п. 1.3.3). Малое демпфирование приводит к резонансным эффектам.

3. Если во внешнем воздействии имеются и низкочастотные и высокочастотные составляющие, то существует оптимальное демпфирование, обеспечивающее минимальное значение абсолютных ускорений ЗО, то есть минимальные инерционные нагрузки. Значение оптимального коэффициента демпфирования $\zeta = \frac{\alpha}{2 \cdot \omega}$ лежит внутри интервала (0,1).

Выполним качественный анализ влияния демпфирования на простейших примерах. Для этого проанализируем две модели поведения осциллятора при варьировании ζ . В первой модели на систему действует либо низкочастотная нагрузка, с частотой близкой к частоте защищаемого объекта, либо высокочастотная, с частотой в несколько раз превышающая частоту защищаемого объекта. Будем полагать, что поведение системы «ЗО-ССИ» описывается линейным уравнением (7.1), и реакция этой системы на гармоническое воздействие также является гармонической. Иначе говоря, рассматриваем установившиеся колебания. Полученные при указанном нагружении результаты для первой модели показаны на рис. 7.33, а, б.

Во второй модели на систему действовала нагрузка, имеющая две составляющие – низкочастотная и высокочастотная с различным соотношением их амплитуд:

$$\ddot{x}(t) = A_H \sin(2\pi \cdot f_H \cdot t) + A_B \sin(2\pi \cdot f_B \cdot t) \quad (7.4)$$

где f_H, f_B – значения частот низкочастотной и высокочастотной составляющих нагрузки соответственно; A_H, A_B – значения амплитуд. Результаты такого нагружения, представленные на рис. 7.33, в, показывают, что существует оптимальное, «компромиссное» демпфирование.

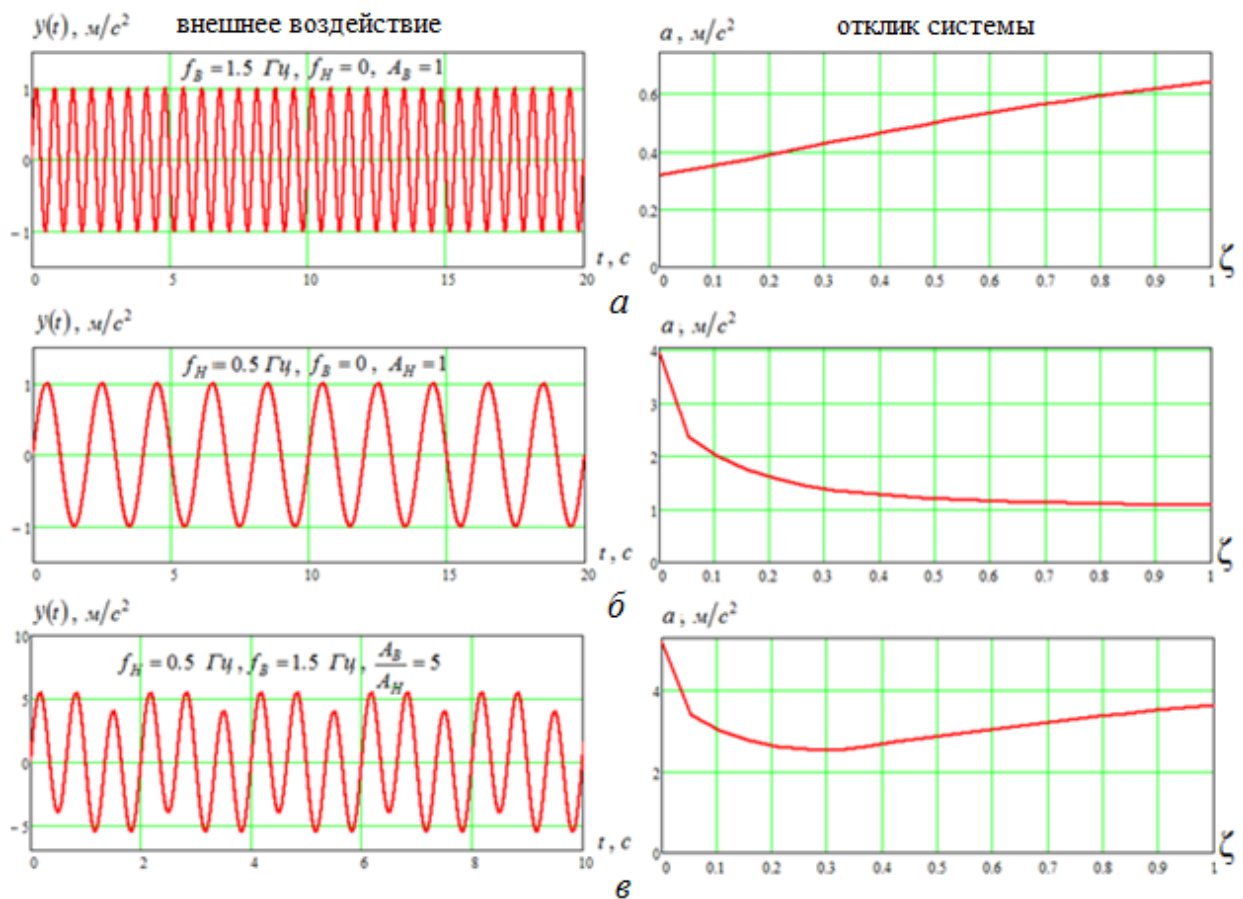


Рис. 7.33. Зависимость абсолютных ускорений от коэффициента демпфирования для случаев:

- а – высокочастотного воздействия ($f_B = 1,5$ Гц, $f_H = 0$, $A_B = 1$);
- б – низкочастотного воздействия ($f_H = 0,5$ Гц, $f_B = 0$, $A_H = 1$);
- в – двухчастотного воздействия ($f_B = 1,5$ Гц, $f_H = 0,5$ Гц, $A_B / A_H = 5$)

7.5.6. Усложнение модели ССИ

Уравнение (7.1) является первым приближением в решении задачи сейсмоизоляции. Рассмотрим последовательное упрощение нелинейной модели с одной степенью свободы на примере маятниковой ССИ (рис. 7.4). Ниже приведены 4 различные математические модели такой ССИ (табл. 7.2). Каждая следующая модель является упрощением предыдущей.

Уравнение движения системы с учетом геометрической нелинейности работы кинематических связей как параллелограммных механизмов можно получить, используя уравнения Лагранжа 2-го рода. Это уравнение имеет вид

$$\frac{l^2}{l^2 - u^2} \ddot{u} + l^2 \frac{u \cdot \dot{u}^2}{(l^2 - u^2)^2} = -(g - \ddot{z}(t)) \frac{u}{\sqrt{l^2 - u^2}} - \frac{P(u, \dot{u})}{m} - \frac{\alpha}{m} \dot{u} - \ddot{x}(t), \quad (7.5)$$

где x, z – координаты, описывающие горизонтальное и вертикальное движение фундамента; u – координата, описывающая перемещение ЗО относительно фундамента; α – параметр внутреннего конструкционного демпфирования; $P(u, \dot{u})$ – силовая характеристика ПД (рис. 7.22).

При $u \ll l$ (1) переходит в уравнение

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega \cdot \dot{u} + \left(\omega^2 - \frac{\ddot{z}(t)}{l} \right) \cdot u + f(u, \dot{u}) = -\ddot{x}(t), \quad (7.6)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – собственная частота системы; $\zeta = \frac{\alpha}{2m\omega}$ – безразмерный коэффициент линейного демпфирования; $f(u, \dot{u}) = \frac{P(u, \dot{u})}{m}$ – приведенное к единичной массе усилие сопротивления ПД.

Пренебрегая влиянием вертикальной составляющей движения грунта, вместо (2) получим уравнение

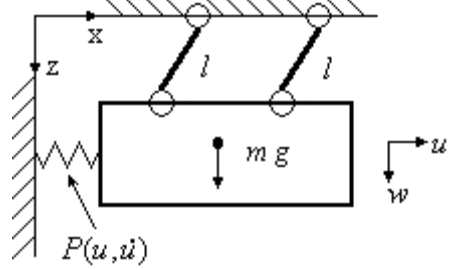
$$\ddot{u} + 2\zeta\omega \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u + f(u, \dot{u}) = -\ddot{x}(t). \quad (7.7)$$

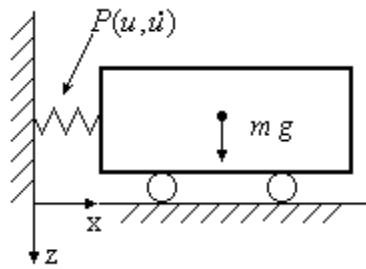
Упрощенной динамической расчетной схеме с линейным демпфированием, в которой член $f(u, \dot{u})$ линеаризован, соответствует следующее уравнение:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u = -\ddot{x}(t). \quad (7.8)$$

Таблица 7.2

Иерархия математических моделей движения системы «ЗО – СИ»

Номер формулы	Уравнение движения	Особенности
(7.5)	$\frac{l^2}{l^2 - u^2} \ddot{u} + l^2 \frac{u \cdot \dot{u}^2}{(l^2 - u^2)^2} =$ $= -g \frac{u}{\sqrt{l^2 - u^2}} - f(u, \dot{u}) - \frac{\alpha}{m} \dot{u} - \ddot{x}(t)$	<p>учет работы кинематических связей как параллелограммных механизмов</p> 

Номер формулы	Уравнение движения	Особенности
(7.6)	$\ddot{u} + 2\zeta\omega \cdot \dot{u} + \left(\omega^2 - \frac{\ddot{z}(t)}{l} \right) \cdot u + f(u, \dot{u}) = -\ddot{x}(t)$	линеаризованная расчетная схема при $u \ll l$ 
(7.7)	$\ddot{u} + 2\zeta\omega \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u + f(u, \dot{u}) = -\ddot{x}(t)$	без учета вертикальных сил
(7.8)	$\ddot{u} + 2\zeta\omega \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u = -\ddot{x}(t)$	упрощенная динамическая расчетная схема

Ряд математических моделей, описывающих нелинейные силовые характеристики сейсмоопор, показанных в п. 7.4, даны в [30].

7.5.7. Модель «ЗО-ССИ» с несколькими степенями свободы

Выше было указано, что упрощение модели может привести к потере существенных качественных эффектов, имеющих в реальной конструкции. Например, эти модели не позволяют учесть ротационное движение грунта, хотя в реальности это вращение существует. При обследовании зданий и сооружений, а также грунтов, обнаружены дефекты и разрушения, которые невозможно объяснить, не учитывая ротации грунта: волнообразные искривления рельсов железнодорожных путей, разрушения торцов зданий, повороты конструкций и участков грунта и многие другие [3]. Ротации основания прежде всего связаны с волновым характером землетрясений. Ниже сформирована математическая модель ССИ с 4-мя степенями свободы, которая позволяет учитывать воздействие на ССИ ротационное движение грунта. Эта модель является обобщением существующих моделей с одной степенью свободы. Численный анализ этой модели показывает, что крутильные (ротационные) колебания ЗО могут повлиять на эффективность работы ССИ.

1. Постановка задачи. При выводе (7.1) предполагалось, что маятниковые тяги абсолютно жесткие. В действительности тяги могут деформироваться в продольном направлении. Вследствие этого будут происходить вертикальные и крутильные колебания ЗО. Если учесть деформирование тяг и считать ЗО твердым телом, то ССИ будет системой с 6-ю степенями свобо-

ды. С учетом особенности конструкции рассматриваемых маятниковых опор расчетная схема для исследования динамики ССИ с 6-ю степенями свободы имеет вид, показанный на рис. 7.36:

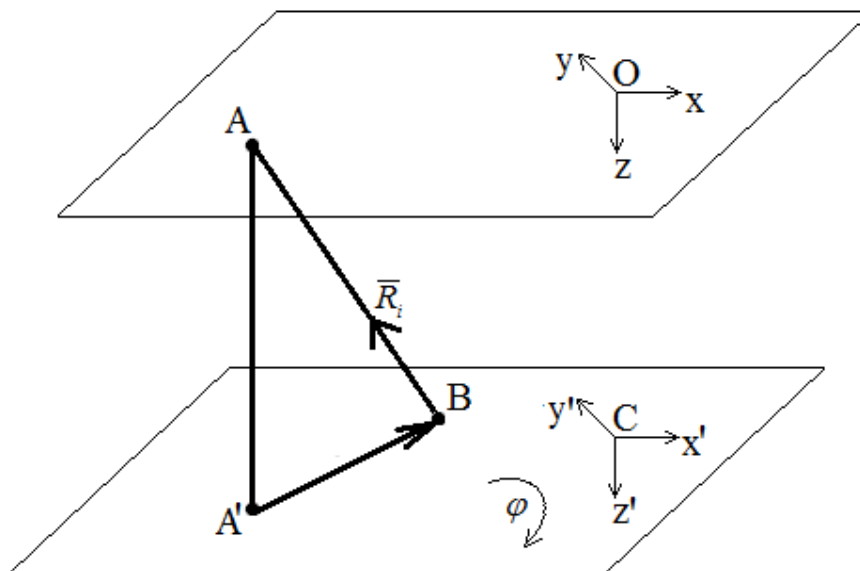


Рис. 7.36. Принципиальная схема, описывающая движение маятниковой тяги

Введем следующие обозначения и допущения:

1. Верхняя плоскость на рис. 7.36 моделирует фундамент защищаемого объекта.

2. Нижняя плоскость моделирует защищаемый объект, обладает массой m и моментами инерции I_x, I_y, I_z .

3. X, Y, Z – система координат с центром в точке O соответствует переносному движению (двигается с фундаментом).

X', Y', Z' – система координат с центром в точке C , соответствует относительному движению (двигается вместе с ЗО).

Точка C – центр масс ЗО.

4. A – точка крепления тяги к фундаменту; B – точка крепления тяги к ЗО.

A' – проекция A при $t = 0$;

B – текущее положение A' при $t \neq 0$.

5. Стержень AB в точке A имеет упругий элемент с жесткостью k , моделирующий упругость тяги.

6. Обозначим перемещение точки C в системе координат X, Y, Z : u_C, v_C, w_C . Углы поворота ЗО (нижняя плоскость) относительно осей X, Y, Z : $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$.

7. Координаты точки C в системе X, Y, Z : $(X_C + u_C, Y_C + v_C, Z_0 + w_C)$.

8. Усилия в i -й тяге $\vec{R}_i = (R_x, R_y, R_z)$;

Момент этого усилия относительно точки C : $\vec{M}_{R_i} = (M_{ic_x}, M_{ic_y}, M_{ic_z})$.

Математическая модель системы на рис. 7.36 состоит из нескольких групп уравнений:

1-я группа уравнений описывает динамику ЗО под действием вышеуказанных сил и внешних кинематических воздействий. Для маятниковой СИ при отсутствии ротационных возмущений и абсолютно жестких тягах указанные уравнения перманентно переходят в известные уравнения колебаний физического маятника.

2-я группа уравнений описывает связь между обобщенными координатами ЗО и перемещениями точек крепления маятниковых тяг к ЗО.

3-я группа уравнений описывает связь между усилиями в тягах и перемещениями точек крепления.

2. Первая группа уравнений. Рассмотрим движение центра масс ЗО как движение точки C относительно подвижной системы координат XYZ . В соответствии с формулами относительного движения имеем [2]:

$$\vec{\xi}_a = \vec{\xi}_r + \vec{\xi}_e + \vec{\xi}_c, \quad (7.9)$$

где $\vec{\xi}_a$ – абсолютное ускорение точек C ; $\vec{\xi}_r$ – относительное ускорение; $\vec{\xi}_e$ – переносное ускорение; $\vec{\xi}_c$ – ускорение Кориолиса.

а) Относительное ускорение определяется ускорениями относительных координат точки C :

$$\vec{\xi}_r = (\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w}), \quad (7.10)$$

б) Переносное ускорение определяется формулой:

$$\vec{\xi}_e = \vec{\xi}_o + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{oc} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{oc}), \quad (7.11)$$

где $\vec{\varepsilon}$ – вектор, описывающий угловое ускорение ротационного движения грунта [1, 16], $\vec{\omega}$ – вектор, описывающий угловую скорость ротационного движения грунта; $\vec{\xi}_o = (a_x, a_y, a_z)$ – вектор, описывающий линейные ускорения подвижной системы координат (грунта). Компоненты этого вектора задаются акселерограммами.

в) Ускорение Кориолиса определяется формулой:

$$\vec{\xi}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r, \quad (7.12)$$

где $\vec{V}_r = (\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$ – относительная скорость точки C .

Вектор абсолютного углового ускорения ЗО:

$$\vec{\phi}_a = \ddot{\vec{\phi}} + \dot{\vec{\omega}}, \quad (7.13)$$

где $\ddot{\vec{\phi}}$ – вектор ускорений относительных углов поворота ЗО относительно осей X, Y, Z .

В формуле (7.12) углы считаются малыми. При этом предположении уравнения движения ЗО имеют вид

$$m\vec{\xi}_a = \vec{R} + \vec{P} + \psi_1(\vec{V}), \quad (7.14)$$

$$I\vec{\phi}_a = \vec{M}_R + \vec{M}_p + \psi_2(\dot{\phi}).$$

В (7.14) \vec{R} – вектор, описывающий суммарное усилие от всех тяг; \vec{M}_R – вектор суммарного момента от усилий в тягах относительно центра масс C ; \vec{P}, \vec{M}_p – суммарные усилие и момент от пластических демпферов (гистерезисных устройств); $\psi_1(\vec{V}), \psi_2(\dot{\phi})$ – суммарные усилия и момент, возникающие вследствие вязкого демпфирования.

В формуле (7.11) вследствие малости \vec{r}_{oc} двумя последними слагаемыми можно пренебречь. Тогда, подставляя формулы (7.10) – (7.12) в (7.14), после некоторых преобразований получим [13]:

$$m\ddot{u}_c = R_x + 2m\dot{u}\omega - P_x - \psi_{1x} - ma_x(t),$$

$$m\ddot{v}_c = R_y - 2m\dot{v}\omega - P_y - \psi_{1y} - ma_y(t). \quad (7.15)$$

$$m\ddot{w}_c = R_z + mg - 2m\dot{w}\omega - P_z - \psi_{1z} - ma_z(t),$$

$$I_z\ddot{\phi}_z = M_{cz} - M_{pz} - \psi_{2z} - I_z\ddot{\omega}(t),$$

$$I_x\ddot{\phi}_x = M_{cx} - M_{px} - \psi_{2x}, \quad (7.16)$$

$$I_y\ddot{\phi}_y = M_{cy} - M_{py} - \psi_{2y}.$$

Компоненты вектора \vec{R} в (7.14):

$$R_x = \sum R_{ix}, R_y = \sum R_{iy}, R_z = \sum R_{iz}, \vec{M}_C = \sum \vec{M}_{iC} = (M_{cx}, M_{cy}, M_{cz}),$$

$$\vec{M}_{iC} = \vec{r}_{BC} \times \vec{R}_i,$$

где \vec{r}_{BC} – радиус вектор, соединяющий точки C и B .

Начальные условия:

$$\dot{u}_C(0) = \dot{v}_C(0) = \dot{w}_C(0) = 0; u_C(0) = v_C(0) = 0; w_C(0) = \frac{mg}{nk},$$

где n – количество опор ЗО.

Уравнения (7.15) и (7.16) являются полной системой уравнений, описывающей колебания твердого тела, расположенного на маятниковой СИ. Для ее решения системы нужно получить формулы, связывающие реакции тяг с обобщенными координатами $u_x, u_y, u_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$. Это сделано во 2-й и 3-й группах уравнений. Чтобы сделать алгоритм формирования реакций прозрачным, ниже следующие формулы написаны в предположении, что φ_x, φ_y равны нулю. Как правило, для реальных сооружений моменты инерции относительно осей X, Y значительно больше момента инерции относительно вертикальной оси, что и оправдывает сделанное допущение. Обобщение ниже приведенных формул на случай, когда φ_x, φ_y не равны нулю, не сложно и производится на основе обычных формул для преобразования системы координат при повороте координатных осей.

3. Вторая группа уравнений. Координаты точки B в системе координат X, Y, Z :

при $t = 0$: точка $B \rightarrow$ точка $A' \rightarrow (X_{A'}, Y_{A'}, Z_0)$;

при $t \neq 0$: точка $B \rightarrow$

$$(u_C + X_{A'} \cdot \cos \varphi + Y_{A'} \cdot \sin \varphi, v_C - X_{A'} \cdot \sin \varphi + Y_{A'} \cdot \cos \varphi, w_C + Z_0);$$

$$X_A = X_{A'} = X_{0i}; Y_A = Y_{A'} = Y_{0i}; Z_{A'} = Z_0.$$

Таким образом, можно записать

$$\bar{r}_{AB} = (u_C + X_{0i} \cdot \cos \varphi + Y_{0i} \cdot \sin \varphi - X_{0i}, v_C - X_{0i} \cdot \sin \varphi + Y_{0i} \cdot \cos \varphi - Y_{0i}, w_C + Z_0);$$

$$\bar{r}_{BC} = (X_{0i} \cdot \cos \varphi + Y_{0i} \cdot \sin \varphi, Y_{0i} \cdot \cos \varphi - X_{0i} \cdot \sin \varphi, 0).$$

Запишем векторы, описывающие перемещения тяг к ЗО, в координатной форме:

$$\bar{r}_{AB} = (r_{ix}, r_{iy}, r_{iz}).$$

Компоненты векторов перемещений записываются в следующем виде:

$$r_{ix} = u_C + X_{0i} \cdot \cos \varphi + Y_{0i} \cdot \sin \varphi - X_{0i};$$

$$r_{iy} = v_C - X_{0i} \cdot \sin \varphi + Y_{0i} \cdot \cos \varphi - Y_{0i};$$

$$r_{iz} = w_C + Z_0.$$

4. Третья группа уравнений. На основе рис. 7.36 усилие \bar{R}_i в стержне AB определяется следующим образом:

$$\Delta r_i = -(|\bar{r}_{AB}| - |\bar{r}_{AA'}|);$$

$$k \cdot \Delta r_i = R_i;$$

$$\bar{R}_i = R_i \cdot \frac{\bar{r}_{AB}}{|\bar{r}_{AB}|} = k \cdot (-|\bar{r}_{AB}| + |\bar{r}_{AA'}|) \cdot \frac{\bar{r}_{AB}}{|\bar{r}_{AB}|};$$

$$\bar{r}_{AB} = (X_B - X_A, Y_B - Y_A, Z_B);$$

$$\bar{r}_{AA'} = (0, 0, Z_0);$$

Длина тяги при $t \neq 0$:

$$l_i = \sqrt{r_{ix}^2 + r_{iy}^2 + r_{iz}^2};$$

Удлинение тяги:

$$\Delta l_i = -l_i + Z_0;$$

Компоненты реакции в тяге:

$$R_{ix} = k \cdot \Delta l_i \cdot \frac{r_{ix}}{l_i}; R_{iy} = k \cdot \Delta l_i \cdot \frac{r_{iy}}{l_i}; R_{iz} = k \cdot \Delta l_i \cdot \frac{r_{iz}}{l_i}.$$

Сумма реакций, возникающих во всех тягах относительно центра масс C :

$$\bar{R}_C = \sum \bar{R}_i; R_x = \sum R_{ix}; R_y = \sum R_{iy}; R_z = \sum R_{iz}.$$

Момент реакции в тяге относительно центра масс C :

$$\bar{M}_{iC} = \bar{r}_{BC} \times \bar{R}_i;$$

Сумма моментов реакций всех тяг относительно центра масс C :

$$\bar{M}_C = \sum \bar{M}_{iC}.$$

5. Связь между уравнениями (7.5) и (7.15). Покажем, что уравнения (7.15) являются обобщением уравнения (7.5). Пусть тяги не деформируемы. Рассмотрим свободные колебания твердого тела на маятниковых тягах. Для простоты выкладок и не умаляя общности будем считать, что пластические демпферы и вязкое демпфирование отсутствуют.

