Герман Ганкель. К 175-летию со дня рождения.

Г.И. Синкевич, СПбГАСУ

galina.sinkevich@gmail.com

Опубликовано: Синкевич Г.И. Герман Ганкель. К 175-летию со дня рождения / Синкевич Г.И. // Труды XII Международных Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ. – 2014. – с. 373-380.

Биография. Герман Ганкель (Ханкель, 14.02.1839–29.08.1873), родился в Галле в семье школьного учителя, а затем профессора физики Вильгельма Готтлиба Ганкеля. В 1849 г. семья переехала в Лейпциг, где Вильгельм Готтлиб стал профессором университета. Уже в гимназии Герман проявлял интерес к древним языкам, читал по-гречески математические тексты, и написал первую школьную работу по текстам из Диофанта. В 1857 г. он поступил в университет Лейпцига, где изучал математику у Августа Фердинанда Мёбиуса (1790–1868), а также у алгебраистов Вильгельма Дробиша[1] (1802–1896) и Вильгельма Шайбнера (Wilhelm Scheibner (1826–1908), а физику у своего отца. По традиции, немецкие студенты должны были каждый семестр слушать лекции в различных университетах. Ганкель в 1860 году слушал лекции Георга Бернхарда Римана (1826–1866) в Геттингене, а в 1861 году лекции Карла Вейерштрасса (1815–1897) и Леопольда Кронекера (1823–1891) в Берлине.

В 1861 году в Геттингене он защитил работу «К общей теории движения жидкостей», а в 1862 году в Берлине получил докторскую степень за диссертацию «Об особом классе симметричных определителей».

Право на чтение лекций он защитил в 1863 году в работе «Эйлеровы интегралы от неограниченного аргумента» [2] в университете Лейпцига, где и начал преподавать.

В 1867 году Ганкель стал экстраординарным профессором, но в том же году переехал в Эрланген, где стал ординарным, то есть штатным, профессором. Там он женился на Марии Диппе, а в 1869 году молодая семья переехала в Тюбинген, где Ганкелю предложили кафедру. В 1872 году Ганкель перенёс тяжёлый менингит и в 1873 году в 34-летнем возрасте неожиданно умер от инсульта.

Научной особенностью математического творчества Ганкеля было сочетание историко-математического и философского методов. Он видел развитие идеи во времени, и связь идеи с потребностями времени. В частности, он заметил, что математические операции последнего века влекут постепенное расширение понятия числа.

Его основные интересы разделялись между теорией комплексных чисел, теоретической арифметикой, теорией функций, проективной геометрией и историей математики. Ганкель был первым профессором, читавшим студентам лекции по истории математики, ему принадлежит честь открытия и популяризации идей Больцано и Грассмана. Уже в работе [2] 24-летнего Ганкеля содержится историко-математический анализ работ Эйлера.

Комплексные числа и функции. Интерес к теме комплексных функций проявился у Ганкеля благодаря его учителю Риману.

В XIX веке теория функций комплексной переменной формировалась, накапливая результаты. Ещё не существовало обобщения теории. Представление комплексных чисел в виде точек плоскости получило признание с 1831 года, когда была опубликована работа Карла Гаусса (1777–1855) «Теория биквадратных вычетов», включавшую обоснование комплексных чисел и их геометрическую интерпретацию. Он же исследовал широкий класс специальных

[1] Дробиш был также исследователем истории алгебры, что видно из его книги [1].

функций, в том числе эллиптических. Независимо от Гаусса теорию эллиптических функций разработал норвежский математик Нильс Абель (1802–1829). Наряду с ним вёл фундаментальные исследования немецкий математик Карл Якоби (1804–1851). Его книга «Новые основания эллиптических функций», изданная в 1829 году, содержит теорию тэта-функций, теперь носящих его имя. Впоследствии тему эллиптических функций разрабатывали Ж. Лиувилль, Ш. Брио, Ж. Буке, Ш. Эрмит, А. Гурвиц.

Огромен вклад в теорию функцию комплексной переменной французского математика Огюстена Коши (1789–1857). Он доказал теорему о независимости интеграла от пути интегрирования, построил теорию вычетов с её приложениями, получил интегральную формулу и из неё вывел разложение в степенной ряд. В 1843 году французский военный инженер и математик Пьер Лоран (1813–1854) опубликовал работу о разложении функции комплексного переменного, непрерывной и дифференцируемой в круговом кольце, в ряд по целым положительным и отрицательным степеням[2]. В 1862 году Эжен Руше (1832–1910), выпускник Политехнической школы Парижа, опубликовал статью, содержащую теорему о количестве нулей аналитических функций.

