Ежи Медушевский (Польша)

Внутренние истоки математики

Опубликовано: Ежи Медушевский. Внутренние истоки математики. Перевод с польского Галины Синкевич / Альманах "Русский міръ. Пространство и время русской культуры". Выпуск 10. СПб.: "Русская культура", 2016. С. 262-280.

В юности меня ослепил, но не увлёк блеск логицизма. Хотя старые философы писали туманно, но логически безупречно и более содержательно.

Томаш Грабиньский – alter ego автора

Ритм чисел

Locum математики – это «*мир S наших мыслей*». Это выражение из известной, хоть и небольшой и не в полной мере оцененной математиками работы Рихарда Дедекинда «Was sind und was sollen die Zahlen?» («Что такое числа и для чего они служат?») (1888).

Мысль – это определённый элемент мира *S*. Ум не в состоянии отрешиться от «мысли об этой мысли», а значит, и от «потока мышления», который подобен *потоку чисел*. Дедекинд не сразу пришёл к этому выводу. Он написал десятки страниц, чтобы из потока мышления вычленить ту минимальную струю, которую образуют натуральные числа. Он не называл никаких конкретных чисел, но только *ритм* индукции, пронизывавший его мир *S*, который *бесконечен*: переместив одну мысль, мы вновь получим тот же мир *S*. У Дедекинда числа не являются ни плодом времени, ни пространства в их физической интерпретации, как у Канта.

Это небольшое произведение Дедекинда явилось потребностью того времени. Складывается впечатление, что оно было продумано задолго до публикации. Дедекинд, студент Гаусса, был свидетелем зарождения и сам выступил творцом понятий абстрактной алгебры, которая вышла из известной системы натуральных чисел. Предметом алгебры стало множество, элементы которого можно складывать и умножать по определённым правилам. Примером были комплексные числа Гаусса, показавшего, как ранее известное для них исчисление можно превратить в формальную систему. Но вскоре сам Гаусс, а потом П. Лежён Дирихле нашли новые алгебраические системы. В этих системах не всегда два плюс два равно четырем. Понятие множества смягчило чёткие алгебраические понятия, подобно тому, как когда-то греческая геометрия, подчинив себе числа, и обосновывая действия над ними, расширила сферу математического влияния на новые области. От античной математики понятие числа развивалось к непрерывной величине, которая вошла в повседневный обиход в математическом анализе, созданном Ньютоном. В наше время числа составляют непрерывное множество – континуум, – первоначально существовавший в математике интуитивно, и окончательно описанный строго арифметически языком множеств. Леопольд Кронекер полагал, что основой всех числовых систем являются натуральные числа, по его словам, они необъяснимы, так как их создал Господь Бог. Не исключено, что размышления Дедекинда были вызваны этим провокационным заявлением. Дедекинд как математик и серьёзный философ понимал, что в таких вопросах не нужно затруднять Господа Бога. Вот и теперь в поисках решения он будет обеспокоен загадочным ритмом индукции, играющим главную роль в его понимании числа. Было опасение попасть в ловушку мыслительных автоматизмов. Джузеппе Пеано почти сразу заменил концепцию Дедекинда аксиоматической, что затмило философский аспект достижения Дедекинда.

Понятия, о которых размышлял Дедекинд, находятся вне времени. Они были бы бесследно потеряны, если бы не произрастали на почве развитой немецкой философии. Выражение «мир наших мыслей» не сочинено Дедекиндом. Оно встречается у Бернарда Больцано. Однако Дедекинд не ввёл бы этого „*S*”, если бы оно было *чем-то* неопределённым. Мы не используем символ для чего-то неопределенного. По Дедекинду получается, что мир *S*, который, несмотря на то, что мы о нём ничего не знаем, просто *существует*. В отличие от мысленных конструкций, наполняющих его, сам он не является мысленной конструкцией. Здесь есть нечто общее с Евклидом. Нам легко мысленно освоить фигуры, но не само пространство, которое Евклид не вводил в свои рассуждения.

Размышления Дедекинда привели его к выводу, что в нашем мышлении могут возникать определённые структуры, не зависящие от внешних раздражителей. Наш ум небеззащитен в мире. Мы задаём миру ритм последствий и видим его как бесконечность, не спрашивая мира, желает ли он такого понимания. Макс Шелер где-то написал, что мы живём наперекор миру.

Является ли ритм, проявленный в мире *S*, фрагментом чего-то большего, можно только догадываться. Подчинит ли его себе целостность? Это ритм последствий. Но нам также знакомы *созерцания*, когда мысль течёт *непрерывно*. Однако мы выделяем некоторые состояния и формулируем суждения, которым придаём форму мнений. В некоторых ситуациях нам нужны только их формы, подчиненные требованиям *логики*. Но хотя наше мышление представляется непрерывным, оно *выражается* в форме мнений, которые образуют как бы его *атомы*. Атомизм мышления – великая загадка нашего мира *S*. Именно он даёт нам контакт с миром и не допускает замыкания в себе.