Если тяги не деформируются, то $\Delta l_i = 0$. Из геометрических соображений:

$$w = \sqrt{l_0^2 - u^2}. \quad (7.17)$$

Продифференцировав (7.17) два раза получим:

$$\ddot{w} = -\frac{u\ddot{u}}{\sqrt{l_0^2 - u^2}} - \frac{l_0^2 \dot{u}^2}{(l_0^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (7.18)$$

Подставляя (7.18) в 3-е уравнение (7.15), находим R :

$$R = -ml_0 \left(\frac{u\ddot{u}}{\sqrt{l_0^2 - u^2}} + \frac{l_0^2 \dot{u}^2}{(l_0^2 - u^2)^2} \right) - \frac{mgl}{\sqrt{l_0^2 - u^2}}. \quad (7.19)$$

При сделанных допущениях 1-е уравнение в (7.15) имеет вид

$$m\ddot{u}_c = R + 2m\dot{u} \cdot \omega - P_x - ma_x(t). \quad (7.20)$$

Подставив в (7.20) формулу для R (7.19), после некоторых преобразований получим (7.5).

Следует отметить, что при $P = 0$, $\alpha = 0$, $\ddot{x} = 0$, $\ddot{z} = 0$ переход в (7.5) к полярным координатам $u = l_0 \sin \varphi$ преобразует это уравнение к обычной форме уравнения математического маятника $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$.

Однако для описания вынужденных колебаний и учета пластических демпферов удобнее применять декартовы координаты.

6. Расчет с учетом ротационных движений грунта. Применим полученную выше математическую модель для исследования влияния на эффективность СИ ротационного движения грунта.

Вращательное ускорение грунта создает вращательное ускорение ЗО. Последнее вносит вклад в линейные ускорения точек, причем в зависимости от удаленности точек от центра инерции эти ускорения будут различными и увеличиваться с удалением точки от центра инерции. Абсолютное ускорение расположенной на периферии точки D будет выражаться формулой:

$$\vec{\xi}_D = \vec{\xi}_C + \ddot{\vec{\varphi}} \times \vec{r}_{DC} + \dot{\vec{\varphi}} \times (\dot{\vec{\varphi}} \times \vec{r}_{DC}). \quad (7.21)$$

Обозначения в (7.21) соответствуют обозначениям, приведенным выше.

Ниже приведены результаты исследования влияния ротационных движений грунта на абсолютные ускорения периферийных точек ЗО. Ускорения периферийных точек определялись по формуле (7.21).

Была рассмотрена модель со следующими исходными данными:

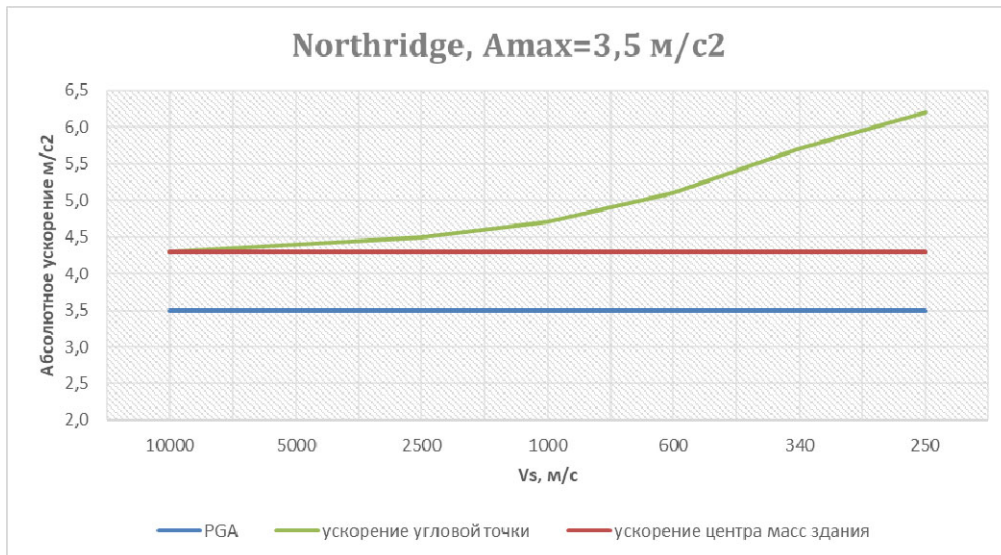
- $A = B = 25,5$ м;
- $l = 1,5$ м;
- $M = 11\,800$ тонн;
- $I_z = 1\,275\,000$ тонн м²;
- $n = 184$;

где A, B – размеры защищаемого объекта (ЗО) в плане, l – длина маятниковой тяги, M – масса ЗО, I_z – момент инерции ЗО, n – число маятниковых опор.

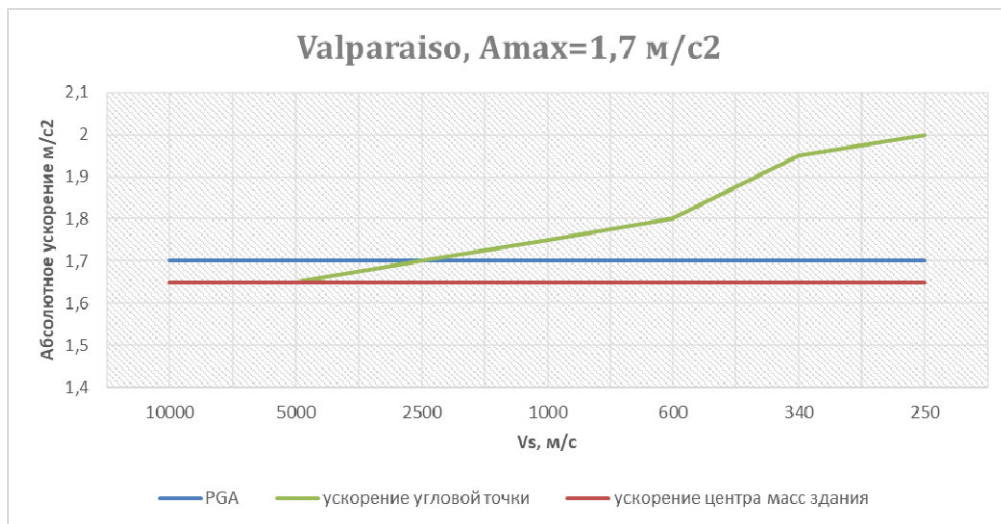
Расчёты выполнялись с учётом ротационной акселерограммы, полученной по интегральной модели волнового поля по методике Ю. П. Назарова [14, 15]. Интегральная модель сейсмического движения предполагает одинаковое движение грунта в некоторой области земной поверхности. Грунт в этом случае подобен твёрдому телу с шестью степенями свободы – тремя поступательными и тремя угловыми (ротационными) [13].

Рассматривалась реакция модели на 3 воздействия, заданных тремя поступательными акселерограммами и одной ротационной относительно вертикальной оси здания. Ротационная акселерограмма генерировалась каждый раз при задании различной скорости поперечной волны в слое грунта, находящегося непосредственно под подошвой фундамента. Исследовался диапазон акселерограмм от $v_s = 10\,000$ м/с как грунта очень жёсткого (скального) и до $v_s = 250$ м/с как грунта средней жёсткости (суглинок, глина). Графики ускорений периферийных точек сооружения в зависимости от фазовой скорости поперечной волны в грунте представлены ниже:

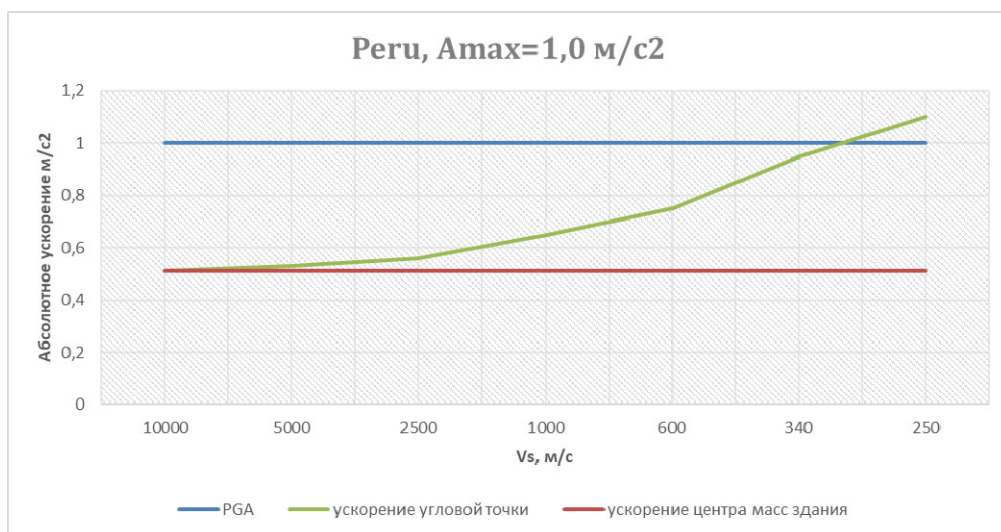
Результаты данного исследования показывают, что ротационная компонента воздействия, приводящая к вращению сейсмоизолированного объекта, значительно влияет на его динамику. На жёстких грунтах (v_s от 10 000 м/с до 1000 м/с) ускорение возрастает на 20–30 %, при приближении фазовой скорости к 250 м/с наблюдаются увеличения ускорений в 1,5–2 раза.



a – воздействие № 1



б – воздействие № 2



в – воздействие № 3

Рис. 7.38. Зависимость максимальных абсолютных ускорений угловых точек объекта от скорости поперечной волны под подошвой фундамента

7.5.8. Обобщенный метод главных координат для расчета сейсмоизолированных зданий

1. Для сооружения, расположенного на сейсмоопорах с нелинейными силовыми характеристиками принцип суперпозиции нагрузок неприменим, что делает невозможным прямое применение ЛСМ. Для учета фактора нелинейности силовых характеристик был разработан обобщенный метод главных координат [22]. Обобщение понимается как распространение метода главных координат на системы с локальными нелинейностями. Под локальными нелинейностями понимаются элементы, воздействие которых на систему можно считать сосредоточенными силовыми факторами – силами или моментами. Такими элементами являются, например, опоры с предварительным поджатием, люфтом, нелинейной силовой характеристикой и т. д. Предполагается, что без этих элементов рассматриваемая система является линейно упругой. Физическая идея предлагаемого метода расчета заключается в том, что в соответствии с принципом освобождаемости реакции нелинейных элементов рассматриваются как известные внешние силы по отношению к линейной части исходной системы. Таким образом, исходная нелинейная система заменяется линейной системой, внешняя нагрузка которой имеет неизвестные компоненты. Линейную систему можно назвать основной системой. Для расчета основной системы применяется метод главных координат (метод приведения к собственным формам). Для определения неизвестной части внешней нагрузки формируются уравнения, описывающие зависимость реакций нелинейных элементов от главных координат линейной части системы. В результате получаем единую бесконечную систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Ее решение – есть решение исходной задачи. Предлагаемый метод составления разрешающих уравнений можно назвать обобщенным методом главных координат (ОМГК).

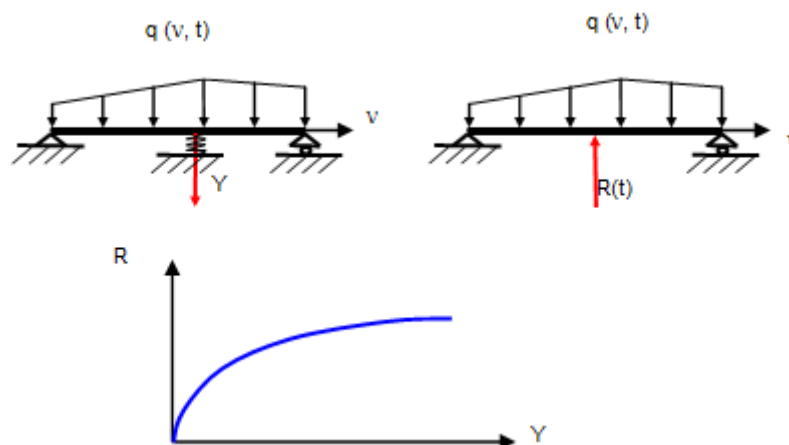


Рис. 7.39. Двухопорная линейноупругая балка с нелинейноупругой промежуточной опорой

Для системы с одним нелинейным элементом уравнения для определения главных координат записываются следующим образом:

$$m_i \ddot{x}_i + c_i x_i = -\alpha_i \tilde{R}(t) + \Phi_i(t), \quad (7.21)$$

$x_i(0) = x_{i0}$, $\dot{x}_i(0) = \dot{x}_{i0}$, $i = 1, 2, \dots, \infty$; $\varphi_i(v)$ – собственные формы системы без нелинейного элемента;

$$m_i = \int_0^l \mu \varphi_i^2(v) dv; \quad c_i = m_i \omega_i^2;$$

$$\Phi_i = \int_0^l q(v, t) \varphi_i(v) dv; \quad \alpha_i = \varphi_i(v^*),$$

где μ – погонная масса балки; ω_i – $i^{\text{я}}$ собственная частота линейной части системы; $\tilde{R}(t)$ – реакция нелинейного элемента, q – внешняя нагрузка. Уравнения, связывающие $R(t)$ и главные координаты x_i имеют вид

$$\tilde{R} = g(y, \dot{y}), \quad (7.22)$$

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i(t), \quad (7.23)$$

где y – перемещение точки v^* ; v^* – координата нелинейного элемента.

Система уравнений (7.21), (7.22), (7.23) является разрешающей.

В общем случае система с локальными нелинейностями разделяется на « r » линейных систем, соединенных « k » нелинейными элементами. Таким образом, система уравнений ОМГК имеет вид

$$m_{ir} \ddot{x}_{ir} + c_{ir} x_{ir} = -\sum_{k=1}^q \alpha_{irk} \tilde{R}_k + \Phi_{ir}, \quad (7.24)$$

$$x_{ir}(0) = x_{ir0}, \quad \dot{x}_{ir}(0) = \dot{x}_{ir0};$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \dots; \quad r = 1, 2, \dots, m.$$

$$\tilde{R}_k = G_k(y_1, y_2, \dots, y_q; \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_q),$$

$$y_k = \sum_{\substack{i=1, 2, \dots, \infty \\ r=1, 2, \dots, m}} \alpha_{irk} x_{ir}.$$

Вводя сквозную нумерацию собственных форм, уравнения (7.24) можно записать в матричной форме:

$$M\ddot{X} + CX = -AR + \Phi, \quad (7.25)$$

$$X(0) = X_0, \dot{X}(0) = \dot{X}_0;$$

$$\tilde{R} = G(Y, \dot{Y}), \quad (7.26)$$

$$Y = A^T X. \quad (7.27)$$

Из (7.25) и (7.27) получаем:

$$M\ddot{X} + CX = -AG \left[A^T X, (A^T X)' \right] + \Phi(t). \quad (7.28)$$

Практически, решение уравнений (7.28) можно получить, переходя к редуцированной системе уравнений, т. е. учитывая конечное число собственных форм.

Преимущества предлагаемого подхода заключается в том, что, исходя из физических соображений, можно выбрать для расчета лишь небольшое число собственных форм линейной части системы. Тем самым разумно уменьшается размерность задачи. При этом легко физически интерпретируются результаты решения. В этом методе сложный характер распределения массовых и жесткостных характеристик модели учитывается интегрально при определении параметров собственных форм.

От дифференциальных уравнений (7.21), (7.22), (7.23) можно перейти к интегральным уравнениям. Выразив x_i через интеграл Дюамеля (см. формулу 3.39) и подставив полученное выражение и $\tilde{R} = g(y, \dot{y})$ в (7.23), приходим к уравнению

$$y(t) = \int_0^t k(t - \xi) g[y(\xi)] + F(t),$$

где

$$k(t - \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-\alpha_i \sin \omega_i (t - \xi)}{m_i \omega_i}, \quad (7.29)$$

$$F(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Phi_i(\xi) \cdot \sin \omega_i (t - \xi)}{m_i \omega_i} d\xi + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left(x_{i0} \cos \omega_i t + \frac{\dot{x}_{i0}}{\omega_i} \sin \omega_i t \right).$$

Практически решение уравнений (7.29) получаем, переходя к редуцированной системе уравнений, то есть учитывая конечное число собственных форм.

Обобщая (7.29), получаем интегральную форму ОМГК в матричном виде:

$$\begin{aligned}
Y(t) = & -A^T(t) \int_0^t \Omega(t-\xi) A(\xi) G[Y(\xi), \dot{Y}(\xi), \xi] d\xi + \\
& + A^T(t) \int_0^t \Omega(t-\xi) \Phi(\xi) d\xi + A^T(t) N(t).
\end{aligned}
\tag{7.30}$$

В (7.30) компоненты диагональной матрицы Ω определяются параметрами собственных форм линейной системы, а матрица N начальными условиями. Для редуцированных систем уравнений получаем

$$Y(t) = \int_0^t K_n(t, \xi) G[Y(\xi), \dot{Y}(\xi)] d\xi + F_n(t),
\tag{7.31}$$

где

$$K_n(t, \xi) = -A_n^T(t) \Omega_n(t-\xi) A_n(\xi);$$

$$F_n(t) = \int_0^t A_n^T(t) \Omega_n(t-\xi) \Phi_n(\xi) d\xi + A_n^T(t) N_n(t);$$

n – число учитываемых собственных форм.

2. Применение ОМГК к учету упругих колебаний ЗО. ОМГК был адаптирован к решению задач сейсмоизоляции [21] и программно реализован в ПК Ing+.

Алгоритм решения выглядит следующим образом. Пусть силовая характеристика опоры СИ имеет вид, показанный на рис. 7.40.

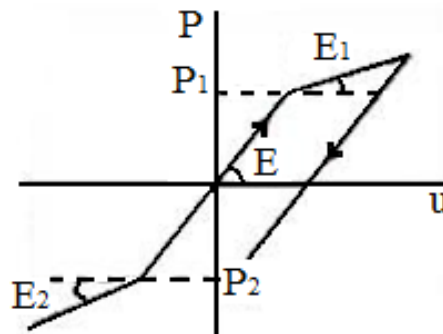


Рис. 7.40. Силовая характеристика опоры

Эта силовая характеристика является суммой двух силовых характеристик, показанных на рис. 23, б, в (см. также п. 1.4.2)

$$R = \tilde{\tilde{R}}(y) + \tilde{R}(y, \dot{y}).
\tag{7.32}$$

За основную систему принимается упругое здание, расположенное на линейно-упругих элементах с силовыми характеристиками $\tilde{\tilde{R}}(y, \dot{y})$. Для этой линейной системы находят собственные частоты, формы колебаний и формируют левую часть уравнений (7.21). Эту левую часть дополняют слагаемым: $2\zeta\sqrt{M^{-1} \cdot C} \cdot \dot{X}$, которое учитывает диссипацию. Реакция нелинейных элементов с силовыми характеристиками $\tilde{R}(y, \dot{y})$ входит в правую часть уравнения (7.21).

На основе вышеописанного алгоритма в ПК Ing+ была разработана опция «Нелинейный динамический анализ». Опция предназначена для учета упругих колебаний ЗО, расположенного на СИ с нелинейными силовыми характеристиками.

3. Численный анализ. Исследуем пространственную работу девятиэтажного крупнопанельного здания, расположенного на СИ, при сейсмических воздействиях. Расчет выполнен помощью ПК Ing+2007.

Геометрия здания была задана в виде пространственной конечно-элементной модели, состоящей из 11101 элементов и 9060 узлов (рис. 7.41, а).

Структура ССИ определяется условиями ее использования – весовыми характеристиками здания, геометрической компоновкой ССИ, увязкой с несущими элементами здания и его архитектурой.

На основании статического расчета, конкретных условий размещения сейсмоопор на фундаменте и конструктивного решения были выбраны РМО GZY500V5A (37 штук) со следующими характеристиками: $P_1 = 47$ кН, жесткость в упругой стадии $E = 9930$ кН/м, жесткость в пластической стадии $E_1 = 1280$ кН/м. Параметры силовых опор показаны в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Параметры силовых характеристик опор

Силовая характеристика	$f_T, \text{ м/с}^2$	$\omega, 1/\text{с}$	$\omega_1, 1/\text{с}$
РМО	0,289	7,82	2,76

В табл.7.3:

$$f_T = \frac{R_T}{Q_{on}}; \omega = \sqrt{\frac{E \cdot g}{Q_{on}}}; \omega_1 = \sqrt{\frac{E_1 \cdot g}{Q_{on}}},$$

где Q_{on} – вес здания, приходящийся на одну опору.

В качестве воздействия использовались 12 акселерограмм с различными преобладающими частотами. Масштабными коэффициентами они были

преобразованы в акселерограммы с одинаковым пиковым значением ускорения $a_{\max} = 4 \text{ м/с}^2$.

Нелинейность опор вводилась в опции MicroFe «нелинейный анализ» билинейной диаграммой с упругой разгрузкой (рис. 7.40).

Для расчета в качестве обобщенных главных координат были выбраны формы свободных колебаний, полученные для линейно работающих резино-металлических опор с жесткостью E_1 .

Результаты расчетов приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Результаты расчетов численного анализа

№ воздействия	РМО	
	Абсол. ускор., м/с^2 верх/сред/нижн.	Относит. перем., м верх/сред/нижн.
1	2,8/2,1/1,8	0,30/0,26/0,23
2	1,4/1,1/0,9	0,158/0,13/0,11
3	1,2/0,75/0,85	0,085/0,07/0,06
4	2,2/1,8/1,6	0,28/0,23/0,20
5	2,5/2/1,8	0,30/0,25/0,20
6	2,3/1,2/1	0,18/0,16/0,13
7	2,5/1,6/1,4	0,25/0,20/0,16
8	3/2,4/2	0,38/0,30/0,28
9	1,3/1/0,90	0,14/0,12/0,10
10	1,6/1,3/1,2	0,20/0,16/0,15
11	1,1/0,6/0,50	0,06/0,055/0,045
12	1,7/1/1	0,16/0,13/0,11
Сред. знач. по верх. точке	1,966667	0,20775
Дисперсия	0,43697	0,009161

При отсутствии системы сейсмоизоляции максимальное значение относительных горизонтальных перемещений при тех же сейсмических воздействиях на верхней точке здания равно 0,037 м, а максимальное значение абсолютного ускорения достигает 26,4 м/с^2 .