С 1850-х годов Карл Вейерштрасс (1815–1897) читал лекции по аналитическим функциям. Он независимо получил результаты Коши и Лорана, создал основы теории аналитического продолжения рядов.

В 1851 году Бернгард Риман (1826–1866) представил свою знаменитую докторскую диссертацию «Основания общей теории функций одного комплексного переменного», определившую новый этап в развитии теории аналитических функций и содержащую исходные идеи топологии поверхностей (многолистные поверхности), а в 1857 году развил эти идеи в «Теории абелевых функций». В 1864 году появились лекции Дюрега[3] (друга Дедекинда) по теории функций комплексной переменной, в 1865 году С. Нейман опубликовал лекции по Римановой теории абелевых интегралов.

Работа Ганкеля «Теория комплексных числовых систем» [3] появилась в 1867 году (русский перевод под ред. И.И. Парфентьева – Казань, 1912). В ней содержалось обобщение мнимых чисел, теория кватернионов Гамильтона на базе геометрического представления для задач математического анализа и изложение идей Грассмана.

Работу Ганкеля отличало выявление исторических связей и их влияние на постепенное формирование основных понятий теории функций комплексной переменной с середины XVIII века. Это позволило Ганкелю определить направление дальнейшего развития математики, в частности, грядущее расширение понятия числа[4].

В его работах по теории интегрирования, написанных в духе и под влиянием Римана, есть предчувствие теории меры.

Теоретическая арифметика. С 1867 года Ганкель занимается теоретической арифметикой, одним из первых оценив её значение как фундаментальной теории для дальнейшего развития математики. Его первая статья «Принцип постоянства формальных

---

[2] Его работа была неизвестна в Германии. В 1822 году Мартин Ом получил разложение в ряд как по отрицательным, так и по положительным степеням переменной, а в 1841 году Вейерштрасс в работе «Darstellung einer analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen, deren absoluter Beitrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt» независимо от Лорана получил разложение комплексной функции в кольце в ряд по отрицательным и положительным степеням.

[3] Дюрег Генрих (1821-1893), немецкий математик, работал вместе с Дедекиндом в Цюрихе. Автор работ по теории функций комплексной переменной и эллиптическим функциям.

[4] В 1869–1872 годах появились новые концепция числа, созданные независимо Шарлем Мере во Франции, и немецкими математиками Эдвардом Гейне, Георгом Кантором и Рихардом Дедекиндом.

законов» (Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze) была опубликована в 1867 году. В том же году вышла его книга «Теория комплексных числовых систем». По Ганкелю «идеальная цифровая система должна с помощью возможно малого числа знаков представлять каждое число в наиболее сжатом и наиболее наглядном виде». Это требование называют постулатом Ганкеля. Ему же принадлежит формулировка принципа постоянства формальных законов для новых концепций. Ганкель показал, что произведение отрицательных чисел есть расширение обычного умножения для положительных чисел, а также, что ни одна система гиперкомплексных чисел не может удовлетворить всем законам обычной арифметики.

Как историк математики, Ганкель многое сделал для восстановления справедливой оценки идей Больцано и Грассмана. Более того, именно исторический взгляд на современную ему математику позволил ему подойти к проблеме аксиоматизации арифметики. Ганкель хорошо знал работы Больцано, начиная с самых ранних, опубликованных в 1810 году.

Больцано один из первых начал разрабатывать аксиоматический метод как общенаучную логическую процедуру с такими характеристиками, как полнота, непротиворечивость, независимость.

В 1810 году Больцано обратил внимание на то, что истины арифметики не могут быть выведены из эмпирических наук, прежде всего из геометрии [4]. Он основал правила арифметики на четырёх аксиомах и двух правилах сложения и умножения, из которых можно вывести все правила арифметики для натуральных чисел.

В 1820–1825 годах Больцано развивал теорию целых и рациональных чисел (рукопись «Reine Zahlenlehre»), а 1830-х годах и теорию действительного числа [5]. Эта теория близка к современной концепции действительного числа, включая определение числа через сечение (за 40 лет до Дедекинда), но опирается на понятие переменного бесконечно большого и бесконечно малого числа. Возможно, если бы рукописи Больцано 1830-х годов были опубликованы и обрели признание, мы бы имели сейчас иную математику, основанную на нестандартном анализе.