Для высоких зданий достаточно точные результаты дает конечно-элементный расчет балочной модели здания – рис. 7.41, б.

Анализ расчетов показывает, что в большинстве случаев учет упругих колебаний изменяет абсолютные ускорения здания (по сравнению с результатами расчетов нелинейной системы с одной степенью свободы) на 10–15 %. Однако в некоторых случаях эта разница может достигнуть величины 50–70 %.

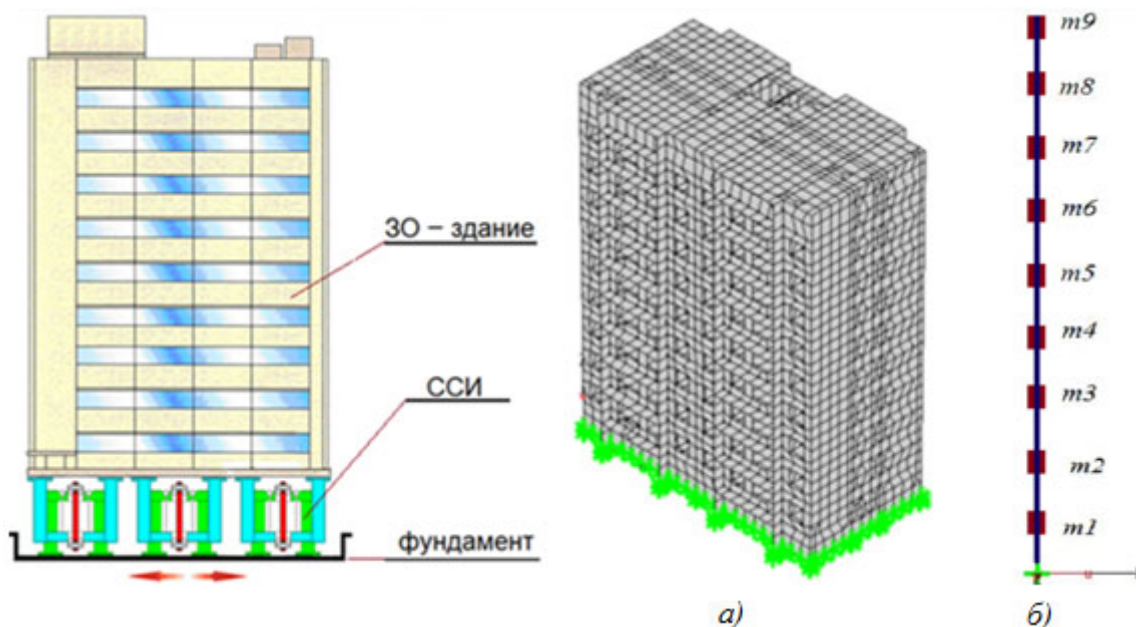


Рис. 7.41. Схема девятиэтажного здания, расположенного на системе сейсмоизоляции (ССИ): а – конечно-элементная модель; б – эквивалентная балочная модель

7.5.9. Вероятностный расчет сейсмоизоляции

1. Сейсмические воздействия. Вследствие стохастической природы землетрясений сейсмические воздействия являются случайными функциями. Поэтому наиболее адекватным подходом к оценке эффективности сейсмоизоляции является вероятностный (стохастический) анализ сейсмических процессов [6].

При стохастической постановке задачи основной проблемой является формирование сейсмических воздействий. При моделировании таких воздействий случайными процессами акселерограмма представляется обычно в виде стационарного эргодического случайного процесса. Общие принципы и основные формулы для описания таких воздействий изложены в гл. 5. В имеющихся исследованиях из-за сложности расчетов в стохастической постановке и ограниченности исходной информации о реальных процессах спектральная плотность обычно принимается максимально простой: постоянной (белый шум) [35] или с одной преобладающей частотой (узкополосный процесс) [9].

При использовании таких традиционных моделей сейсмического воздействия невозможно добиться одновременно соответствия ускорения и смещения грунта их реальным значениям. Однако последнее условие принципиально важно для расчета сейсмоизолированных сооружений. Ска-

занное приводит к необходимости особого подхода к заданию спектральных плотностей при статистическом анализе сейсмоизолированных систем. Необходимо, чтобы одновременно значение автокорреляционной функции смещения в нуле соответствовало среднему уровню расчетных смещений, а значение автокорреляционной функции ускорения в нуле соответствовало среднему уровню расчетных ускорений. Эта проблема рассмотрена в [31]. Для того, чтобы добиться указанного условия, предлагается представить автокорреляционную функцию входного процесса в виде суммы двух составляющих:

$$K_y(\tau) = \sum_{i=0}^1 U_{0i}^2 \cdot e^{-\alpha_i \tau} \left(\cos \beta_i \tau + \frac{\alpha_i}{\beta_i} \sin \beta_i \tau \right), \quad (7.33)$$

где U_{0i} – амплитуда смещений; β_i – преобладающая частота воздействий; α_i – показатель узкополостности воздействия.

При этом автокорреляционная функция ускорений принимает вид

$$K_{\ddot{y}}(\tau) = -\sum_{i=0}^1 U_{0i}^2 \cdot e^{-\alpha_i \tau} \cdot (\beta_i^2 - \alpha_i^2) \times \\ \times \left[(\alpha_i^2 - \beta_i^2) \left(\cos \beta_i \tau + \frac{\alpha_i}{\beta_i} \sin \beta_i \tau \right) - 2\alpha_i \beta_i \left(-\sin \beta_i \tau + \frac{\alpha_i}{\beta_i} \cos \beta_i \tau \right) \right] - \quad (7.34) \\ - 2 \cdot \left[(-2\alpha_i^2 \beta_i^2) \left(-\cos \beta_i \tau - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \sin \beta_i \tau \right) + (\alpha_i \beta_i^3 - \alpha_i^3 \beta_i) \left(\sin \beta_i \tau - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \cos \beta_i \tau \right) \right].$$

В отличие от традиционных, предлагаемая модель воздействия характеризуется «двугорбной» спектральной плотностью. Первый максимум соответствует преобладающему периоду на сейсмограмме, а второй – на акселерограмме. Такое воздействие дает одновременно фактические средние значения смещения и ускорения. Для генерации ансамбля случайных сейсмических воздействий, соответствующих (7.34) используется специальная программа [29]. Эта методика генерации случайных сейсмических воздействий была использована ниже для поиска оптимального демпфирования.

Еще один способ формирования сейсмических воздействий при отсутствии их реальных характеристик это синтезирование моделей воздействия по методу СА-482. Этот метод изложен в Руководящем Техническом Материале (РТМ) 108.020.37-81 («Оборудование атомных энергетических установок. Расчет на прочность при сейсмическом воздействии»). Синтезированная модель сейсмического воздействия СА-482 состоит из синтезированной акселерограммы и соответствующих ей обобщенных безразмерных спектров коэффициента динамичности (СКД). Обобщенные СКД построены на основе статистического анализа и обработки более 100 наиболее представительных инструментальных (реальных) акселерограмм. их спектров ответа, а также

нормативных спектров ответа. Синтезированная акселерограмма СА-482 представляет собой псевдогармонический процесс с непрерывно возрастающей частотой и переменной амплитудой. Данная акселерограмма создавалась по специальной методике. Рассматривался квазисинусоидальный колебательный процесс с непрерывно и возрастающей частотой. Задаваемая в различных интервалах частоты скорость ее изменения, обеспечивала требуемую глубину резонанса осциллятора для выделенных частотных зон. При этом спектры ответа в данных зонах плавно и непрерывно (без существенных провалов и пиков) возрастали, выходили на постоянный уровень и, наконец, снижались. В начале процесса амплитуда акселерограммы (A_{\max}) была максимальной, а затем быстро снижалась в два раза до своего нового значения.

Особенность таких акселерограмм в том, что их продолжительность составляет несколько секунд. Продолжительность реальных воздействий несколько десятков секунд. Сокращение длительности воздействий стало возможным благодаря квазисинусоидальному характеру процесса и плавному изменению его частоты.

В окончательном исполнении эта синтезированная акселерограмма получила наименование СА-482 (версия 4, 1982 года).

2. Оптимизация демпфирования на основе стохастического анализа динамики ССИ. Постановка задачи. Рассмотрим оптимизацию величины ζ в простейшей линейной модели СИС (см 7.5.2):

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u = -\ddot{x}(t). \quad (7.35)$$

Эффективность ССИ определяется, в первую очередь, снижением максимума абсолютных ускорений ЗО:

$$a_{30} = \max_t |\ddot{u}_{\text{абс}}| = \max_t |\ddot{u}(t) + \ddot{x}(t)|. \quad (7.36)$$

Так как воздействиями $\ddot{x}(t)$ является ансамбль случайных функций, то a_{30} случайная величина. Примем за критерий оптимизации минимум математического ожидания a_{30} при варьировании безразмерного коэффициента демпфирования ζ . Таким образом, функция цели:

$$Cr = \min_{\zeta} \tilde{a}_{30}, \quad (7.37)$$

где \tilde{a}_{30} – математическое ожидание случайной величины a_{30} (математическое ожидание абсолютной величины абсолютных ускорений ЗО).

При оптимизации какого-либо параметра вводится также система ограничений. При минимизации \tilde{a}_{30} надо вводить ограничение на максимум перемещений ЗО для каждой реализации воздействий:

$$u = \max_t |u_i(t)| \leq h.$$

где h – максимально возможные по конструктивным соображениям перемещения ЗО относительно фундамента (за счет работы ССИ), i -номер реализации воздействия.

Пример оптимизации безразмерного коэффициента демпфирования по критерию (7.37).

Выполним оптимизацию ζ при следующих исходных данных:

1. Частота сейсмоизолированной системы в (7.35) $\omega = 2,56$ 1/с (0,4 Гц).
2. В качестве исходных данных для построения пакета расчетных акселерограмм приняты расчетные значения пиковых смещений и ускорений основания $U_{\max} = 0,2$ мм $\ddot{U}_{\max} = 2,3$ м/с². Преобладающие периоды воздействия приняты равными 1,3 с и 0,5 с.

3. $h = 500$ мм.

Коэффициент ζ линейного демпфирования варьировался от 0 до 1.

Методом статистического моделирования был получен пакет искусственных акселерограмм объемом $N = 300$. Статистические характеристики процесса, а также спектральная плотность сейсмического воздействия показаны на рис. 7.42. Пример реализации акселерограммы, велосигаммы и сейсмограммы приведены на рис. 7.43.

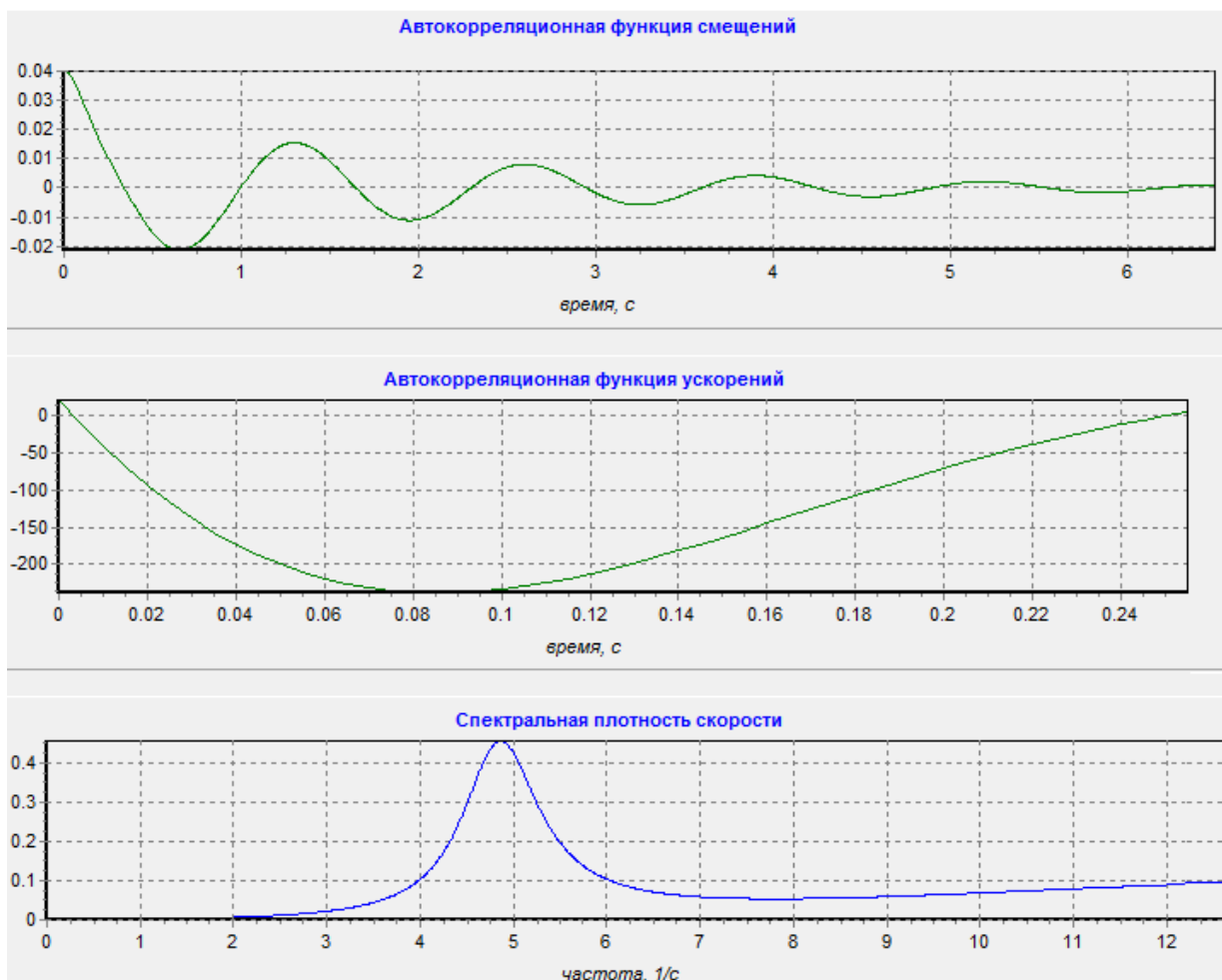


Рис. 7.42. Автокорреляционные функции смещения и ускорения, а также спектральная плотность скорости

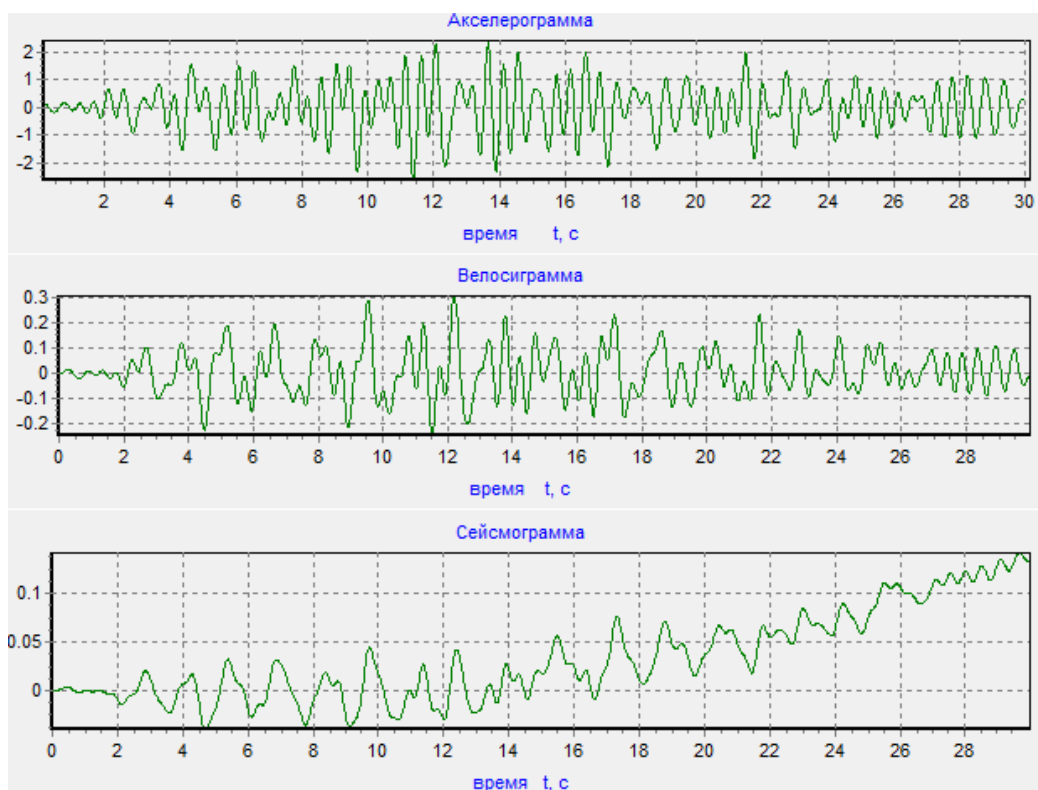


Рис. 7.43. Пример реализации расчетной акселерограммы

Поиск оптимального демпфирования осуществлялся через определение отклика с последующим осреднением. Пример реализации расчета показан на рис. 7.44.

Затем были вычислены математические ожидания M и среднеквадратические отклонения σ указанных показателей, построены функции плотности распределений рассматриваемых величин, а также соответствующие гистограммы распределений.

Результаты приведены в табл. 7.5 и на рис. 7.45. Анализ результатов моделирования показал, что характеристики (усилия, смещения, ускорения) работы сейсмоизолированной системы описываются логнормальным законом распределения.

Таблица 7.5

Результаты статистического анализа показателей ускорений и смещений для различных коэффициентов демпфирования

ζ	ускорения, m/s^2		смещения, м	
	σ	M	σ	M
0	0.1316	0.7529	0.0268	0.1123
0.1	0.0802	0.4680	0.0118	0.0682
0.2	0.0835	0.5086	0.0118	0.0590
0.3	0.0918	0.6108	0.0076	0.0545

ζ	ускорения, м/с^2		смещения, м	
	σ	M	σ	M
0.5	0.1389	0.8359	0.0107	0.0405
0.7	0.1634	1.0779	0.0056	0.0395
1	0.2496	1.4291	0.0063	0.0311