С 1822 по 1852 год выходит цикл работ «Опыт логического изложения математики» («Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik» в трёх томах, Нюрнберг) Мартина Ома[5] (1792-1872), математика, младшего брата физика Георга Ома. Его исследования лежали в области теории чисел и геометрии, теории дзета-функций, теории тригонометрических рядов и оснований математики. Он изучал степенно-показательные комплексные функции, рассматривая анализ в формально-логическом аспекте. Его идеи формализации алгебры были близки Ганкелю.

В 1827 году Мёбиус предложил барицентрическое исчисление (Der Barrycentrische Calcul, Лейпциг, 1827).

В 1843 году начал выявление аксиом арифметики Н. И. Лобачевский (Алгебра или счисление конечных, 1834 г.).

В 1861 году попытку построить теорию арифметики предпринял школьный учитель, математик Герман Грассман [6]. Он дал определения сложения и умножения натуральных чисел, доказал основные свойства операций над ними (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность) и прояснил роль индуктивных определений. Необычная терминология и абстрактное изложение делали его сочинения малодоступными, он не был понят коллегами.

---

[5] Мартин Ом был учителем Эдварда Гейне и Рудольфа Липшица. Ому принадлежит термин «золотое сечение»(goldener Schnitt).

Лишь Ганкель в 1867 году разъяснил сущность его идей[6], а в 1869 году в своей работе «Развитие математики в последние века» [Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderte] дал своё независимое изложение теоретической арифметики. Он рассмотрел идею обоснования операций над алгебраическими величинами, необходимость которой проявлялась с первой трети XIX века[7]. Также Ганкель в работе о комплексных числовых системах рассмотрел действительные, комплексные и гиперкомплексные числовые системы, барицентрическое исчисление Мёбиуса 1827 года и построил для него алгебраическую систему, а также построил алгебраические системы для некоторых алгебр Грассмана и кватернионов Гамильтона. Особенно остро проблема перманентности формальных законов проявилась с появлением кватернионов в 1843 году (Уильям Гамильтон, первые работы в 1833 г.), на которые этот принцип уже не распространялся.

Ганкель выделил инвариантный почти для всех цивилизаций принцип записи чисел: «закон убывающего следования разрядов»: при написании чисел, составленных с помощью сложения разрядов (аддитивно), высший разряд при принятом данным народом способе чтения и письма предшествует на письме низшим разрядам, то есть старшие разряды пишутся левее младших. Вопрос о необходимости аксиоматизации арифметики, поднятый Больцано и продолженный Грассманом и Ганкелем, был дополнен работами Дедекинда, Буля, и завершён в 1889 году Дж. Пеано.

Принцип сгущения особенностей. В 1870 году в Тюбингене вышла знаменитая работа Ганкеля «Исследование бесконечное число раз колеблющихся и разрывных функций» [7]. В 1854 г. Риман привёл пример функции, разрывной и недифференцируемой на всюду плотном множестве. Кроме того, в 1861 г. Риман указал еще пример функции, не дифференцируемой на всюду плотном множестве. До конца 70-х годов после Римана не было опубликовано ни одного примера функции без производной на бесконечном множестве точек, и всё ещё сохранялось убеждение в том, что на каждой непрерывной кривой можно найти точку с касательной. Однако уже в 1870 г. Ганкель предложил так называемый метод сгущения особенностей для построения функций, в которых производная отсутствует на всюду плотном множестве точек, и приводит конкретный пример такой функции. Развивая идею критерия интегрируемости, Ганкель близко подходит к понятию меры. Он переформулировал критерий интегрируемости Римана, делая акцент на метрических свойств множества точек. Указав, что функции не обладают общими свойствами, Ганкель попытался ввести свою классификацию функций, рассмотрев интегрируемость каждого типа, и представил метод, основанный на его принципе конденсации особенностей, для построения функций с особенностями в каждой рациональной точке. Хотя теория множеств ещё не появилась, и Ганкелю не хватало характеристик для описания множеств точек разрыва, его работа стала важным продвижение к современной теории интеграла. Иной метод построения непрерывной монотонной функции в 1873 г. приводит Шварц. Построенная таким образом функция не имеет конечной производной на бесконечном числе точек на любом интервале. Наиболее значимый результат в этом направлении был получен Вейерштрассом (1872 г.): он строит свой знаменитый пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке. Этот пример определил направление ряда

---

[6] Позже Клебш продолжил интерпретацию алгебры Грассмана.

[7] Первым обратил внимание на эту проблему Джордж Пикок (1791-1858). Он ввел различие между арифметической алгеброй и символической алгеброй. Идея Пикока, известная под названием «принцип перманентности эквивалентных форм», была выдвинута им в 1833 г. в «Докладе о последних достижениях и современном состоянии некоторых областей анализа», прочитанном на заседании Британской ассоциации поощрения науки. Его идеи были развиты Ганкелем.

исследований таких функций и привел к повышению требований к строгости математических рассуждений и построений.

Работа Ганкеля была созвучна разрабатываемой в те же годы его отцом, физиком Вильгельмом Готтлибом Ганкелем, теории вихрей.

Цилиндрические функции Ганкеля. В Mathematische Annalen были опубликована статья Ганкеля [8], посвящённая некоторым специальным функциям, зависящим только от расстояния от начала координат, а также функциям вида $H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iN_\nu(x)$, $H_\nu^{(2)}=J_\nu(x)-iN_\nu(x)$, называемым цилиндрическими функциями Ганкеля или функциями Бесселя третьего рода. Они представляют собой линейные комбинации функций Бесселя первого и второго рода, и являются решениями уравнения Бесселя.

Проективная геометрия. В 1875 году, уже после смерти Ганкеля, под редакцией А. Гарнака вышли лекции Ганкеля «Элементы проективной геометрии»[9], в которые включены исторические сведения о геометрических методах и соотношения методов современной геометрии, учении Понселе, Шаля, Штаудта с критическим анализом, подобно анализу систем счисления. Как заметил сам Ганкель в 1869 году в речи "Развитие математики в последние века» (Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderte), «новая [проективная] геометрия и представляет собой тот «царский путь, в котором несправедливо отказал Евклид Птолемею», подразумевая трудности евклидовой, метрической геометрии и заманчивые перспективы развития геометрии проективной. Правда, Феликс Клейн назвал эту речь «блестяще прочитанной, но по содержанию совершенно не обоснованной» [10].

Ганкель как историк математики. Творчество Ганкеля относится к периоду подъёма математики в Германии, увенчавшегося появлением концепций действительного числа, разрабатываемых Рихардом Дедекиндом, Георгом Кантором и Эдвардом Гейне. В это же время (1869–1872 годы) во Франции появилась концепция числа Шарля Мере, но события, предшествовавшие франко-прусской войне, которая началась летом 1870 года, не способствовали научному обмену между математиками Франции и германских земель. Помимо этого во Франции после смерти Коши произошло замедление математических исследований. Теорию Мере не оценили соотечественники. Как заметил сам Ганкель в 1869 году в речи "Развитие математики в последние века» [11], после смерти Коши «Княжество математики теперь бесспорно переместилось в Германию, и хотя во Франции ещё есть энергичные ветераны, такие как Шаль и Лиувилль, но у них нет достаточного количества достойных последователей, способных конкурировать с немцами» [11, с. 29].

Ганкель хотел написать историю математики. Как заметил Морис Кантор, Ганкель был единственным среди немецких профессоров, преподававшим историю математики [12]. Рукопись Ганкеля «Исторические очерки развития математики в древности и средние века» объёмом более 400 страниц была готова к печати и опубликована уже после его смерти, в 1874 году [13]. Она содержит подробнейшее изложение истории греческой математики, математики Индии, Китая, арабских стран и средневековой европейской математики до XVI века. Наряду с глубоким анализом в книге можно встретить как исторические неточности, так и гипотезы исторического характера. Например, интересно предположение Ганкеля о происхождении китайской математики из Индии. А.В. Васильев высоко оценивал «Исторические очерки математики в древности и средние века» Ганкеля, называя их глубокими и вдумчивыми [14].

Ганкель, равно как Вейерштрасс, Дедекинд и Кантор, полагал математику созданием ума. Он писал: «Математика есть чисто интеллектуальная теория форм, объектами которой являются не комбинации величин или их образов, то есть чисел, но воплощение мыслей, которым не обязательно соответствуют эффективные объекты или их отношения»[11, с. 34].