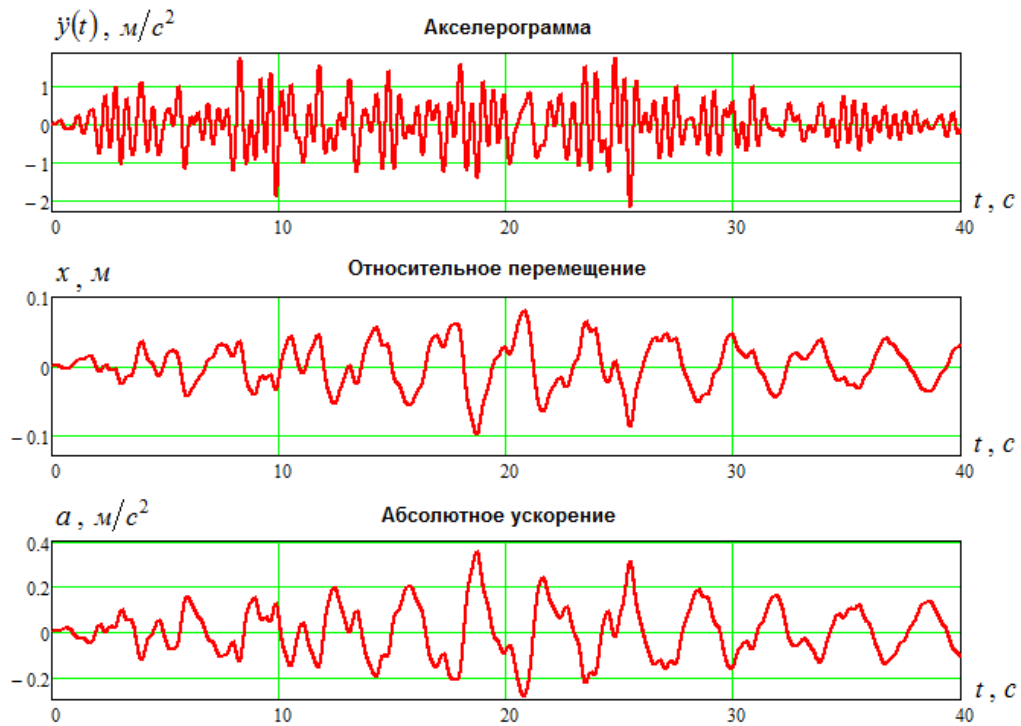


Рис. 7.44. Пример реализации варианта расчета на синтетическую акселерограмму

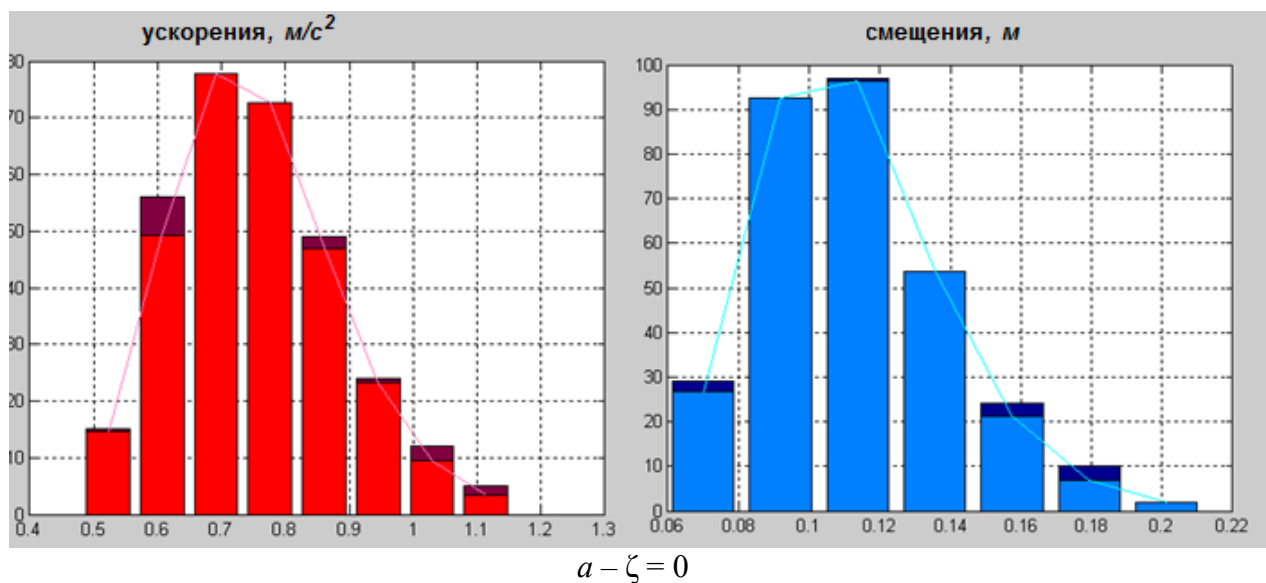
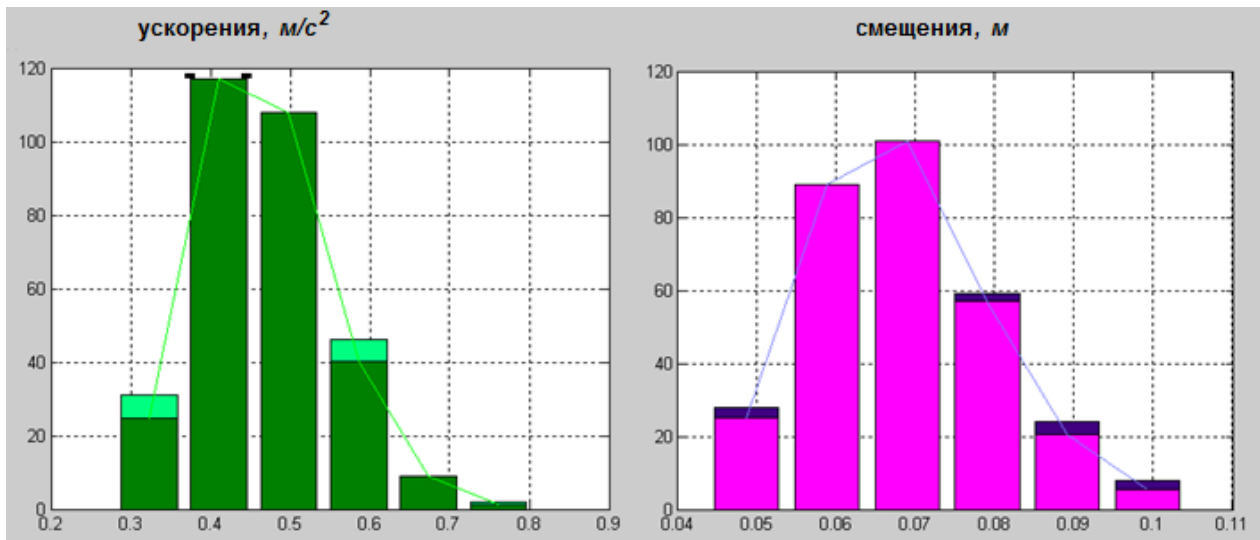
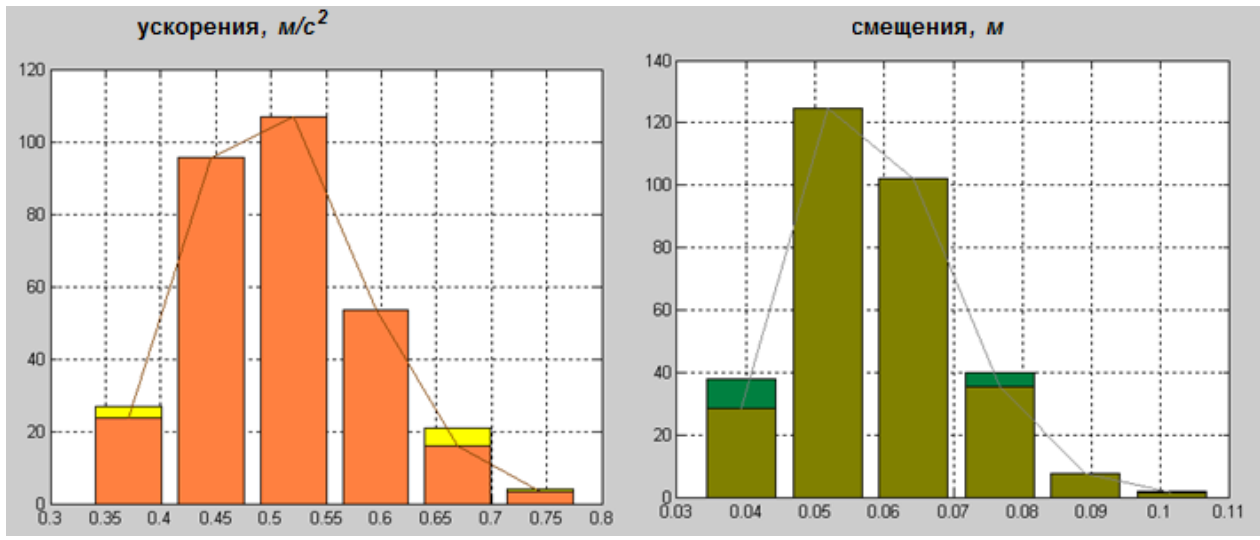


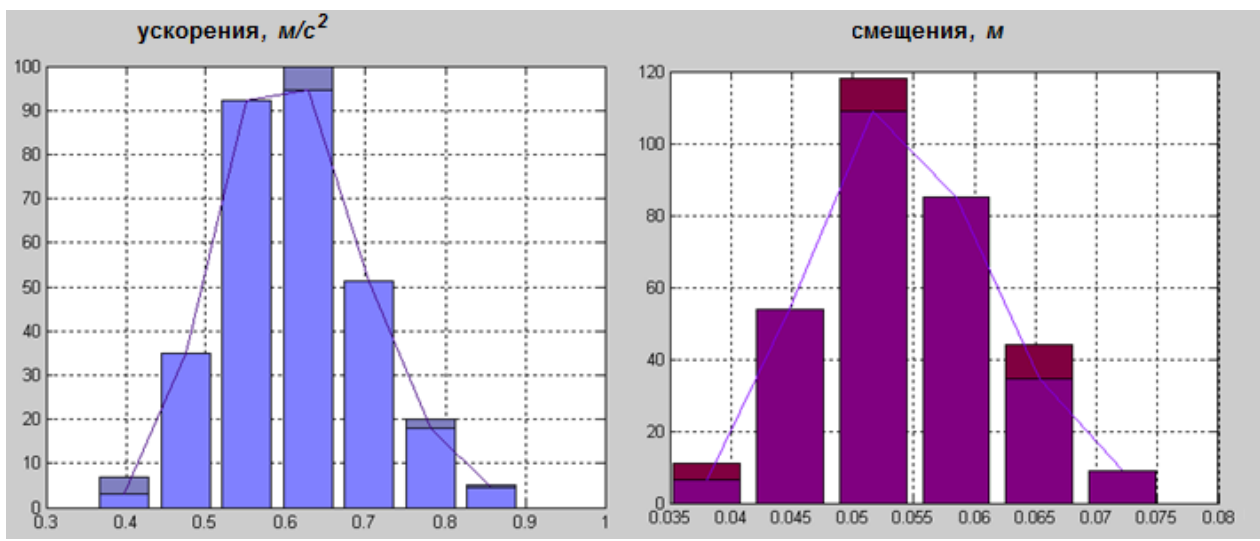
Рис. 7.45, начало. Гистограммы распределения максимальных ускорений и смещений



$\delta - \zeta = 0,1$



$\delta - \zeta = 0,2$



$\delta - \zeta = 0,3$

Рис. 7.45, продолжение

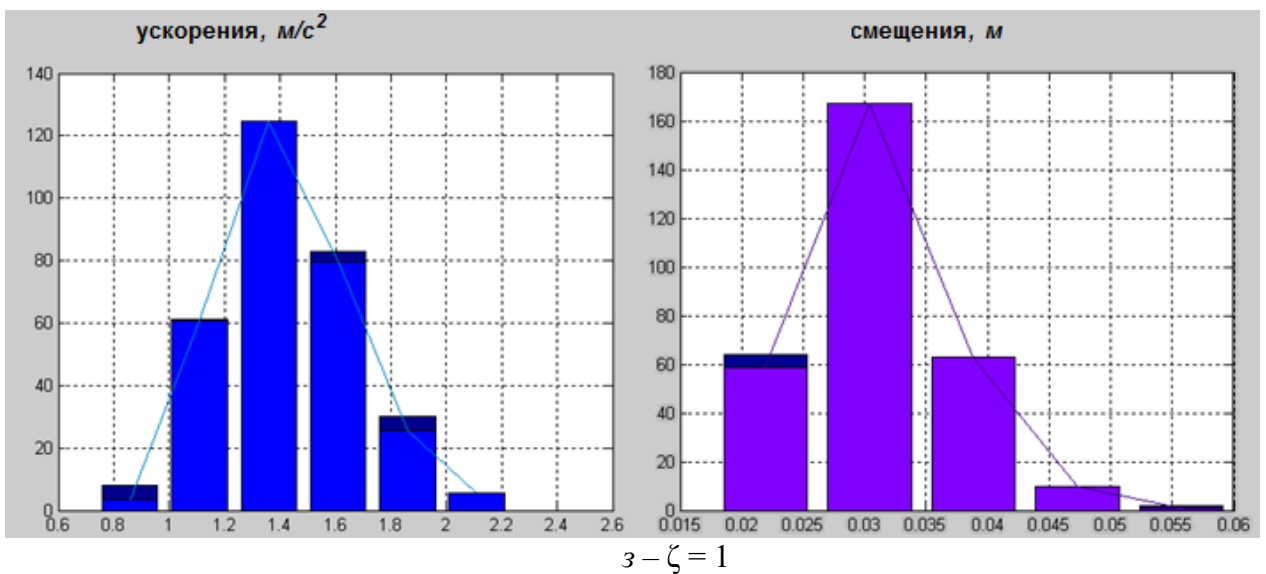
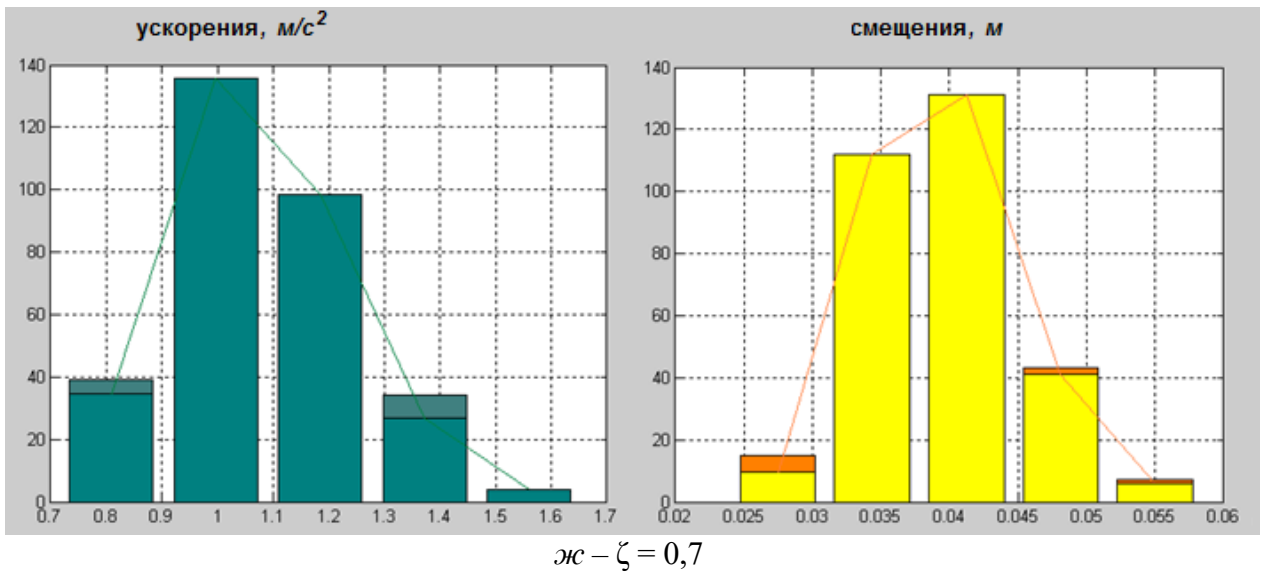
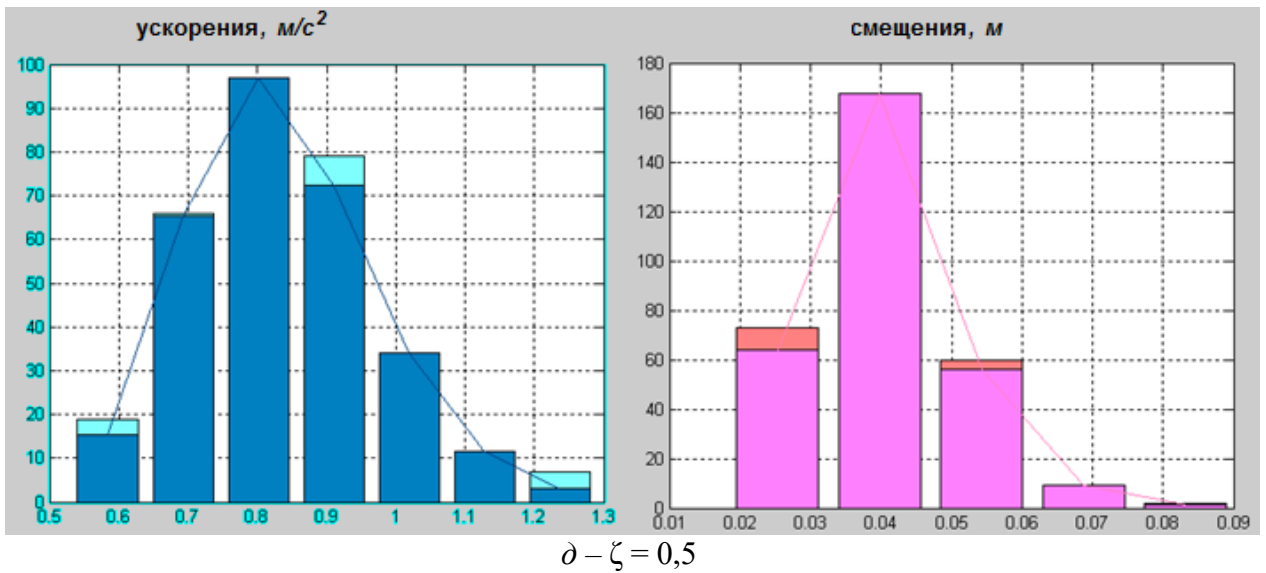


Рис. 7.45, окончание

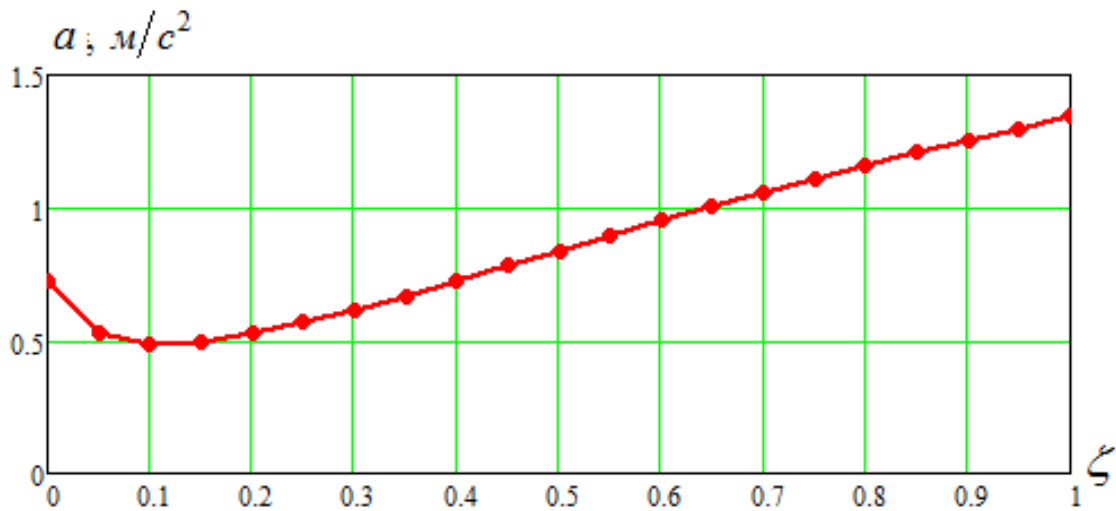


Рис. 7.46. Зависимость абсолютных ускорений от коэффициента демпфирования

В результате расчетов на 300 акселерограмм были получены смещения и ускорения при разных значениях ζ (рис. 7.46). Согласно рис. 7.46 – оптимальный коэффициент $\zeta = 0,1$.

3. Минимизации дисперсии ускорений. Можно выбрать и другой критерий оптимизации:

$$Cr = \min_{\zeta} \sqrt{D}, \quad (7.38)$$

где D – дисперсия абсолютных ускорений ЗО.

Если критерий (7.37) минимизирует абсолютные значения абсолютных ускорений ЗО, то критерий (7.38) минимизирует их среднеквадратичные значения. При таком критерии можно избежать вычисления и обработки большого количества длительных по времени процессов и применить аналитические методы. Так как мы считаем, что сейсмические воздействия в правой части (7.35) есть эргодические стационарные процессы, то и изменения во времени $\ddot{u}_{\text{абс}}$ тоже являются такими же процессами. Основные параметры таких процессов могут быть получены из их спектральной плотности. В частности

$$D = \int_0^{\infty} S_{\ddot{a}}(\lambda) d\lambda. \quad (7.39)$$

где $S_{\ddot{a}}(\omega)$ – спектральная плотность абсолютных ускорений ЗО:

$$S_{\ddot{a}}(\lambda) = F_{\text{вх}}(\lambda) S(\lambda); \quad (7.40)$$

$F(\lambda)$ – передаточная функция; $S_{\text{вх}}(\lambda)$ – спектральная плотность акселерограммы на входе.

В случае перехода от ускорений основания к абсолютным ускорениям ЗО передаточная функция имеет следующий вид (см. глава 5):

$$F(\lambda) = \frac{1 + \frac{4 \cdot \zeta^2 \cdot \lambda^2}{\omega^2}}{\left[1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right]^2 + \frac{4 \cdot \zeta^2 \cdot \lambda^2}{\omega^2}}. \quad (7.41)$$

Для синтетических акселерограмм $S_{\text{вх}}(\varpi)$ определяется по формуле Хинчина-Винера:

$$S(\varpi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \varpi \tau \, d\tau.$$

Определенные трудности возникают при оперировании реальными акселерограммами [5].

Если имеется набор из N реализаций $x_k(t)$, $(k-1)T \leq t \leq kT$, $k = 1, 2, \dots, N$, стационарного эргодического случайного процесса $\{x(t)\}$, то оценка спектральной плотности имеет вид [16]:

$$S_{\text{вх}}(f) = \frac{2}{N \cdot T} \sum_{k=1}^N X_k(f, T)^2. \quad (7.42)$$

где T – длина каждого процесса; $X_k(f, T)$ – финитное преобразования Фурье для k -той реализаций:

$$X_k(f, T) = \int_0^T x_k(t) \cdot e^{-j2\pi f \cdot t} \, dt. \quad (7.43)$$

Применительно к реализации случайного процесса, пример определения $X_k(f, T)$ с помощью математического пакета «MathCad» показан на рис. 7.47 (частота среза – 33 Гц). Далее последовательно используются формулы (7.39–7.43). В результате варьирования коэффициента линейного демпфирования ζ от 0 до 1 получаем следующую зависимость дисперсии процесса от ζ – рис. 7.48.

Как мы видим, оптимизация как по критерию (7.37), так и по критерию (7.38) дает близкие результаты.

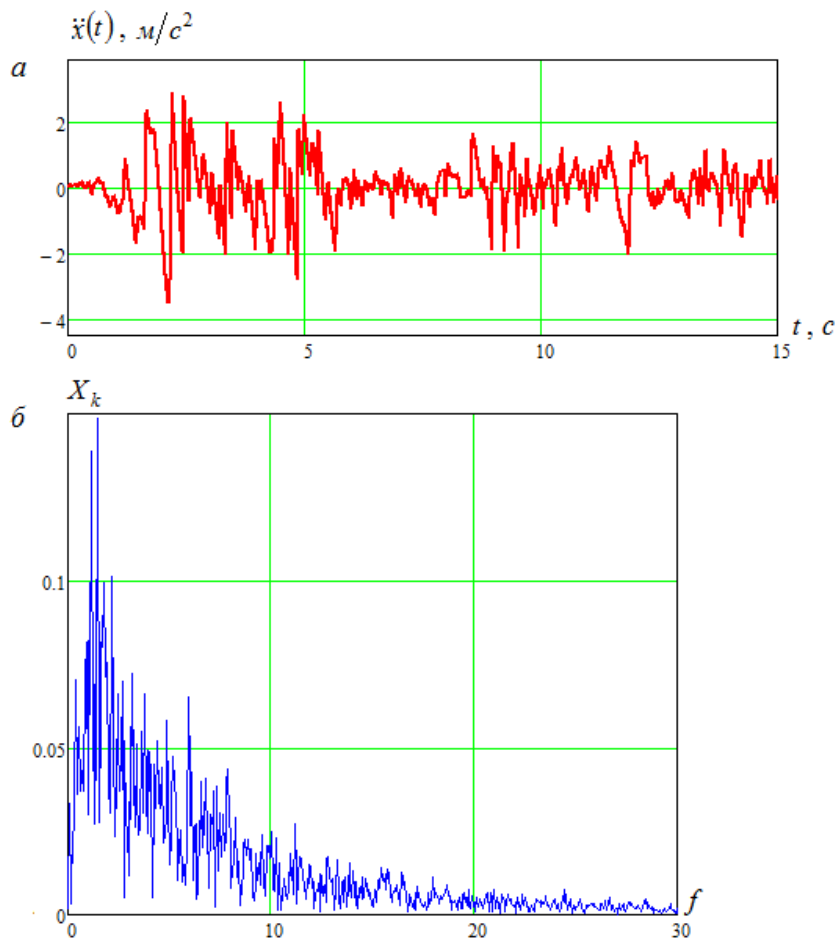


Рис. 7.47. Пример определения конечного преобразования Фурье:
 а – нестационарное сейсмическое воздействие;
 б – конечное преобразование Фурье данного воздействия

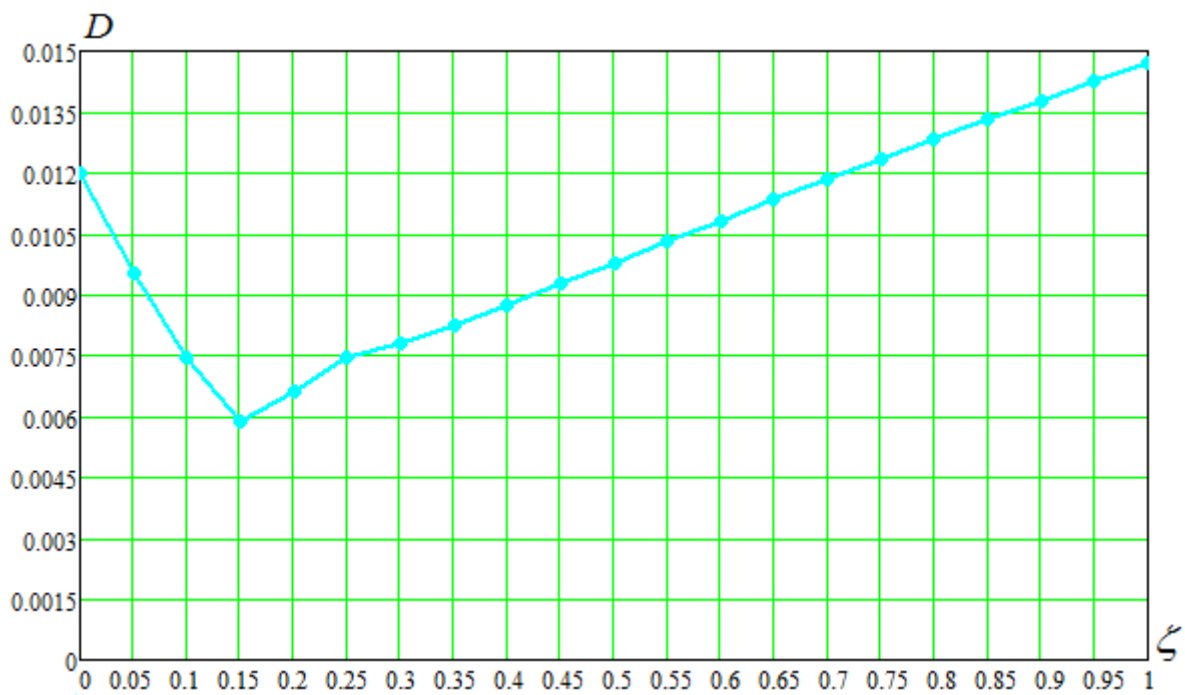


Рис. 7.48. Зависимость дисперсии процесса от коэффициента демпфирования

4. Нелинейная постановка оптимизационной задачи. Для нелинейной модели использование передаточной функции невозможно. Поэтому надо выполнять прямое усреднение отклика.