Статья «Предел»[15]. Статья «Grenze» – предел или граница[8] – была одной из трёх статей, написанных Ганкелем для Энциклопедии наук и искусств, которая начала выходить с 1818 года. В 1871 году вышел 90-й том. Две других статьи Ганкеля в «Энциклопедии» были посвящены гравитации и работам Лагранжа по решению уравнений. Статья «Предел» занимает 26 страниц в две колонки мелким готическим шрифтом. Эта статья интересна тем, что понятие предела в эти годы ещё формировалось – Вейерштрасс с 1861 года использовал в своих лекциях язык ε-δ, а понятия предела через фундаментальные подпоследовательности (Гейне и Кантор) ещё не было – оно появится в 1872 году, равно как и понятие предельной точки у Кантора (1872 г.) и у Вейерштрасса (1883 г.). Ганкель рассматривает историю понятия предела в обратной перспективе, прогнозируя возможные тенденции развития, которые, как мы уже знаем, осуществились в последующие десятилетия.

В этой статье проявляется мысль Ганкеля о принципе постоянства формальных законов наряду с постепенным расширением основных понятий математики.

Здесь он впервые отмечает важность работ Больцано о бесконечных рядах и публикует пример непрерывной функции, недифференцируемой в бесконечном числе точек.

Ганкель начинает с современного ему понятия предела, данного Коши в «Курсе анализа» 1821 года, затем обращается к истокам – построению предела у Евклида, очень подробно о методе исчерпываний (§1), Аристотеля и построению предела у Архимеда (§2). Далее он рассматривает развитие понятия бесконечности у Михаэля Штифеля в «Arithmetica Integra» 1544 года, у Кеплера «Новая стереометрия винных бочек» 1605 года, Кавальери 1635 г., Ферма, Роберваля, Паскаля, Валлиса, Лейбница, Больцано[9] (§3). Формированию понятия предела в XVIII – начале XIX века посвящён §4 – Ганкель рассматривает работы Больцано1810, 1816 и 1851 годов, понятие предела от Ампера (1806 г.) до Дирихле (1829 г.), работы Якоби и Гаусса (1840 г.). Понятию предела функции посвящён §5 - предел при бесконечном приращении аргумента, суммирование бесконечного количества слагаемых, дифференцирование. §6. Приближение к пределу у Мак Лорена, Тейлора, Ньютона, Лейбница. Теорема Лагранжа, ряды Тейлора. §7. Предельное значение (Grenzwert). §8. Доказательство существования предела. Рассматривается предел частичных сумм сходящихся рядов, в том числе и тригонометрических и приводится известный пример[10] ряда $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\sin mx}{m}$, который имеет суммой непрерывную функцию всюду, кроме точек вида $x=(2m+1)\pi$. Здесь же Ганкель рассматривает предельное поведение функций вида $\sin\frac{1}{x}$.

Далее Ганкель вводит понятие равномерного предельного поведения, которое в 1872 году будет развито в понятие равномерной непрерывности и воплотится в теореме Кантора–Гейне: «Если *A* является пределом, то всегда можно найти такое значение ε, что $f(a+\varepsilon)$

[8] Grenze – этот немецкий термин употреблялся наряду с термином limit, но имеет больший объём понятия.
[9] Ганкель ссылается на книгу Больцано «Парадоксы бесконечности», вышедшую в 1851 г.
[10] Впервые этот ряд встречается у Эйлера, затем его приводит Фурье в «Аналитической теории теплоты». Но Фурье включал в график рассматриваемой функции и отрезки перпендикуляров, восстановленных в точках конечных разрывов, поэтому функция в его понимании не была разрывной. В 1821 году Коши сформулировал утверждение, что всюду сходящийся ряд непрерывных функций имеет пределом непрерывную функцию. В 1826 году Абель привёл в качестве контрпримера к этому утверждению указанный тригонометрический ряд.

отличается от предела A на сколь угодно малое положительное значение σ, и как только δ < ε, так сразу $f(x+\delta)$ отличается от A не более чем на σ. В связи различными потребностями встречаются различные определения предела; приведём следующую строгую формулировку, подведя итог в строгом соответствии с концепцией этой идеи.