Уравнение колебаний нелинейной системы без учета вертикального воздействия имеет вид (см. п. 6.5):

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u + f(u, \dot{u}) = -\ddot{x}(t). \quad (7.44)$$

Модель (7.44) оптимизировалась по критерию (7.37). Варьируемым параметром было значение f_T . Этот параметр варьировался от 0 до 0,3. Возможность варьирования этим параметром показана выше в п.п. 7.5.4, 7.5.5. Два других параметра билинейной диаграммы фиксировались: $\omega = 20$ 1/с, $\omega_1 = 25$ 1/с. Расчет был произведен на 300 синтетических воздействий. Результаты статистически обрабатывались. Результаты обработки приведены на рис. 7.49. Из этого рисунка видно, что оптимум демпфирования при такой постановке задачи также существует.

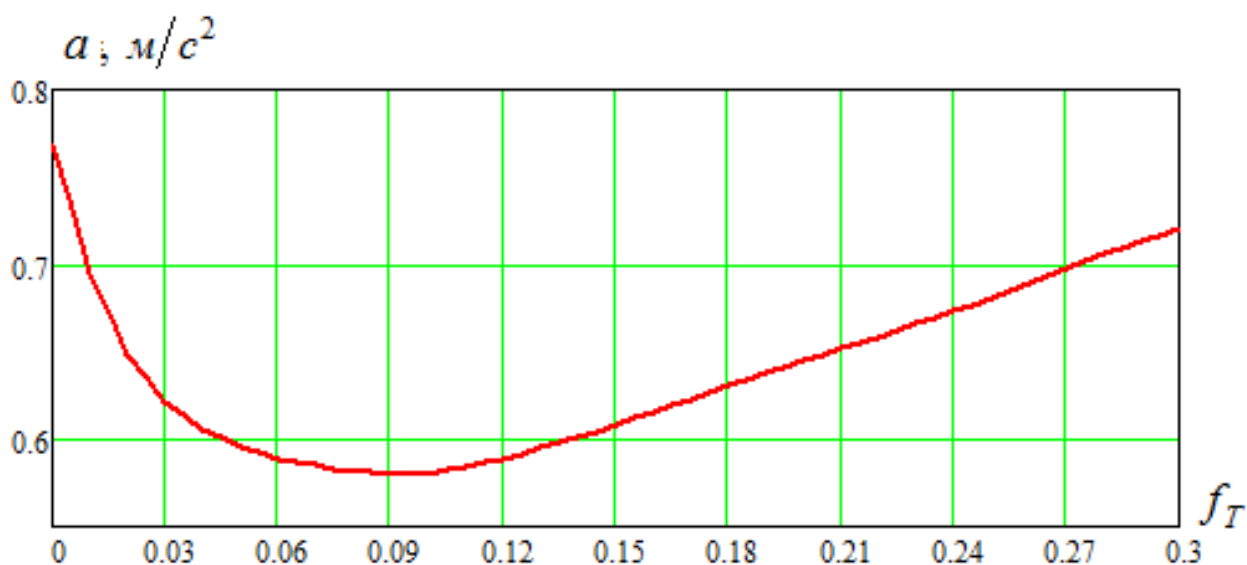


Рис. 7.49. Результаты расчета по нелинейной модели

7.5.10. Методика определения пластического ресурса

1. Если применяются пластические демпферы, то при сейсмическом воздействии возникает циклическое нагружение демпферных стержней. Так как, они работают в упругопластической зоне, то становится актуальной проблема малоциклового усталости стержней. Иначе говоря, необходимо определить число циклов, при котором произойдет разрушение. Если в процессе сейсмического воздействия число циклов нагружения демпферных стержней не превзойдет допустимого, то система сейсмоизоляции работоспособна

и у нее имеется требуемый пластический ресурс. Методика определения пластического ресурса должна состоять из следующих этапов [10]:

- решение динамической задачи и определение числа циклов нагружения;
- распределение по группам числа циклов нагружения с различным уровнем перемещений;
- переход от перемещений к максимальным деформациям;
- по имеющимся критериям (формула Коффина-Менсона и правило Палмгрема-Майнера [16]) установление допускаемого числа циклов и пластического ресурса стержня.

Решение динамической задачи по модели (7.44) дает решения, графический вид которых показан на рис. 7.51. Как видно из рис. 7.51 в динамическом процессе происходит циклическое нагружение стержней с различной амплитудой. Если рассмотреть колебания за относительно небольшой промежуток времени, то картина циклов нагружения становится достаточно наглядной – рис. 7.50. Из решения динамической задачи определяется число циклов с различной амплитудой по перемещению.

Затем перемещения пересчитываются в деформацию. При изгибе стержня такой пересчет можно выполнить по формулам, предложенным, например, в [16, 28]. Определение допускаемого числа циклов и пластического ресурса стержня возможно по методике, описанной в [28], где используется критерий малоциклового прочност, основанный на линейном суммировании усталостных d_c (циклические деформации) и квазистатических d_s (односторонне накопленные деформации) повреждений.

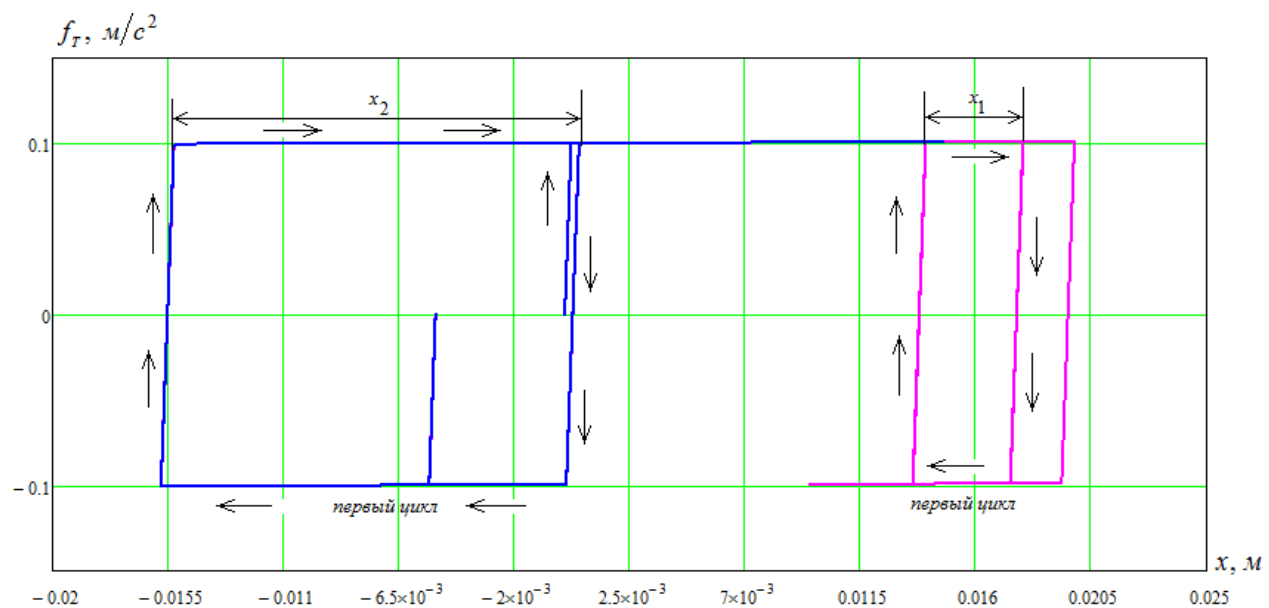


Рис. 7.50. Пример определения циклов нагружения с различной амплитудой по перемещению

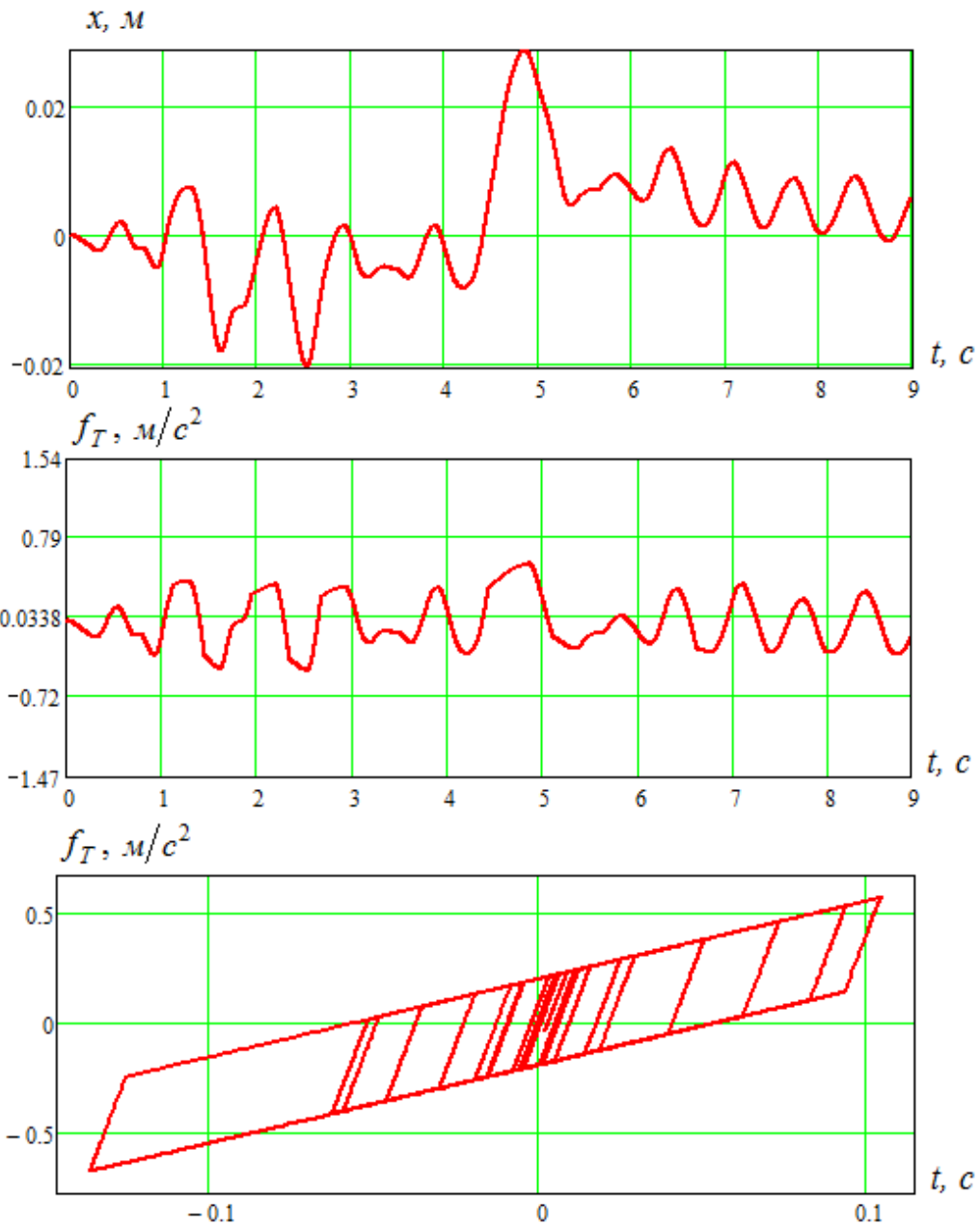


Рис. 7.51. Пример динамического расчета системы с одной степенью свободы с нелинейным демпфированием: *a* – процесс изменения относительного перемещения $u(t)$ во времени; *b* – процесс изменения реакции пластического демпфера во времени; *в* – зависимость реакции пластического демпфера от относительных перемещений

Чтобы пластический ресурс не был превзойден, должно выполняться неравенство:

$$d_c + d_s \leq 1, \quad (7.45)$$

где доля усталостного повреждения определяется по формуле

$$d_c = \int_1^{N_k} \frac{dN}{N_{ci}}, \quad (7.46)$$

где N – число циклов нагружения; N_k – число циклов до разрушения; N_{ci} – предельное число циклов, определяемое для заданной в цикле деформации по формуле Коффина-Менсона [16]:

$$\varepsilon_{ci} \cdot N_{ci}^{0,5} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-\psi},$$

где ε_{ci} – величина пластической деформации в цикле; ψ – относительное остаточное сужение материала.

Односторонне накопленная деформация определяется по формуле

$$d_s = \int_0^{\varepsilon_{\max}} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_B}, \quad (7.47)$$

где ε – односторонне накопленная деформация; ε_{\max} – односторонне накопленная деформация к моменту разрушения; ε_B – величина пластической деформации, соответствующей временному сопротивлению.

Если после расчетов неравенство (7.45) не выполняется, нехватку пластического ресурса можно устранить, варьируя геометрией и материалом стержней.

2. Числовой пример. В качестве примера рассмотрим схему демпфирования со следующими параметрами:

- защищаемый объект – 9-ти этажное здание массой $M = 6000$ тонн;
- система сейсмоизоляции состоит из 30-ти маятниковых опор грузоподъемностью $Q_{on} = 200$ тонн;
- в составе каждой опоры – пластический демпфер, состоящий из 20 стержней – $R_T = 1$ тонн для каждого стержня;
- высота стржня – 1,1 м;
- сечение стржня – круглое, диаметром 60 мм;
- материал стержней – 01X18H9T со следующими механическими характеристиками: $\sigma_T = 288$ МПа, $\sigma_B = 646$ МПа, $\delta = 64,5$ %, $\psi = 75,2$ %, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Билинейная аппроксимация реальной силовой характеристики пластического демпфера, характеризуется тремя параметрами – рис. 7.52. Для динамических расчетов, как показано выше, пользуются следующими величинами:

$$f_T = \frac{R_T}{m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{E}{m}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{E_1}{m}}.$$

Характеристики пластического демпфирования одной сейсмоопоры приведены в табл. 7.6. Расчеты проводились для воздействий разной балльности и продолжительности по времени. Результаты динамического расчета в табл. 7.7.

Таблица 7.6

**Параметры силовой характеристики пластического
демпфирования одной маятниковой сейсмоопоры**

Кол-во стержней	R_T кН	E кН/м	E_1 кН/м	Грузоподъемность тс	f_T м/с ²	ω 1/с	Ω_0 1/с
20	10	330	10	100	0.1	18	3

Таблица 7.7

Результаты динамического расчета

№ воздействия	Максимальные ускорения сейсмического воздействия	Время воздействия	Максимальные значения абсолютных ускорений системы	Максимальные значения относительных перемещений системы
1	2,9 м/с ²	40 с	0,76 м/с ²	100 мм
2	6,3 м/с ²	70 с	1,48 м/с ²	210 мм

Далее была определена одностороннее накопленная деформация по формуле (7.46), а также величины различных уровней циклических деформаций и соответствующее им количество циклов по формуле (7.48).

Результаты расчета малоциклового усталости приведены в табл. 7.8. Результаты варьирования диаметром и количеством стержней представлены в табл. 7.9.

Таблица 7.8

Результаты расчета малоциклового усталости

№	Уровень перемещений	Односторонне накопленные деформации	Циклическая деформация	Число циклов	Число циклов до разрушения	Усталостное повреждение d_c	Квазистатическое повреждение d_s
	u_{max}	ϵ_{max}	ϵ_{ci}	N_i	N_{ci}	N_i / N_{ci}	$\epsilon_{max} / \epsilon_b$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.1	0.029	0.041	1	290	0.005	
			0.029	4	575	0.008	
			0.011	9	4400	0.004	
			0.002	26	138700	0.0008	
						0.018	0.021

1	2	3	4	5	6	7	8
	Утрачиваемый пластический ресурс			4 %	Остаточный		96 %
2	0.21	0.052	0.074	3	90	0.034	
			0.029	5	575	0.009	
			0.011	7	4400	0.003	
			0.002	22	138700	0.0008	
						0.046	0.104
	Утрачиваемый пластический ресурс			15 %	Остаточный		85 %

Таблица 7.9

Результаты варьирования параметрами пластического демпфирования

Количество стержней	f_T м/с ²	d мм	Утрачиваемый пластический ресурс	
			Воздействие № 1	Воздействие № 2
20	0.1	60	4 %	15 %
30	0.75	55	3 %	14 %
40	0.5	50	2 %	13 %

Из табл. 7.9 видно, что уменьшение диаметра стержней с 60 до 50 мм приводит к уменьшению утрачиваемого пластического ресурса на 1–2 %. Однако, чтобы сохранить оптимальное значение силы R_T , при уменьшении толщины стержней увеличивается их количество.

Таким образом, необходимый пластический ресурс можно обеспечить варьированием геометрии и количеством стержней.

7.5.11. Устойчивость ССИ к ветровым нагрузкам

Низкочастотная система сейсмозащиты может быть чувствительной к ветровым нагрузкам. Действие на строительные сооружения ветровых нагрузок рассмотрено в гл. 8. Для оценки чувствительности сейсмоизолированного здания к ветровым нагрузкам действующую на здание силу ветра можно найти по упрощенной формуле

$$P_v = W_n \cdot A_{зд}, \quad (7.48a)$$

где $A_{зд}$ – площадь наветренной стороны здания; W_n – ветровое давление.

Ветровое давление определяется как сумма средней и пульсационной составляющих:

$$W = W_{\text{ср}} + W_{\text{пульс}} \quad (7.48б)$$

В формуле (7.48б) $W_{\text{пульс}}$ – случайная величин. Чтобы перейти к детерминированным нормативным величинам, в (7.48б) $W_{\text{пульс}}$ заменяется на нормативное пульсационное давление. В результате получаем

$$W_{\text{н}} = W_{\text{ср}} + W_{\text{нпульс}},$$

где как будет показано в главе 8: $W_{\text{ср}}$ определяется по формуле (8.5а), $W_{\text{нпульс}}$ по формуле (8.12).

Слабую чувствительность здания к ветровым нагрузкам можно обеспечить выбором параметров силовой характеристик пластических демпферов. Для этого нужно, чтобы выполнялось условие $P_{\text{в}} < P_{\text{т}}$, где $P_{\text{т}}$ есть сумма усилий срабатывания всех демпферов («ступенька») – см. рис. 7.25.

При выполнении этого условия ССИ будет чрезвычайно мало чувствительной к воздействию ветровых нагрузок, и не будут нарушаться санитарные нормы вибраций здания при частых нагрузках.

7.6. Адаптивные системы сейсмозащиты

Теория адаптивных систем сейсмозащиты разрабатывалась в СССР начиная с 60-х годов [1]. Их идея сводится к тому, чтобы в процессе землетрясения изменять динамические характеристики конструкции, в результате чего ее собственные частоты «уйдут» из резонансного диапазона, соответствующего преобладающим частотам землетрясения. Этого можно достигнуть двумя противоположными способами: посредством выключающихся или включающихся связей. Первые – это специально предусмотренные «слабые» конструктивные элементы (раскосы, панели и т. п.), разрушающиеся при землетрясении. В результате уменьшается жесткость системы, а значит, и ее собственные частоты. Впервые массовое строительство зданий с системами сейсмоизоляции в виде выключающихся связей и упоров ограничителей перемещений было выполнено в конце 70-х годов при строительстве трассы БАМ. Целый город железнодорожников Северобайкальск, всего 82 здания, был застроен зданиями такого типа.

Недостатком метода является то, что в целях безопасности разрушенные связи должны быть восстановлены немедленно после землетрясения, что не всегда возможно. Кроме того, частотный состав сейсмических колебаний грунта может изменяться в течение самого землетрясения, и в результате частоты сооружения с выключившимися связями вновь окажутся в диапазоне преобладающих частот воздействия.

Второй тип связей в отсутствие землетрясения в работе конструкции не участвует, а включается только в его процессе при возникновении в конструкции взаимных перемещений ее узлов. Это могут быть установленные с зазором упоры-ограничители и упругие связи, провисающие растяжки и т. п. При их включении жесткость конструкции и частота ее колебаний возрастают. Следует учитывать, что нагрузки на подобные связи могут оказаться весьма значительными. Такими устройствами являются и шок-трансммиттеры. Шок-трансммиттер это гидравлическое устройство для сброса (трансмиссии) шоковых механических напряжений по дополнительным контурам жёсткости. Конструктивно устройство идентично гидравлическому амортизатору, но с уменьшенной щелью для протекания жидкости с целью создания «запирающего» эффекта при нагрузке. Сейсмическая стойкость с помощью шок-трансммиттеров осуществляется не за счет поглощения ими сейсмической энергии, а за счет перераспределения нагрузки. Например, мост во время сейсмического удара за счет шок-трансммиттеров на мгновение меняет систему своих несущих конструкций нужным образом. Причем в статическом виде такая конструкция может быть и неустойчивой.

В современном мостостроении подобная технология антисейсмической защиты широко распространена. Например, в России шок-трансммиттеры установлены на вантовом мосту через бухту Золотой Рог во Владивостоке, на мостах в Сочи, построенных к Олимпиаде 2014 года, на Крымском мосту.