Если функция $f(x)$ принимает конечное значение A в интервале между $x=a$ и $x=a+\varepsilon$, и для каждого произвольного δ принимает любые значения, тогда можно определить разность $A-f(a+\delta)$, при том, что δ не выводит за пределы интервала, то есть $A-f(a+\delta)$ проходит через нулевое значение, то $f(a+\varepsilon)$ неограниченно приближается к своему пределу при неограниченно убывающем ε» [стр. 193]. Это замечание интересно тем, что здесь используется мысль Больцано 1817 года о том, что теорема Ролля есть основное свойство непрерывности[11]. В следующем параграфе Ганкель рассматривает непрерывные функции (§9), которые он определяет так: «Функция $f(x)$, которая при $x=a$ принимает конкретное значение $f(a)$, называется непрерывной в этой точке, если для произвольно малого ε разность $f(a+\delta)-f(a)$ для всех $\delta<\varepsilon$, численно не превосходит сколь угодно малой величины σ.

Точкой разрыва называют такую точку $x=a$, для которой не существует столь малого ε, чтобы разность $f(a+\delta)-f(a)$ для всех $\delta<\varepsilon$ была бы меньше произвольной величины σ» [стр. 194]. Как мы видим, Ганкель вводит более сильное определение непрерывности, хотя не проявляет зависимости между ε и σ. Заметим также, что Коши в 1821 году называл «непрерывной такую функцию, для которой в любой точке между двумя заданными пределами разность $f(x+\alpha)-f(x)$ неограниченно убывает вместе с числовым значением α. Другими словами, функция $f(x)$ остаётся непрерывной относительно x между двумя данными пределами, если между этими пределами бесконечно малое приращение переменной порождает всегда бесконечно малое приращение самой функции» (Коши, Курс анализа, 1821 год, стр. 43).

§10 посвящён свойствам непрерывных функций, при этом помимо известных к тому времени свойств непрерывных функций Ганкель рассматривает понятие осцилляции. Далее Ганкель рассматривает разрывные функции (§11) и приводит пример точечно-разрывной функции (по Риману) – нигде не дифференцируемой непрерывной функции. Заметим, что классификацию разрывов, а также определение непрерывности через односторонние пределы ввёл Улисс Дини в 1878 году.

§13 посвящён понятию предела в анализе. Большое значение развитию понятия предела в анализе Ганкель придаёт Лагранжу и его курсу Leçons sur le calcul des fonctions 1806 года, работам Ампера 1806 года, Раабе 1839 года. В §14 он рассматривает понятие отношения дифференциалов, т.е. производную и её геометрический смысл; в §15 рассматривается понятие определённого интеграла и его история от формулы Ньютона-Лейбница до Коши и до Дирихле, генезис методов Архимеда; свойства определённого интеграла. §16 посвящён несобственному интегралу и работам Римана, §17 – бесконечным рядам. §18 - историческое развитие понятия бесконечного ряда. (Кеплер, Кавальери, Сен-Винсент, Ньютон, Гранди, Эйлер, Я.Бернулли, Маклорен, Раабе, Лагранж, Ролль). Бесконечные (расходящиеся) ряды. Исторический обзор: Кеплер, Кавальери, Григорий Сен-Винсент ($\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots$), Николаус Меркатор (

[11] Впоследствии это утверждение получило название теоремы Больцано-Вейерштрасса.

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...$), Лейбниц ($\frac{1}{4}\pi$), Ньютон (биномиальный ряд). Приводит известный парадокс, псевдоразрешённый в 1703 году Г. Гранди: $\frac{1}{2}=1-1+1-...$; приводит парадоксальные примеры суммирования рядов Эйлером. Якоб Бернулли, Мак Лорен. Подробно рассматривает работы немецких математиков с 1813 года, в том числе швейцарского математика Раабе, основные работы которого были опубликованы в журнале Крелле. Покаывает связь традиций немецкой математики с работами Лагранжа, Ролля, Лакруа (1810). § 19. Критический период (после Лагранжа). Фурье, Больцано. Французская школа. Роль журнала Крелле. Гаусс. Абель. Ряды Фурье. Гаусс, Коши. Больцано «О биномиальном ряде (1816 год). Парадоксы бесконечности Больцано.

§20. Теория Мартина Ома. Мартин Ом с 1822 по 1852 год издавал «Опыт логического изложения математики» в трёх томах, где излагал основы формализованной алгебры. Ганкель критикует Ома за неоправданные формальные обобщения, не учитывающие связи с приложениями, но ставит ему в заслугу принцип расширения числовой области и приводит его примеры разложения некоторых биномиальных рядов как по положительным, так и по отрицательным степеням

Из работ Ганкеля видно, насколько остро встала необходимость классификации точечных множеств и характеристики их сравнения, классификации точек разрыва; насколько нужна была новая концепция числа, как с точки зрения теоретической арифметики, так и с позиций анализа; необходимость новой концепции непрерывности и нового категориального аппарата. В последующие годы Кантором была создана теория множеств, Кантором и Дедекиндом – концепция непрерывности, Дедекиндом и Пеано – аксиоматика арифметики; в лекциях Вейерштрасса начинают формироваться концепция компактности, концепция метрического и топологического пространства, позже оформившиеся в работах Мориса Фреше (1906 г) и Феликса Хаусдорфа (1914 г.)[16]. Мы видим принцип историзма Ганкеля, в обратной перспективе оценивавшего развитие математики, что давало возможность прогнозировать её развитие. Ганкель отмечает, что если в прежние века математика изучала и описывала естественный мир, то в последний век создавался математический аппарат для технических достижений. Потребность в математических методах в приложении к теории потенциала, электротехники и другим разделам физики XIX века давала свободу выбора адекватных математических моделей, соответствующих прикладным потребностям в областях, созданных физиками.

Как утверждал Ганкель, «Математика – наука, которая создаётся людьми, в разное время разные народы вносили в неё свой дух» [11, с. 25]. «Во многих науках новое поколение разрушает созданное предыдущим и отменяет установленное ранее. Только в математике каждое новое поколение добавляет новый этаж к прежней структуре»[11, с. 34].

Литература.

1. Drobisch M.W. Grundzüge der Lehre von den höheren Gleichungen. Leipzig. – 1834. – 386 S.
2. Hankel H. Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes Habilitations-Dissertation, in Commission bei Leopold Voss, Leipzig. – 1863. – 44 S.
3. Hankel H. Theorie der complexen Zahlensysteme / H. Hankel // Vorlesungen über die komplexen Zahlen und ihre Functionen, 1. Teil. – Leipzig: Leopold Voss. – 1867. – 212 S.
4. Bolzano B. Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik (German), Erste Lieferung / B. Bolzano. Unveränderter reprografischer Nachdruck der Ausgabe von 1810. Mit einer Einleitung zum Neudruck von Hans Wussing (Wissenschaftliche Buchgesellschaft) Darmstadt. – 1974.

5. Рыхлик К. Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано / К. Рыхлик // Историко-математические исследования. Москва: Наука. – 1958 г. – XI. – С. 515–532.

6. Grassmann H. G. Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten / H.G. Grassman. Teil 1: Arithmetik. Berlin. – 1861. – 232 S.

7. Hankel H. Untersuchungen über die unendlich oft oscillierenden und unstetigen Functionen / H. Hankel. Tübingen 1870. – 51 S.

8. Hankel H. Die Zylinderfunktionen erster und zweiter Art, Mathematische Annalen. – 1869. – S.467 – 501.

9. Hankel H. Die Elemente der Projectivische Geometrie in synthetische Behandlung / H. Hankel // Axel Harnack (Hrsg): Vorlesungen. Leipzig: B. G. Teubner. – 1875. – 256 S.

10. Клейн, Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии / Ф. Клейн. – М.-Л. – 1937. – С. 172.

11. H. Hankel. Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderte / H. Hankel // Ein vortrag beim eintritt in den akademischen senat der universität Tübingen ein 29 April 1869. – 36 S.

12. Cantor M. Hermann Hankel / M. Cantor // Allgemeinen deutsche Biographie X. – Leipzig. – 1879. – S. 516–519.

13. Hankel H. Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter / H. Hankel. Leipzig. – 1874. – 410 s.

14. Васильев В.А. Целое число / А.В. Васильев. Петроград. – 1922 г. – 268 с. – с. 65.

15. Hankel H. Grenze / H. Hankel //Allgemeine Enzyklopädie der Wissenschaften und Künste. – Leipzig. – 1870/71 . – Vol. 90. – p. 185–211.

16. Синкевич Г.И. Формирование топологических понятий в лекциях Вейерштрасса 1886 года / Г.И. Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск 19. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера / СПбГАСУ. – СПб. – 2013. – С. 4 – 23.