7.7. Динамические гасители колебаний

1. Динамические гасители колебаний (ДГК) широко используются в практике сейсмозащиты сооружений. Особенность их работы – введение дополнительной массы, соединяемой с несущими конструкциями упругими связями и демпфирующими элементами. В случае совпадения основного периода собственных колебаний здания с одним из преобладающих периодов сейсмического воздействия, масса гасителя начинает совершать колебания с амплитудами, значительно превышающими амплитуды колебаний здания. Возникающие при этом упругие и диссипативные силы в элементах гасителя, воздействуя на здание, уменьшают амплитуды его колебаний.

Теория работы ДГК считается хорошо изученной. С момента открытия ДГК Фрамом [39] по вопросам подбора параметров гасителей проведены обстоятельные исследования, которые обобщены в монографии [12]. В частности, был проведён анализ применения ДГК в сейсмостойком строительстве [11, 16].

Теорию создаваемого ДГК эффекта гашения колебаний можно объяснить, рассматривая вынужденные колебания связанных осцилляторов [1.1]. В качестве примера вынужденных колебаний связанных осцилляторов рассмотрим систему, изображенную на рис. 7.52.

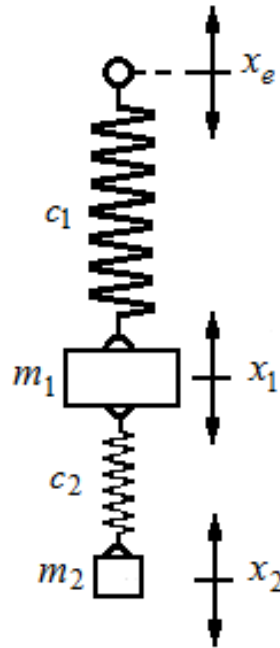


Рис. 7.52. Два связанных осциллятора

Внешнее воздействие осуществляется за счет колебания точки подвеса по вертикали, причем будем считать, что входная величина меняется по гармоническому закону:

$$x_e = X_e \cos \theta t. \quad (7.49)$$

Таким образом, мы имеем дело с кинематическим воздействием (см. п. 2.5). Используя абсолютные координаты перемещений масс и пренебрегая демпфированием, непосредственно из второго закона Ньютона получим уравнения движения:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1(x_1 - x_e) - c_2(x_1 - x_2), \quad (7.50)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1).$$

Введя обозначения

$$\frac{c_1 + c_2}{m_1} = \omega_1^2, \quad \frac{c_2}{m_2} = \omega_2^2, \quad \frac{m_2}{m_1} = \mu, \quad \frac{c_1}{m_1} = \omega_{10}^2, \quad (7.51)$$

запишем эти уравнения так:

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \mu \omega_2^2 x_2 = \omega_{10}^2 X_e \cos \theta t, \quad (7.52)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \omega_2^2 x_1 = 0.$$

Как и в случае вынужденных колебаний с одной степенью свободы (см. п. 3.3), стационарные решения имеют вид

$$x_1 = X_1 \cos \theta t, \quad x_2 = X_2 \cos \theta t. \quad (7.53)$$

Подставив эти выражения в дифференциальные уравнения (7.52), приходим к системе из двух уравнений для двух амплитуд. Ее решение будет таково:

$$X_1 = \frac{\omega_{10}^2 (\omega_2^2 - \theta^2) X_B}{(\omega_1^2 - \theta^2) (\omega_2^2 - \theta^2) - \mu \omega_2^4},$$

$$X_2 = \frac{\omega_{10}^2 \omega_2^2 X_B}{(\omega_1^2 - \theta^2) (\omega_2^2 - \theta^2) - \mu \omega_2^4}. \quad (7.54)$$

Если Ω равно одной из собственных частот, то при отсутствии затухания амплитуды масс должны быть равны бесконечности. Следовательно, приравнявая знаменатель в (7.54) нулю, получаем уравнение для определения собственных частот:

$$(\omega_1^2 - \theta^2) (\omega_2^2 - \theta^2) - \mu \omega_2^4 = 0. \quad (7.55)$$

Точно такое же уравнение мы получим, действуя по алгоритму формирования частотного уравнения, изложенному в гл. 3. Корни уравнения (7.55), т. е. собственные частоты системы, равны:

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \mp \sqrt{\frac{1}{4} (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \mu \omega_2^4}. \quad (7.56)$$

Резонансные кривые для (7.54) построены на рис. 7.53, где по оси абсцисс откладывается Ω .

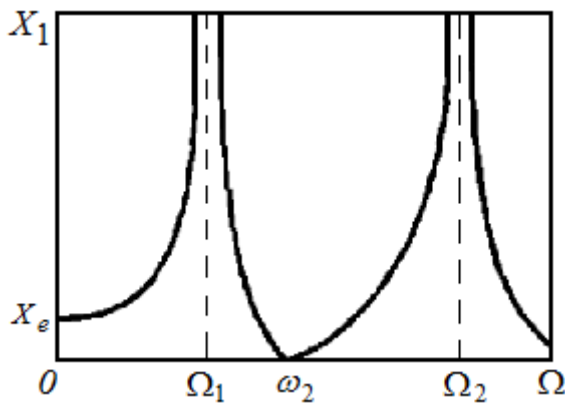


Рис. 7.53. Резонансные кривые недемпфированных связанных осцилляторов

Обе резонансные кривые начинаются при $\lambda = 0$ и $X = X_e$, уходят в бесконечность при $\lambda = \Omega_1$ и $\lambda = \Omega_2$ и стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$. В то время как X_2 для всех значений Ω отлично от нуля, X_1 принимает нулевое значение при $\lambda = \omega_2$. Это равенство показывает, что первая масса, на которую возмущающая сила действует раньше, чем на вторую, может оставаться в покое, если частота возмущения имеет некоторую определенную величину, которую обычно называют частотой настройки.

Величину сдвига фазы колебаний в различных интервалах частот легко представить при помощи знаков амплитудных функций. Эти соотношения схематически представлены на рис. 7.54 для трех случаев. При малых частотах возмущения ($\lambda < \Omega_1$) обе массы колеблются в фазе с возмущением; в местах резонанса, а также в нулях происходит скачок фазы; наконец, при достаточно больших частотах ($\lambda > \Omega_2$) колебания протекают в противофазе.

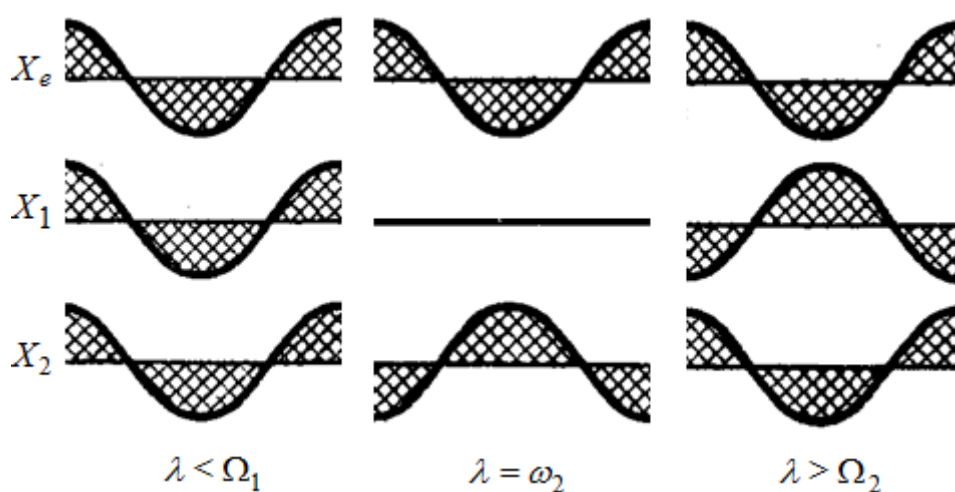


Рис. 7.54. Фазы вынужденных связанных колебаний в различных интервалах частот

Эффект появления нулевой амплитуды массы m_1 или антирезонанс используется при конструировании гасителей колебаний. Если колеблющиеся части конструкций, например, фундаменты машин, подвергаются возмущению с постоянной частотой, то колебания можно полностью погасить за счет того, что к первому осциллятору присоединяют соответствующим образом, настроенный второй осциллятор, подобно тому, как это схематически изображено на рис. 7.52, б. Явление гашения колебаний можно объяснить следующим образом. При правильной настройке вторая масса колеблется в противофазе с возмущением и как раз с такой амплитудой, что сила, с которой вторая пружина действует на первую массу, уравнивает возмущающую силу, передающуюся через первую пружину. При этом амплитуда колебаний второй массы, как это видно из второй формулы (7.54), будет равна

$$X_2 = -\frac{\omega_{10}^2 X_e}{\mu \omega_2^2} = -\frac{c_1}{c_2} X_e.$$

Таким образом, вся энергия колебаний переходит в энергию колебаний динамического гасителя, а основное звено при идеальной настройке не колеблется совсем. Динамические гасители колебаний могут применяться для подавления как поступательных, так и угловых колебаний тел.

Конструкция ДГК, построенных по описанному принципу имеет смысл только тогда, когда частота возмущения остается постоянной. Однако часто возмущение является широкополосным (многочастотным). ДГК без демпферов в этом случае теряет свою эффективность. Кроме того, недостатком динамического гасителя без затухания является то, что, устраняя колебания вибрирующего тела при определенной частоте, он приводит к появлению двух новых собственных частот и увеличивает опасность возникновения резонанса. Если в конструкцию гасителя ввести специально подобранное затухание, амплитуды колебаний масс при возможных резонансах существенно уменьшатся, но эффект гашения колебаний сохранится. Таким образом, указанный недостаток будет в значительной мере минимизирован, а требуемый результат уменьшения амплитуды массы m_1 достигнут.

2. Влияние демпфирования на работу ДГК. Для анализа работы ДГК, содержащего как упругие элементы, так и демпферы, рассмотрим систему, представленную на рис. 7.55.

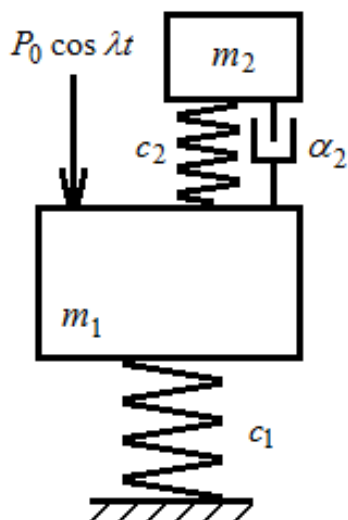


Рис. 7.55. Двухмассовая система

Уравнения, описывающие эту расчетную схему, имеют вид

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1(x_1 - x_e) - c_2(x_1 - x_2) - \alpha_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad (7.57)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1) - \alpha_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2).$$

В (7.57) m_1 – масса защищаемого объекта (ЗО); m_2 – масса ДГК; c_1 – жесткость пружины, моделирующей упругость ЗО; c_2 – жесткость пружины,

моделирующей упругость ДГК; α_2 – коэффициент вязкости демпфера ДГК. Влиянием диссипативных сил в самом ЗО модель (7.57) пренебрегает.

После преобразований и введения обозначений (7.51) уравнения (7.57) получают следующий вид

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \mu \omega_2^2 x_2 + \beta \mu (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = \omega_{10}^2 X_B \cos \lambda t, \quad (7.58)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \omega_2^2 x_1 + \beta \mu (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0.$$

В (7.58) кроме обозначений (7.51) использовано обозначение $\beta = \frac{\alpha_2}{m_2}$.

Решение (7.58), как и ранее, ищется подстановкой в (7.58) соотношения (7.53). После ряда преобразований можно найти аналогичные (7.54) формулы для нахождения амплитуд X_1 , X_2 , но уже с учетом наличия демпфера в ДГК. Эти формулы приведены (в других обозначениях) в [29]. Для оценки эффективности ДГК нужно знать, как меняется в зависимости от λ амплитуда ЗО, т. е. X_1 . Эта зависимость выражается формулой

$$X_1 = X_B \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_2^2}\right)^2 + \frac{\beta^2 \lambda^2}{\omega_2^4}}}{\sqrt{\left[\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_{10}^2}\right)^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{\mu \lambda^2}{\omega_{10}^2}\right]^2 + \left[\left(\frac{\beta \lambda}{\omega_{10}^2}\right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_{10}^2} - \frac{\mu \lambda^2}{\omega_{10}^2}\right)\right]^2}}. \quad (7.59)$$

Резонансная кривая, построенная по формуле (7.59), приведена на рис. 7.56. Влияние демпфирования проявляется в том, что разрывы резонансных кривых на рис. 7.54 заменяются конечными пиками и исчезает показанный на рис. 7.54 ноль амплитуды первой массы. Однако за счет настройки ДГК, т. е. за счет варьирования параметрами c_2 , m_2 и α_2 можно существенно уменьшить эту амплитуду. Минимизация X_1 за счет настройки ДГК изложена в [28]. Однако эта методика эффективна лишь для фиксированных частот внешнего воздействия.

Широкое применение ДГК в разных технических устройствах описано в [11]. Применение ДГК для сеймозащиты рассмотрено в [10, 15, 34].

Сейсмические и ветровые нагрузки являются широкополосными случайными воздействиями. При рассмотрении таких воздействий минимизировать нужно дисперсию X_1 . Как следует из гл. 5, дисперсия случайной величины X_1 равна

$$D_{X_i} = \int_0^{\infty} S_{X_i}(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} |F_{X_i}(i\theta)|^2 S_{X_B}(\lambda) d\lambda. \quad (7.60)$$

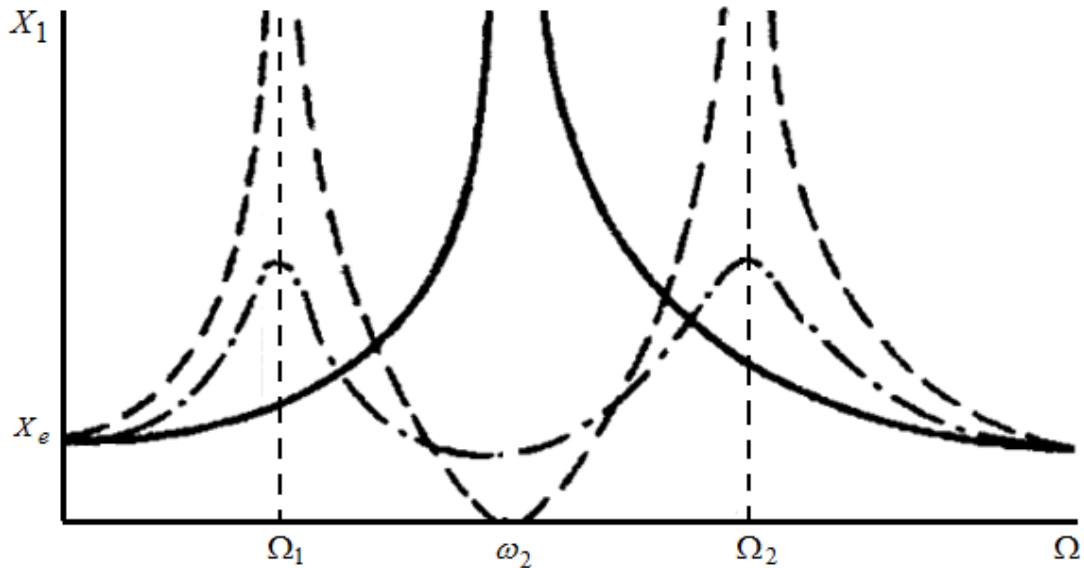


Рис. 7.56. Динамическая модель объекта с одномассовым гасителем колебаний

В (7.60) $|F_{X_i}(i\lambda)|^2$ – квадрат модуля передаточной функции; $S_{X_i}(\lambda)$ – спектральная плотность случайной величины X_B . В рассматриваемом случае:

$$|F_{X_i}(i\lambda)|^2 = \frac{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_2^2}\right)^2 + \frac{\beta^2 \lambda^2}{\omega_2^4}}{\left[\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_{10}^2}\right)^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{\mu \lambda^2}{\omega_{10}^2}\right]^2 + \left[\left(\frac{\beta \lambda}{\omega_{10}^2}\right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_{10}^2} - \frac{\mu \lambda^2}{\omega_{10}^2}\right)\right]^2}, \quad (7.61)$$

$S_{X_B}(\lambda)$ – спектральная плотность внешнего воздействия.

При рассмотрении сейсмических воздействий на ЗО эта спектральная плотность обычно находится по формуле (5.23). Подбор оптимальной настройки ДГК для защиты от сейсмических воздействий показан в [11].

Считается, что для защиты зданий первый ДГК был установлен в башне Джона Хэнкока (в 60-этажном небоскребе Бостона). Этот ДГК был предназначен для уменьшения раскачивания небоскреба при сильных ветровых нагрузках. Наиболее известный ДГК для защиты от сейсмических воздействий установлен в башне Тайбэй (101 этаж, высота 508 м) на Тайване. ДГК расположен на 92-м этаже и весит 660 тонн. Его колебания во время землетрясения удалось снять на видео и выложить на YouTube одному из туристов. Колебания ДГК достигали 150 см, а колебания самого небоскреба были незначительными. В такого рода зданиях ДГК представляет собой огромный груз (в несколько сотен тонн), соединенный с каркасом здания при помощи тросов, пружин, рессор и гидравлических цилиндров. В качестве ДГК может служить и вода. В одном из зданий в качестве ДГК использован резервуар, в котором находится 380 000 литров воды.

Список литературы

1. *Айзенберг Я. М.* Простейшая сейсмоизоляция. Колонны нижних этажей как элемент сейсмоизоляции зданий / Я. М. Айзенберг // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2004. – № 1. – С. 28–32.
2. *Айзенберг Я. М.* Адаптивные системы сейсмической защиты сооружений / Я. М. Айзенберг. – М.: Наука, 1978. – 246 с.
3. *Белаш Т. А., Беляев В. С., Уздин А. М.* [и др.]. Сейсмоизоляция. Современное состояние // Избранные статьи проф. Савинова и ключевые доклады, представленные на 4-х Савиновских чтениях. – СПб.: Ленинградский Промстройпроект, 2004. – С. 95–128.
4. *Беляев В. С., Гуськов В. Д., Рутман Ю. Л.* Устройства для сейсмоизоляции зданий, промышленных объектов и их оборудования // Вестник ИНЖЕКОНА. – Сер. «Технические науки». – Вып. 6 (19). – 2007.
5. *Бендат Дж.* Применение корреляционного и спектрального анализа / Дж. Бендат, А. Пирсол; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
6. *Болотин В. В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций / М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
7. *Голубков В. Н.* Фундаменты из пирамидальных свай с промежуточной подушкой // В. Н. Голубков, Н. Л. Моргулис, В. Ф. Никитин // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1977. – № 5. – С. 26–28.
8. *Давыдова Г. В.* Определение оптимальных параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции / Г. В. Давыдова, Н. В. Ковалева, Ю. Л. Рутман // Инженерно-строительный журнал. – 2013 – № 5 (40). – С. 107–115.
9. *Елизаров С. В.* Особенности применения метода случайного моделирования в задачах расчета сейсмоизоляции сооружений / С. В. Елизаров // Сборник трудов Международной конференции «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте». – 2008. – С. 100–104.
10. *Ковалева Н. В.* Учет малоциклового усталости при оптимизации параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции / Н. В. Ковалева // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – № 9 (44). – С. 49–55; см. также: *Корнев Б. Г., Поляков В. С.* Оптимальные параметры динамического гасителя колебаний при воздействиях типа сейсмического // Сейсмостойкое строительство. – Вып. 3. – 1977. – С. 37–42.
11. *Корнев Б. Г., Резников Л. М.* Динамические гасители колебаний. – М.: Наука. – 1988. – 303 с.
12. *Лойцянский Л. Г.* Курс теоретической механики: в 2 т. Статика и кинематика / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М.: Наука, 1982. Т. I. – 352 с.
13. *Назаров Ю. П.* Аналитические основы расчёта сооружений на сейсмические воздействия. – М.: Наука, 2010. – 468 с.
14. *Назаров Ю. П.* Расчётные модели сейсмических воздействий. – М.: Наука, 2012. – 414 с.
15. *Никитин А. А., Уздин А. М.* Применение динамических гасителей колебаний для сейсмозащиты мостов // Экспресс-информация ВНИИИС. – Сер. 14. Сейсмостойкое строительство. – Вып. 9. – 1986. – С. 20–24.
16. *Окопный Ю. А.* Механика материалов и конструкций: учебник для вузов / Ю. А. Окопный, В. П. Радин, В. П. Чирков. – М.: Машиностроение, 2001. – 409 с.
17. *Островская Н. В.* Метод расчета и оптимизации параметров пластических демпферов в системах сейсмоизоляции: дис. ... канд. техн. наук / Н. В. Островская. – СПб.: СПбГАСУ, 2016. – 127 с.
18. *Поляков С. В.* Опыт возведения зданий с сейсмоизолирующим скользящим поясом в фундаменте / С. В. Поляков, Л. Ш. Килимник, Л. А. Солдатова. – М.: Стройиздат, 1984.

19. Поляков С. В. Современные методы сейсмозащиты зданий / С. В. Поляков, Л. Ш. Килимник, А. В. Черкашин. – М. Стройиздат, 1989 – 320 с.
20. Рассказовский В. Т. Методика расчета жестких зданий с гибким первым этажом на сейсмические воздействия. / В. Т. Рассказовский, Ю. А. Гамбург // Строительство и инженерное обеспечение полиграфических зданий. – Ташкент, 1971. – С. 37–44.
21. Рутман Ю. Л. Использование обобщенного метода главных координат для расчета систем с локальными нелинейностями на сейсмические и другие динамические воздействия / Ю. Л. Рутман, В. Л. Лебедев, В. А. Семенов // XXI международная конференция. Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. – СПб.: ВВМ, 2006. – С. 402–408.
22. Рутман Ю. Л. Обобщение метода главных координат на случай упругих систем с локальными нелинейностями / Ю. Л. Рутман // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: сб. трудов. СПб.: – СПбГПУ, 2003.
23. Рутман Ю. Л., Солнцева Я. С. Определение усилий пластического срабатывания стержневых пластических демпферов // Сборник «Труды Двадцать третьей международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов». – 2009. – С. 388–393.
24. Рутман Ю. Л. Маятниковые сейсмоизолирующие опоры. Конструкция. Расчет. Эксперимент / Ю. Л. Рутман // Инженерно-строительный журнал. – 2012. – № 1 (27). – С. 37–43.
25. Бондарев Д. Е. Анализ динамики сейсмоизолированного сооружения с учетом его крутильных колебаний / Д. Е. Бондарев, Ю. Л. Рутман, Э. С. Симборт // Вестник гражданских инженеров. – № 2 (61), 2017. – С. 112–119.
26. Савинов О. А. Сейсмоизоляции сооружений / О. А. Савинов // Динамические проблемы строительной механики. Избранные статьи и доклады. – 1993. – С. 155–178.
27. Савинов О. А. Оптимизация параметров сейсмоизолирующего фундамента с демпфером сухого трения и упругопластическим ограничителем перемещений / О. А. Савинов, В. В. Сахарова // ЭИ, ВНИИИС. Серия 14, отеч. опыт. – 1985. – Вып. 1.
28. Симборт Э. Выбор коэффициента редукации сейсмических нагрузок на основе анализа пластического ресурса конструкции с учетом малоциклового усталости / Э. Симборт, Ю. Л. Рутман // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2011. – № 5. – С. 23–26.
29. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука. – 1976. – С. 209–216.
30. Уздин А. М., Елизаров С. В., Белаиш Т. А. Сейсмостойкие конструкции транспортных зданий и сооружений: учебное пособие. – ФГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте». – 2012 – 500 с.
31. Черепинский Ю. Д. Проблемы сейсмостойкости зданий с использованием сейсмоизолирующих конструктивных решений / Ю. Д. Черепинский, М. Н. Гусев / Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2006. – № 5.
32. Черепинский Ю. Д. Сейсмоизоляция зданий. Строительство на кинематических фундаментах / М.: Изд-во «BlueApple», 2009. – 47 с.
33. Чернов Ю. Т. Расчет сооружений, содержащих нелинейный динамический гаситель или ограничитель колебаний, на сейсмические воздействия / Ю. Т. Чернов // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2000. – № 3. – С. 36–39.
34. Яременко В. Г. Выбор оптимальных параметров систем динамической сейсмоизоляции при представлении сейсмического воздействия в виде «белого шума» // Сейсмостойкое строительство, 1983. – Вып. 1. – С. 18–21.
35. Chopra A. K. Dynamic of structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering. New Jersey. Prentice-Hall, 2006. – 794 p.
36. Frahm H. Schlingertankszur Abdämpfung von Schiffsrollbewegungen // Jahrbuch d. SchiffbautechnikGes. – 1911. – Bd. 12.

37. *Kelly J. M.* Earthquake resistant design with rubber / J. M. Kelly. – London etc: Springer-Verl., 1997. – 243 p.
38. *Rutman Y. L.* Device for Protection of Buildings, Equipment and Tubing. Civil and Structural Engineering Research Publications Conferences. Abstract – journal of Constactional Steel Research, Elsevier Science Ltd., 1998, San-Sebastian.
39. *Skinner R. I., Robinon W. H., McVerry G. H.* An introduction to seismic isolation. NeyZealand: JohnWiley&Sons, 1993. – 353 p.

Глава 8. МЕТОДЫ РАСЧЕТА СООРУЖЕНИЙ НА ВЕТРОВЫЕ НАГРУЗКИ

Зачем крутится ветер в овраге,
Подъемлет лист и пыль несет,
Когда корабль в недвижной влаге
Его дыханья жадно ждет?

А. С. Пушкин, «Египетские ночи»

Ветер есть дыхание природы.

Козьма Прутков

8.1. Статические расчеты на ветровые нагрузки

8.1.1. Ветер, возникающий в нижних слоях атмосферы, представляет собой хаотическое, турбулентное движение. Физическая природа турбулентности-трение ветрового потока о землю, влияние шероховатостей и неровностей земной поверхности. Турбулентное движение характеризуется беспорядочным изменением скорости во времени в каждой точке и от точки к точке. Такое движение исследуется теорией случайных процессов, описанной в главе 5. Математическое ожидание скорости ветра как случайной величины (её среднее значение) обозначается $V_{\text{ср}}$:

$$M[V] = V_{\text{ср}}. \quad (8.1)$$

Центрированная случайная величина:

$$V - V_{\text{ср}} = V_{\text{пульс}}. \quad (8.2)$$

называется пульсационной составляющей скорости. Таким образом,

$$V = V_{\text{ср}} + V_{\text{пульс}}. \quad (8.3)$$

Ветровое давление определяется формулой

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \rho \cdot V^2, \quad (8.4)$$

где ρ , C – плотность воздуха и аэродинамический коэффициент соответственно. Подставляя (8.3) в (8.4) получаем

$$W = \frac{1}{2} \cdot \bar{C} \cdot \rho \cdot V_{\text{ср}}^2 \cdot \left(1 + 2 \frac{V_{\text{пульс}}}{V_{\text{ср}}} + \frac{V_{\text{пульс}}^2}{V_{\text{ср}}^2} \right) \approx \frac{1}{2} \cdot \bar{C} \cdot \rho \cdot V_{\text{ср}}^2 \cdot \left(1 + 2 \frac{V_{\text{пульс}}}{V_{\text{ср}}} \right), \quad (8.4a)$$

так как 3-е слагаемое мало.

Исходя из (8.4):

$$W = W_{\text{ср}} + W_{\text{пульс}}, \quad (8.5)$$

$$W_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \rho \cdot V_{\text{ср}}^2, \quad (8.5a)$$

$$W_{\text{пульс}} = 2 \cdot \frac{V_{\text{пульс}}}{V_{\text{ср}}} \cdot W_{\text{ср}}. \quad (8.5б)$$

На нагрузку (8.5a) проводится обычный статический расчет. На нагрузку (8.5б) для низкочастотных сооружений проводится расчет по теории случайных функций. При этом, как показано в гл. 5, выявляются динамические эффекты, создающиеся случайной пульсационной нагрузкой.

8.1.2. Параметры ветра и ветровой нагрузки меняются с высотой. Средняя скорость ветра на высоте z определяется по формуле

$$V_{\text{ср}}(z) = V_{\text{ср}0} \cdot \left(\frac{z}{10} \right)^{\alpha},$$

где $V_{\text{ср}0}$ – средняя скорость ветра (м/с) на высоте 10 м;

Нормативное значение средней составляющей ветровой нагрузки на высоте z над поверхностью земли определяется по формуле

$$W_{\text{срнорм}} = W_{\text{ср}0} \cdot k, \quad (8.6)$$

где $W_{\text{ср}0} = C \cdot \frac{\rho V_{\text{ср}0}^2}{2} = 0,61 \cdot V_{\text{ср}0}^2 \cdot C$ – ветровое давление на уровне 10 м над по-

верхностью земли; $k = \left(\frac{z}{10} \right)^{2\alpha}$ – коэффициент, учитывающий изменение ветрового давления по высоте.

Параметры $V_{\text{ср}0}$, C , α зависят от следующих факторов: $V_{\text{ср}0}$ от ветрового района, C от формы обтекаемого ветровым потоком тела и ориентации по отношению к потоку взаимодействующей с потоком поверхности, α от типа местности. Значения этих параметров приведены в различных справочных руководствах и, в первую очередь, в [2], [11].

8.1.3. Для высокочастотных сооружений пульсационная нагрузка также учитывается статическим расчетом. Чтобы установить можно ли считать сооружение высокочастотным, нужно сравнить его первую собственную частоту с предельными частотами, которые приведены [11]. Если собственная ча-

стота выше нормативной предельной, то коэффициент динамичности пульсационной нагрузки равен 1, и на пульсационную нагрузку проводится статический расчет. Величина предельной частоты зависит от ветрового района. Это объясняется тем, что для разных ветровых районов спектральные плотности скорости ветра разные. Разными оказываются и частоты среза, которые в данном случае и называются предельными частотами. Предполагается, что спектральная плотность за частотой среза пренебрежимо мала.

Нормативное значение пульсационной составляющей ветровой нагрузки $W_{\text{пнорм}}$ на высоте z определяется по формуле

$$W_{\text{пнорм}} = W_{\text{срнорм}} \cdot \zeta_p \cdot \nu, \quad (8.7)$$

здесь ζ_p – нормативный коэффициент пульсаций давления ветра на уровне z :

$$\zeta_p = \zeta_{p0} \cdot \left(\frac{z}{10} \right)^{-\alpha}, \quad (8.8)$$

где ζ_{p0} – коэффициент пульсаций на уровне 10 м; ν – коэффициент пространственной корреляции пульсаций давления ветра.

Смысл коэффициента ν в том, что он учитывает случайное изменение скорости ветра не только во времени, но и в пространстве. На поверхности, взаимодействующей с ветровым потоком, пульсационные давления в разных точках разные. Коэффициент ν в первом приближении учитывает этот эффект. Значения ν приведены в [5].

Рассмотрим, как можно определить коэффициент пульсаций давления ζ_{p0} . В формуле (8.5, б) случайной величиной является только $V_{\text{пульс}}$. Поэтому среднеквадратическое значение случайной величины $W_{\text{пульс}}$ равно:

$$\sigma_{W_{\text{пульс}}} = 2 \cdot \frac{\sigma_{V_{\text{пульс}}}}{V_{\text{ср}}} \cdot W_{\text{ср}}, \quad (8.9)$$

где $\sigma_{V_{\text{пульс}}}$ – среднеквадратическое значение (стандарт) пульсационной скорости. Прочностные расчеты нужно вести на нагрузку, соответствующую $\gamma \sigma_{\text{пульс}}$, где γ – коэффициент обеспеченности. Обычно он принимается равным трем (правило трех σ). Следовательно, коэффициент пульсаций ζ_{p0} можно вычислить по формуле

$$\zeta_{p0} = \gamma \cdot 2 \cdot \frac{\sigma_{V_{\text{пульс}}}}{V_{\text{ср0}}}. \quad (8.10)$$

С учетом (8.10) формула (8.7) приобретает вид

$$W_{\text{пнорм}} = \frac{2 \cdot \gamma \cdot \sigma_{V_{\text{пульс}}}}{V} W_{\text{пнорм}} = \frac{2 \cdot \gamma \cdot \sigma_{V_{\text{пульс}}}}{V_{\text{ср0}}} \cdot \left(\frac{z}{10} \right)^{-\alpha} \cdot \nu \cdot W_{\text{срнорм}}. \quad (8.11)$$

Используя (8.6), из (8.11) получаем:

$$W_{\text{норм}} = \frac{2 \cdot \gamma \cdot \sigma_{V_{\text{пульс}}}}{V_{\text{ср0}}} \cdot \nu \cdot W_{\text{ср0}} \left(\frac{z}{10} \right)^\alpha. \quad (8.12)$$

По рекомендациям [10] интенсивность турбулентности $\frac{\sigma_{V_{\text{пульс}}}}{V_{\text{ср0}}}$ может быть вычислена по формуле

$$I_T = \frac{\sigma_{V_{\text{пульс}}}}{V_{\text{ср0}}} = 2,45r^{0,5}. \quad (8.13)$$

где r – коэффициент сопротивления подстилающей поверхности. В первом приближении $r = 0.005$ для открытой местности, 0.01 для лесных массивов и жилых окраин городов, 0.05 для городских условий.

Заметим, что $\sigma_{V_{\text{пульс}}}$ с высотой не меняется.

Нормативные коэффициенты пульсаций приведены в [11].

На ветровое давление, определяемое формулой (8.11), выполняется статический расчет высокочастотных сооружений.

8.2. Динамические расчеты на ветровые нагрузки. Колебания структуры, вызванные турбулентным потоком

8.2.1. Если первая собственная частота ниже предельной частоты пульсаций для исследуемого ветрового района, то производится динамический расчет на основе теории случайных функций. Методика выполнения таких расчетов изложена в п. 5.2, 5.3. Ниже показано применение этой методики к расчету сооружения на пульсационную ветровую нагрузку. Чтобы понять принципиальные аспекты такого расчета, рассмотрим упрощенную схему сооружения, которое будем рассматривать как консольную балку (рис. 8.1).

Обычно для динамического расчета на пульсационную ветровую нагрузку достаточно рассмотреть колебания сооружения только по первой собственной форме. Тогда эти колебания описываются уравнением колебаний системы с одной степенью свободы:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} P(t). \quad (8.14)$$

В (8.14) ω , n , m – собственная частота, коэффициент затухания, приведенная масса, соответствующие первой собственной форме; $P(t)$ – приведенная к этой собственной форме случайная (пульсационная) ветровая нагрузка. Рассмотрим алгоритм формирования этой нагрузки. Используя (8.5а) и учи-

тывая разные значения аэродинамических коэффициентов C и коэффициентов корреляции ν на поверхностях, расположенных с наветренной и подветренных сторон, можно сформировать погонную нагрузку на балку, моделирующую сооружение:

$$q(y) = \oint_S W_{\text{пульс}} \cdot \nu(s, y) \cdot ds = \oint_S 2 \cdot \frac{V_{\text{пульс}}}{V_{\text{ср}}} \cdot W_{\text{ср}} \cdot \nu(s, y) \cdot ds. \quad (8.15)$$

В (8.15) y – координата сечения балки; s – координата точки на контуре сечения.

Используя формулы (8.6) и (8.8), получим:

$$q(y) = \oint_S 2 \cdot \frac{V_{\text{пульс}}}{V_{\text{ср0}}} \cdot \left(\frac{y}{10}\right)^{-\alpha} \cdot \frac{1}{2} \cdot C(s, y) \cdot \rho \cdot V_{\text{ср0}}^2 \cdot \nu(s, y) \cdot \left(\frac{y}{10}\right)^{2\alpha} ds$$

или

$$q(y) = V_{\text{пульс}}(t) \cdot V_{\text{ср0}} \cdot \rho \cdot \left(\frac{y}{10}\right)^{\alpha} \oint_S C(s, y) \cdot \nu(s, y) ds. \quad (8.16a)$$

Обозначив $C_{\text{эф.}}(y) = \oint_S C(s, y) \cdot \nu(s, y) ds$, запишем

$$q(y) = V_{\text{пульс}}(t) \cdot V_{\text{ср0}} \cdot \rho \cdot \left(\frac{y}{10}\right)^{\alpha} C_{\text{эф.}}(y). \quad (8.16b)$$

Нагрузка $P(t)$ находится после приведения $q(y)$ к 1-й собственной форме колебаний:

$$P(t) = V_{\text{пульс}}(t) \cdot V_{\text{ср0}} \cdot \rho \int C_{\text{эф.}}(y) \cdot \left(\frac{y}{10}\right)^{\alpha} \cdot \varphi(y) dy, \quad (8.17)$$

где $\varphi(y)$ – собственная форма, равная единице наверху здания.

Из (8.17) видно, что $P(t)$ является произведением случайной величины $V_{\text{пульс}}(t)$ на детерминированный множитель

$$\alpha = V_{\text{ср0}} \cdot \rho \int C_{\text{эф.}}(y) \cdot \left(\frac{y}{10}\right)^{\alpha} \cdot \varphi(y) dy. \quad (8.18)$$

Следовательно, спектральная плотность случайной нагрузки $P(t)$ с точностью до множителя совпадает со спектральной плотностью $V_{\text{пульс}}(t)$. Спектральная плотность $V_{\text{пульс}}(t)$ находится с помощью частотного анализа экспериментальных данных. Для ее описания предложены разные формулы: спектр Давенпорта, спектр Колмогорова, спектр Еврокода. Обычно в расчетах используют спектр Давенпорта:

$$S_v(\omega) = \sigma_{\text{пульс}}^2 \frac{2\lambda^2}{3\omega(1+\lambda^2)^{4/3}}, \quad (8.19)$$

$$\lambda = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{L}{V_{\text{ср0}}}.$$

В (8.19) $L = 1200$ м – интегральный продольный масштаб турбулентности. Расчет по спектру Давенпорта несколько завышает пульсационную нагрузку. Более точным считается спектр, приведенный в Еврокоде:

$$S_v(\omega) = \sigma_{\text{пульс}}^2 \frac{6,8\lambda}{\omega(1+10,2\lambda)^{5/3}}. \quad (8.20)$$

Множитель, на который умножается дисперсия пульсационной скорости $D_{\text{пульс}} = \sigma_{\text{пульс}}^2$, называется нормированным спектром $S_{V_{\text{норм}}}(\omega)$:

$$\int_0^{\infty} S_{V_{\text{норм}}}(\omega) d\omega = 1. \quad (8.21)$$

Из (8.17) следует, что спектральная плотность случайной нагрузки $P(t)$

$$S_P(\omega) = S_V(\omega) \cdot \alpha^2. \quad (8.22)$$

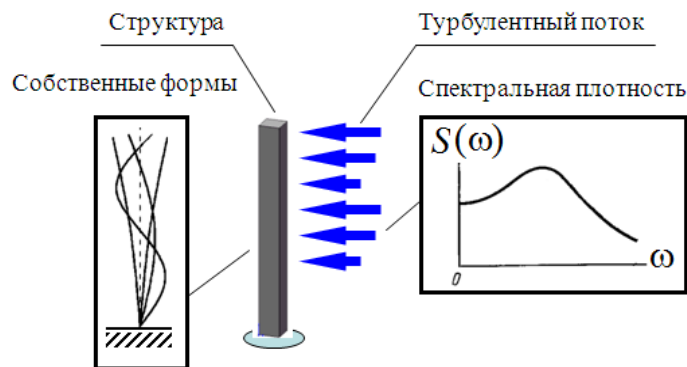


Рис. 8.1. Схема расчета сооружения на турбулентный ветровой поток

8.2.2. Как показано в п. 5.2, решение уравнения (8.14) это получение спектра ответа (перемещения, скорости, ускорения), исходя из спектра нагрузки. В данном случае находим спектральную плотность случайной амплитуды верха здания:

$$S_x(\omega) = \frac{S_P(\omega)}{m^2 p^4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \omega^2}{p^4}}. \quad (8.22)$$

Определение среднеквадратического отклонения верха здания из спектра ответа:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega}. \quad (8.23)$$

Зная спектральную плотность перемещения и форму колебаний, можно найти вероятностные характеристики прочностных параметров балки. Например, спектральная плотность изгибающих моментов равна:

$$S_{\text{момента}}(\omega) = S_x(\omega) \cdot EI \frac{d^2\varphi}{d^2y}. \quad (8.24)$$

8.3. Автоколебания

8.3.1. Срывной флаттер

1. В главе 1 был рассмотрен простейший пример автоколебаний – маятник Фроуда. Ниже рассмотрены автоколебания, причиной которых являются аэроупругие процессы. Для возникновения автоколебаний необходим источник энергии и определенные свойства динамической системы. В рассматриваемом случае источником энергии является ветер. Динамическую индивидуальность системы определяют ее частоты, формы колебаний и диссипативные свойства (коэффициенты затухания). К аэроупругим автоколебаниям относятся такие формы аэродинамической неустойчивости сооружений, как галопирование, классический изгибно-крутильный флаттер, а также колебания, связанные со срывом вихрей с внешней поверхности сооружений, т. е. с образованием вихревой дорожки Кармана. Рассмотрим эти колебания подробнее.

При обтекании тела воздушным потоком возникают переменные, практически периодические, аэродинамические силы, действующие на обтекаемое тело в поперечном по отношению к ветровому потоку направлении. Указанные силы обусловлены периодическим срывом в шахматном порядке вихрей с поверхностей тела и возникающими в этой связи пульсациями давления. Таким образом, возможно возникновение резонансных явлений, когда частота собственных колебаний конструкции по одному из первых тонов может совпадать с частотой срывов, т. е. с частотой колебаний аэродинамической вынуждающей силы. Это явление называется срывным флаттером. Срывной флаттер является причиной многих технических катастроф. Наиболее известной из них является так называемая Такомская катастрофа, произошедшая в 1940 году, когда под действием ветра разрушился вантовый мост с пролетом 854 м. Крушение произошло после четырехмесячной эксплуатации. Основная причина аварии – чрезмерные динамические крутильные колебания, вызванные срывом вихрей. Для изучения аварии этого моста

удачным фактором был тот, что точное поведение моста от начала аварии до момента крушения удалось увидеть при помощи кино съемки, зарегистрировавшей колебания и характер разрушения. Обрыв подвесок центрального пролета повлек провисание боковых пролетов и наклон пилонов. На кинокадрах мост совершает интенсивные колебания при скорости ветра 18,8 м/с. Мост был рассчитан на статическую ветровую нагрузку до скорости ветра 50 м/с. Однако аэроупругое действие ветровой нагрузки не было учтено.

Часто считают, что срывной флаттер связан с аэроупругими колебаниями крутильного или изгибно-крутильного типа. Тем не менее это не так. Срывной флаттер может возникнуть и при чисто изгибных колебаниях. В [4] предложено называть срывным флаттером все виды автоколебаний, вызванные со срывом вихрей. Ниже термин «срывной флаттер» используется в таком обобщенном понимании.

Частота срыва вихрей N_s определяется формулой Струхали:

$$N_s = \frac{Sh \cdot V}{D}, \quad (8.25)$$

где D – поперечный размер сечения обдуваемой структуры; V – скорость ветрового потока; Sh – число Струхали, которое зависит от параметров тела и числа Рейнольдса, т. е. от параметров потока.

Частота, определяемая формулой (8.25), является частотой равнодействующей всех элементарных сил, направленных перпендикулярно скорости ветрового потока. При этом частота равнодействующей сил, действующих в направлении потока, равна $2N_s$.

2. Чтобы понять существо динамических процессов, происходящих при срыве вихрей, сравним обтекание жесткого и упругого тела. Если жесткое тело закреплено в основании и на него воздействует ветровой поток со средней скоростью V (рис. 8.2), то при образовании дорожки Кармана на тело будут действовать силы по направлению потока F_{x0} и перпендикулярно потоку F_{y0} :

$$F_{x0} = C_{x0}(\text{Re}) \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot A_{yz} \cdot \sin 2\omega_s t, \quad (8.26)$$

$$F_{y0} = C_{y0}(\text{Re}) \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot A_{yz} \cdot \sin \omega_s t. \quad (8.27)$$

В (8.26), (8.27) $\omega_s = 2\pi N_s$; A_{yz} – площадь проекции тела на плоскость YZ ; C_{x0} , C_{y0} – аэродинамические коэффициенты (лобового сопротивления и подъемной силы), зависящие от числа Рейнольдса (число Рейнольдса $\text{Re} = VL\rho/\eta$; где ρ – плотность вещества потока; V – скорость потока; L – гидравлический

параметр; η – динамическая вязкость среды) и от степени обтекаемости тела (чем хуже обтекаемость, тем больше аэродинамические коэффициенты). Заметим, что коэффициент C_{x0} всегда много меньше, чем C_{y0} , т. е. переменная составляющая силы лобового сопротивления мала по сравнению с подъемной силой.

Рассмотрим теперь упруго закрепленное, т.е. колеблющееся тело. В этом случае коэффициенты C_{x0} , C_{y0} перестают быть константами. Они зависят от амплитуды колебаний тела. Их рост обусловлен поглощением энергии ветрового потока динамической системой. Таким образом, мы имеем дело с автоколебаниями.

Если считать, что тело имеет только одну степень свободы в направлении оси y , то уравнение колебаний имеет вид

$$m\ddot{y} + \alpha\dot{y} + ky = F_y, \quad (8.28)$$

где сила F_y формируется следующим образом:

$$F_y = C_y \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot A_{yz} \cdot \sin \omega_s t. \quad (8.29)$$

В [10], [3] показано, что процесс изменения C_y можно описать уравнением Ван-дер-Поля:

$$\ddot{C}_y + a_1\dot{C}_y + a_2\dot{C}_y^3 + a_3C_y = a_4\dot{y}. \quad (8.30)$$

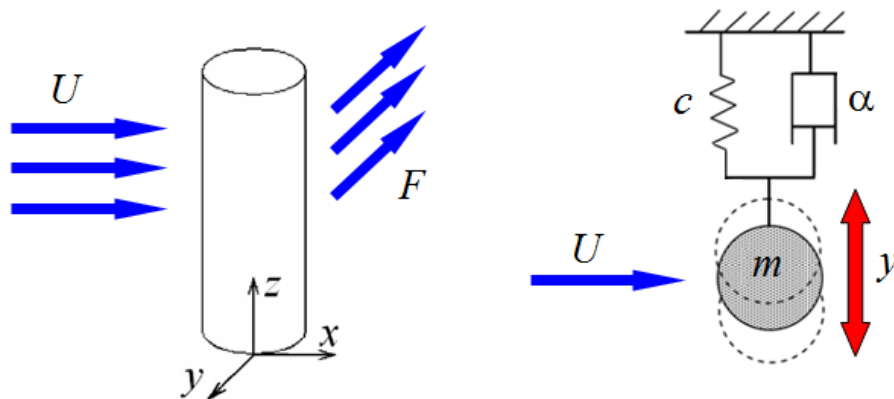


Рис. 8.2. Схема расчета сооружения на срывный флаттер

В (8.30) a_1, \dots, a_4 – постоянные величины, определяемые экспериментальным путем, например, при испытании моделей в аэродинамической трубе.

Уравнения (8.28) – (8.30) описывают процесс автоколебаний.

Взаимодействие потока и колеблющегося тела при определенных условиях (близости собственной частоты линейной модели тела и частоты срыва вихрей) приводит к усилению амплитуды внешнего воздействия, а также к приближению частоты срыва вихрей к собственной частоте (т. н. захватывание частоты).

3. Рассмотренная упрощенная модель не годится для анализа автоколебаний в реальных сооружениях. До последнего времени такой анализ проводился с помощью испытаний моделей сооружений в аэродинамических трубах (рис. 8.3). В мировой практике принята стратегия исследования взаимодействия ветрового потока с сооружением в два этапа: оценочного расчета и испытаний макета в аэродинамической трубе с оснащением его датчиками для статических и динамических измерений. Как правило, используют аэродинамические трубы разных конструкций и размеров, при этом считается, что испытания крупномасштабных моделей дают более детальную и точную картину. Результаты, полученные при испытании в аэродинамической трубе, переносятся на реальный объект с различными коэффициентами точности.

Однако создание крупных макетов и их испытания в трубах большого диаметра являются сложной и дорогостоящей работой.



Рис. 8.3. Аэродинамическая труба

4. В настоящее время проблему исследования автоколебаний можно решить с помощью компьютерного моделирования. В современных мощных компьютерных пакетах (например, ANSYS) существуют специальные программные средства, описывающие срыв вихрей. Используя эти средства (в ANSYS это программный пакет CFD-вычислительная гидродинамика), можно создать алгоритм для моделирования взаимодействия ветрового потока с упругой конструкцией и расчета автоколебаний. С помощью такого расчета был объяснен феномен «танцующего» Волгоградского моста [6, 7].

8.3.2. «Танцующий мост»

Мост через Волгу, эксплуатация которого началась в сентябре 2009 года, 20 мая 2010 года был закрыт из-за внезапно возникших интенсивных колебаний (рис. 8.4, 8.5). Этот эффект получил название «танцующего моста».

Колебаниям Волгоградского моста был посвящен ряд статей. В этих работах высказывалось мнение, что интенсивные колебания волгоградского моста есть автоколебания, причиной которых являются аэроупругие процессы. Математическое доказательство этому утверждению дано в [6, 7].



Рис. 8.4. Мост через Волгу в Волгограде



Рис. 8.5. Колебания Волгоградского моста (источник: www.1tv.ru)

Методика расчета вихревого флаттера состояла из следующих этапов:

1. Определение собственных частот и форм колебаний моста.
2. Определение частот срыва вихрей ветрового потока для различных скоростей и углов атаки потока.
3. Определение частот срыва вихрей ветрового потока для различных скоростей и углов атаки потока.
3. Установление возможных резонансных режимов.
4. Решение задачи взаимодействия сооружения и ветрового потока при выборе формы колебаний, частота которой наиболее близка к частоте срыва вихрей.

В результате расчетов были установлены скорости ветра и углы атаки, при которых возможны аэроупругие автоколебания: 13 м/с и 14.6 м/с для углов атаки 0° и 4° соответственно.

Результаты расчета амплитуд колебаний моста показаны на рис. 8.6.

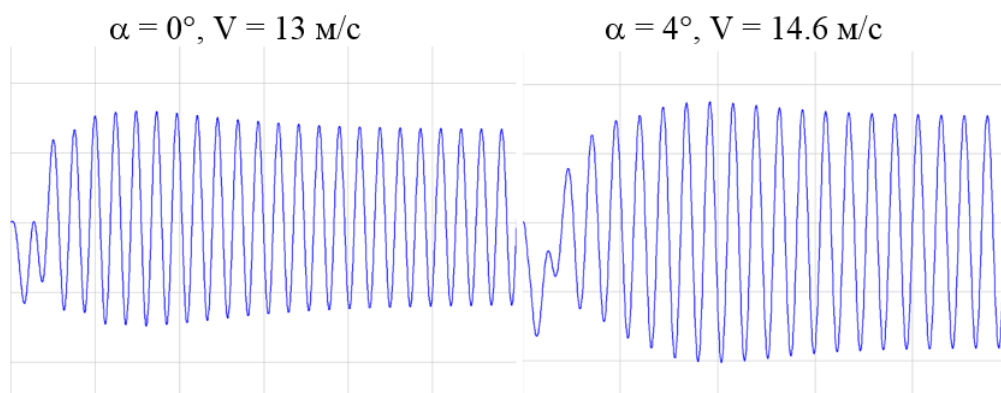


Рис. 8.6. Результаты расчета амплитуд колебаний моста

Амплитуды колебаний составили 280 мм и 380 мм для углов атаки 0° и 4° соответственно. В реальности они были примерно равны 400 мм.

На рис. 8.7 даны видеокадры вихрей Кармана в спутной струе, полученные расчетом. Для сравнения на рис. 8.8 приведено фото этих же вихрей Кармана, сделанное при физическом моделировании: испытании модели моста в аэродинамической трубе.

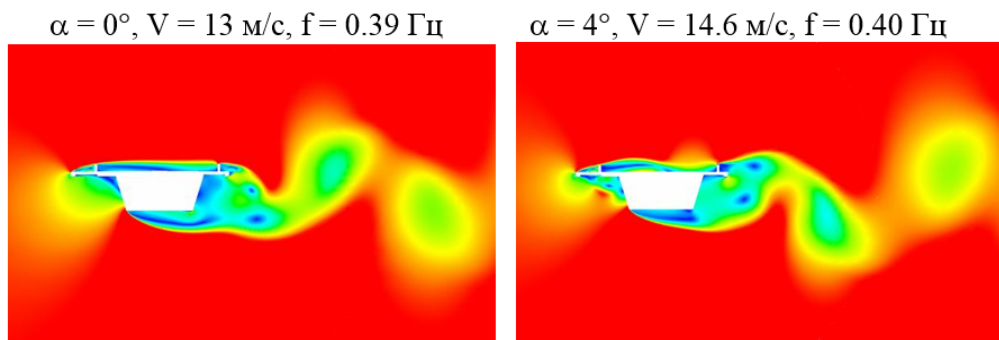


Рис. 8.7. Видеокадры вихрей Кармана в спутной струе



Рис. 8.8. Вихревой след за моделью моста

Таким образом, выполненные расчеты показали:

1. Причиной столь значительной раскачки моста стал вихревой флаттер.
2. Технология ПК ANSYS CFD позволяет исследовать вихревой флаттер мостов без использования дорогостоящего физического моделирования.

Важно отметить, что нежелательные процессы (срывной флаттер) возникают не вследствие высокой скорости ветра, а из-за близости частот срыва вихрей N_s и собственной частоты конструкции.

8.3.4. Галопирование

Галопирование характерно для гибких сооружений с особыми формами поперечного сечения, такими, как, например, прямоугольные или D-образные сечения. При галопировании, в таких сооружениях возможны колебания с большими амплитудами в перпендикулярном потоку направлении (в 10 или даже в значительно большее число раз превышающими размеры самого сечения в этом направлении) при частотах, которые значительно ниже частот срыва вихрей, характерных для того же самого сечения.

Классическим примером галопирования являются колебания поперек воздушного потока проводов линий электропередачи, которые покрылись слоем льда.

Физический смысл галопирования заключается в том, что при движении сечения в направлении, перпендикулярном потоку, направление потока по отношению к сечению сооружения меняется. Как следствие этого появляется дополнительная сила, действующая на сечение перпендикулярно направлению ветрового потока. В результате при колебательных движениях перпендикулярно потоку может появиться положительная обратная связь, «черпающая энергию» из ветрового потока, т. е. могут возникнуть автоколебания.

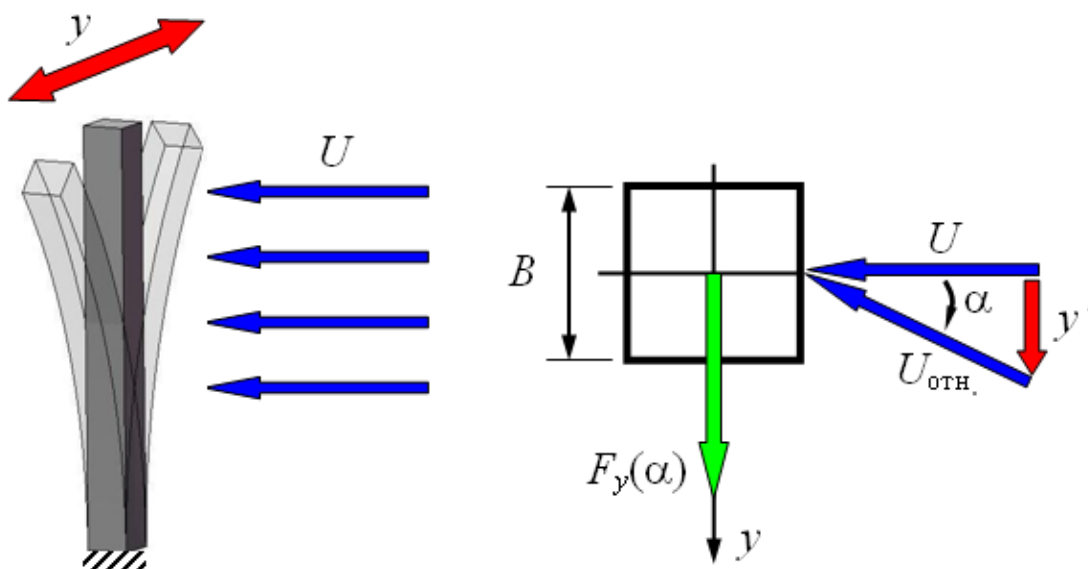


Рис. 8.9. Силы и скорости при галопировании

Чтобы аналитически сформулировать проблему галопирования, рассмотрим сечение призматического тела в набегающем потоке с плавным течением (рис. 8.9). Предположим, что тело колеблется в поперечном направлении (вдоль оси y) в потоке, движущемся со скоростью U . В этом случае угол атаки и скорость потока по отношению к сечению изменятся и будут равны:

относительная скорость

$$U_r = \sqrt{U^2 + \dot{y}^2}, \quad (8.31)$$

угол атаки

$$\alpha = \arctg(\dot{y} / U). \quad (8.32)$$

Формула силы, действующей на сечение в направлении U_r , имеет вид

$$D(\alpha) = \frac{1}{2} \rho U_r^2 B C_D(\alpha), \quad (8.33)$$

где $C_D(\alpha)$ – коэффициент лобового сопротивления, а подъемная сила (сила в направлении, перпендикулярном к U_r):

$$L(\alpha) = \frac{1}{2} \rho U_r^2 B C_L(\alpha). \quad (8.34)$$

Проекция этих сил на ось y равна:

$$F_y(\alpha) = -D(\alpha) \sin \alpha - L(\alpha) \cos \alpha. \quad (8.35)$$

Подставляя в (8.35) формулы (8.33) и (8.34), получим:

$$F_y(\alpha) = \frac{1}{2} \rho U^2 B C_{F_y}(\alpha), \quad (8.36)$$

где

$$U = U_r \cos \alpha, \quad (8.37)$$

$$C_{F_y}(\alpha) = -[C_L(\alpha) + C_D(\alpha) \operatorname{tg} \alpha] \sec \alpha. \quad (8.38)$$

В большинстве случаев для оценки возможности возникновения галопирования можно обойтись моделью, предложенной в [1], [10], где расчет ведется для системы с одной степенью свободы. Используем для дальнейшего анализа модель линейного осциллятора. Тогда можно записать

$$\ddot{y} + 2 \cdot \zeta \omega \dot{y} + \omega^2 y = F_y, \quad (8.39)$$

где ζ – относительное демпфирование; ω – собственная угловая частота; F_y – аэродинамическая сила, действующая на это тело.

Чтобы выяснить, когда возможно появление автоколебаний, достаточно рассмотреть состояние системы в окрестностях $y = 0$, где $\alpha \approx \dot{y}/U \approx 0$.

При этом условии

$$F_y(\alpha) \approx \partial F_y / \partial \alpha |_{\alpha=0} \alpha, \quad (8.40)$$

Значение производной $\partial C_{F_y} / \partial \alpha$, получаемой путем дифференцирования выражения (8.38), при $\alpha = 0$:

$$\partial C_{F_y} / \partial \alpha |_{\alpha=0} = -(dC_L/d\alpha + C_D)_0. \quad (8.41)$$

Таким образом, для малых перемещений уравнение движения будет иметь вид

$$m(\ddot{y} + 2 \cdot \zeta \omega \dot{y} + \omega^2 y) = -\frac{1}{2} \rho U^2 B (dC_L/d\alpha + C_D)_0 \dot{y}/U. \quad (8.42)$$

Если рассматривать аэродинамическую (правую) часть этого уравнения как некоторый вклад в общее демпфирование системы, то ее суммарный коэффициент «демпфирования» равен:

$$2m\zeta\omega + \frac{1}{2} \rho U^2 B (dC_L/d\alpha + C_D)_0 \dot{y}/U = d. \quad (8.43)$$

Если этот коэффициент положителен, то в системе происходит рассеивание (диссипация) поступившей в нее энергии. Если он отрицателен, то в системе могут происходить автоколебания, т. е. система динамически неустойчива.

Таким образом, в результате анализа уравнения (8.43) можно сформулировать условие неустойчивости рассматриваемой модели, т. е. условие возникновения галопирования:

$$2m\zeta\omega + \frac{1}{2} \rho UB \left[\frac{dC_L(\alpha)}{d\alpha} + C_D(\alpha) \right] < 0, \quad (8.44)$$

где $C_L(\alpha)$ и $C_D(\alpha)$ – коэффициенты бокового и лобового сопротивления как функции угла атаки воздушного потока; $2m\zeta\omega$ – конструктивное демпфирование.

Так как коэффициент лобового сопротивления всегда положителен, то система может быть динамически неустойчива при

$$\frac{dC_L(\alpha)}{d\alpha} < 0, \quad \left| \frac{dC_L(\alpha)}{d\alpha} \right| > |C_D(\alpha)|. \quad (8.45)$$

Соотношение (8.45) является необходимым условием неустойчивости и называется критерием Глауэрта – Ден-Гартога.

Реализация условия (8.45) не может иметь места в случае кругового профиля, так как $dC_L(\alpha) / d\alpha \equiv 0$.

Для многих задач, встречающихся в инженерных исследованиях ветровых воздействий, рассмотренная выше модель вполне достаточна, чтобы выявить возможности проявления неустойчивости, связанной с галопированием. Обобщение модели (8.39) на случай учета высших форм колебаний сооружения выполнено в [8, 9].

На рис. 8.10 показаны коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления для восьмиугольного в плане столбчатого сооружения. Численный анализ этих графиков показывает, что в диапазоне угла атаки ветра ($-5^\circ < \alpha < 5^\circ$) сооружение восприимчиво к галопированию согласно критерию Ден-Гартога.

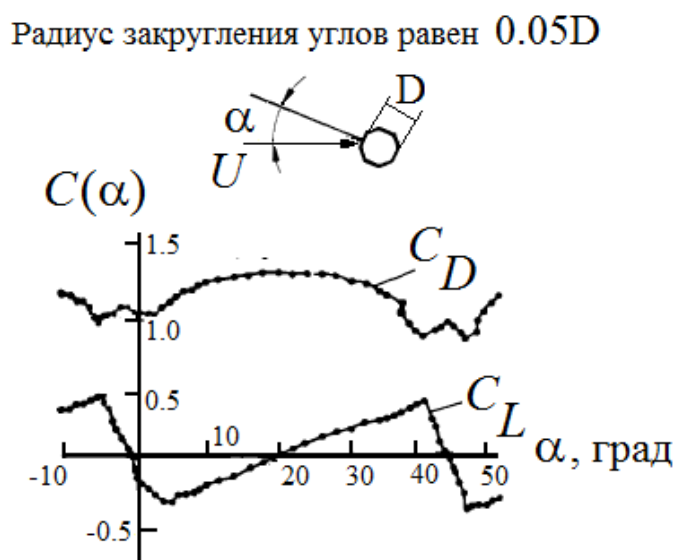


Рис. 8.10. Коэффициенты сил, действующих на восьмиугольную призму ($Re = 1,2 \cdot 10^5$)

Однако более глубокое исследование задачи предполагает анализ вместо линейной модели (8.42) нелинейной модели. В последней линеаризация (8.40) не производится.

Список литературы

1. Ден-Гартог Дж. Механические колебания / пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1960. – 574 с.
2. Динамический расчет зданий и сооружений (Справочник проектировщика) / под ред. Б. Г. Коренева и И. М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.
3. Динамический расчет зданий и сооружений (Справочник проектировщика) / под ред. Б. Г. Коренева и И. М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1981 – 215 с.
4. Ланда П. С. Срывной флаттер и эффект затягивания // Вестник научно-технического развития. 2009. № 6 (22). С. 10–19.

5. *Попов Н. А.* Рекомендации по уточненному динамическому расчету зданий и сооружений на действие пульсационной составляющей ветровой нагрузки / ГУП ЦНИИСК имени В. А. Кучеренко, ООО «ЕВРОСОФТ». М., 1999. 26 с.
6. *Мелешко В. А., Рутман Ю. Л.* Применение технологии FSI для определения аэроупругих колебаний моста в Волгограде // ANSYS Advantage, – Нефтегазовое оборудование. – 2011. – № 16. – С. 7–10.
7. *Мелешко В. А., Рутман Ю. Л.* Причины колебаний моста в Волгограде // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – № 3. – С. 55–58.
8. *Мелешко В. А., Рутман Ю. Л.* Оценка сооружений на возникновение галопирования // Инженерно-строительный журнал. – 2011. – № 6 (24). – С. 6–12.
9. *Мелешко В. А.* Аэроупругая неустойчивость зданий и сооружений в ветровом потоке: дис. ... канд. техн. наук. – СПб.: СПбГАСУ, 2011. – 127 с.
10. *Симиу Э., Сканлан Р.* Воздействие ветра на здания и сооружения / пер. с англ. и ред. Б. Е. Маслова. – М.: Стройиздат, 1984. – 360 с.
11. СНиП 2-01-07-85. «Нагрузки и воздействия».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Глава 1. Динамические системы и колебательные процессы.....	4
1.1. Основные понятия и определения	4
1.2. Примеры различных динамических систем, уравнений и процессов	7
Глава 2. Составление уравнений колебаний динамических систем.....	20
2.1. Метод уравнений Лагранжа	20
2.2. Метод кинетостатики	24
2.3. Метод конечных элементов (МКЭ)	27
2.4. Составление уравнений колебаний с учетом диссипативных сил.....	30
2.5. Составление уравнений колебаний при кинематических воздействиях	32
Глава 3. Методы решения и исследования уравнений колебаний динамических систем	36
3.1. Свободные колебания линейной системы с одной степенью свободы	36
3.2. Вынужденные колебания линейной системы с одной степенью свободы	43
3.3. Стационарные решения	49
3.4. Линейные системы с конечным числом степеней свободы. Метод нормальных координат	58
3.5. Уравнения колебаний для систем с бесконечным числом степеней свободы	70
3.6. Метод нормальных координат для систем с бесконечным числом степеней свободы	76
3.7. Использование метода нормальных координат для анализа экспериментальных данных	84
Глава 4. Нелинейные динамические модели	87
4.1. Примеры нелинейных моделей.....	87
4.2. Билинейная силовая характеристика (с упругой разгрузкой)	88
4.3. Нелинейные модели с несколькими степенями свободы.....	90
4.4. Численные методы решения нелинейных задач	90
Глава 5. Случайные колебания	94
5.1. Математические основы теории случайных функций.....	94
5.2. Воздействие случайной стационарной нагрузки на линейную колебательную систему	100
5.3. Пример расчета случайных колебаний	102
5.4. Расчет строительного сооружения на воздействие ветровых пульсаций	106
Глава 6. Сейсмостойкость сооружений.....	109
6.1. Причины и характеристики землетрясений.....	109
6.2. Развитие теории сейсмостойкости.....	114
6.3. Методы расчета сейсмостойкости	117
6.4. Примеры расчетов	129
6.5. Упрощенный нелинейный динамический расчет сейсмостойкости.....	145

6.6. Нелинейный статический анализ Pushover.....	148
Глава 7. Сейсмозащита	165
7.1. Введение.....	165
7.2. Конструктивные решения систем сейсмоизоляции.....	167
7.3. Демпфирующие устройства	177
7.4. Силовые характеристики.....	180
7.5. Методы анализа систем сейсмоизоляции. Выбор параметров	182
7.6. Адаптивные системы сейсмозащиты	223
7.7. Динамические гасители колебаний	224
Глава 8. Методы расчета сооружений на ветровые нагрузки	234
8.1. Статические расчеты на ветровые нагрузки.....	234
8.2. Динамические расчеты на ветровые нагрузки. Колебания структуры, вызванные турбулентным потоком.....	237
8.3. Автоколебания.....	240

Научное издание

Рутман Юрий Лазаревич
Островская Надежда Владимировна

**ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ:
СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ, СЕЙСМОЗАЩИТА,
ВЕТРОВЫЕ НАГРУЗКИ**

Монография

Редактор *А. А. Стешко*
Компьютерная верстка *В. С. Весниной*

Подписано к печати 07.05.2019. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бум. офсетная.
Усл. печ. л. 14,8. Тираж 500 экз. Заказ 68. «С» 22.
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4.
Отпечатано на МФУ. 198095, Санкт-Петербург, ул. Розенштейна, д. 32, лит. А.

ДЛЯ ЗАПИСЕЙ