Выразительность заключена в отдельных сигналах, но при этом что-то теряется и не отражается полностью. Наверное, с этим согласится оракул современных философов математики Людвиг Витгенштейн, по словам которого язык имеет некоторые естественные ограничения. Чтобы их преодолеть, прибегают к внетекстовым формам выражения эмоций и обращаются к символизму поэзии, воспроизводящей целые комплексы ощущений.

Поток мышления, данный нам в виде индуктивной последовательности, не сопровождается непосредственным отражением. Этот поток словно рядом с нами. Мы не властны над ритмом нашего мышления. Как пишет Андрей Белый, вдохновлённый математической философией своего отца Николая Бугаева, «мысль сама себя мыслит». Поток сознания это не только последовательность чисел, но и иные известные последовательности. Вспомним поток мыслей в «Герцоге» Сола Беллоу, или в «Корректуре» Томаса Бернхарда. Мы не можем исключить себя из этого потока и должны научиться им управлять. Алексис Каррель пишет: «Человек должен создать покой в себе самом[1]». Великий учёный не писал, чем могла бы стать такая направляющая сила ума, но она находится в нас самих.

Наперекор миру

В XX веке шум по поводу оснований математики как фундамента *здания* надолго заглушил идею Дедекинда. Прошло немало времени, пока в своих размышлениях автор нашёл современную поддержку этой мысли. Если отвлечься от архитектурной аналогии, более удачным кажется иной взгляд на природу познания: математика живёт по своим законам, подчинена некоторому смыслу, к которому мы должны присмотреться. Многое даёт повседневная математическая практика. Этот снисходительный взгляд позволяет развить некую приемлемую мифологию, допускающую доступные умозрительные построения.

Мир *S* щедрее, чем дары ритма индукции. Мы дети *Дня Шестого*. Тогда мы получили в дар новый способ контакта с миром и *сознание*, чтобы почувствовать своё бытие, почувствовать наше отличие от того, что вокруг нас, и в то же время чувство общности с окружающим. Тогда нам были даны *чувства*, которые позволяют размещать в мире *S* образы, полученные из внешнего мира. Мир *S* не ограничивается их созерцанием, но заменяет эти образы свойственными конструкциями. Наблюдая за образованием понятий, может показаться, что мы не доверяем чувствам. Прежде, чем создавать собственную конструкцию, мир *S* проверяет одно чувство другим, не довольствуясь одной стороной явления.

[1] Alexis Carrel, Człowiek istota nieznana, Warszawa 1935.

Вот он создаёт понятие круга, форма которого навеяна другим «кругом» из внешнего мира. Созерцая эти «круги», мы уже подготовлены к ожиданию. Долгое время мир S довольствовался одним кругом, прежде чем открылись иные его аспекты. Оказалось, что он не просто круглый, а ещё и определяет дугу, по которой движется точка. И круг может катиться. Понятие обогащается и становится всё более востребованным.

Построение, с помощью которого мир S осваивает отобранные образы, не является вещью в себе в смысле Канта. Проникая в него, наша мысль может что-то нарушить. Поэтому наш контакт с этим нашим собственным построением по природе *антиномичен*. Это, однако, не относится к встроенному в мир S числовому ритму, который не постигается мыслью. Мы не нарушаем числа, когда их используем.

При контакте с внешним миром обычно делают упор на его познание. Это точка зрения *науки*, которая будет здесь в дальнейшем преобладать, но не потому, что мы к ней привержены, а потому, что фактически цивилизация так устроена. В то же время мы этот мир *переживаем*. Это уже не просто точка зрения, а сама суть нашего пребывания в мире. В математике трудно найти в этом золотую середину. Её когнитивная роль проблематична, но математика имеет большую потребность познания, достигая в некоторых своих разделах статуса *науки*. В то же время в ней заметна склонность к *искусству*. Модели окружающего мира служат для лучшего его познания, и в то же время защищают от нежелательных воздействий. Мы бы хотели, как *монада Лейбница*, быть свободными от воздействий, нарушающих наш внутренний мир, отсеивая образы по своему желанию. Друг от друга мы воспринимаем только такие сигналы, которые указывают на определённый тип содержания. Этот способ коммуникации обеспечивает взаимное обучение. Таких сигналов, тем не менее, достаточно, чтобы полностью уберечь нас от солипсизма. Мы, однако, стараемся, чтобы наш внутренний мир был ограждён от внешней пошлости. Оболочка монады защищает себя от превращения в китч хотя бы единой деталью, пусть даже изъяном, ради отличия от окружающей среды. Но всё же мы подпитываемся от внешнего мира. По Аристотелю, в нашем сознании нет ничего, что прежде не прошло бы через чувства.

Уже упомянутый Андрей Белый в романе «Петербург» передал поток сознания, который сам себя мыслит, а в романе «Москва» – идеи своего отца Николая Бугаева, называвшего себя неолейбницеанцем. Мудрость монадологии – во внешней недоступности внутренности монады. Нам недоступны чужие мысли, но мы можем передаваемыми сигналами пробудить внутренний мир другого человека. Тогда понятно, как образуется связное общественное сознание.

Чувства, наполняющие мир S, борются за своё место в нём. Среди них мы видим также самое сокровенное чувство, направленное на *формирование* конструкции. Назовём его *математическим чувством*. Математическое чувство досадует, если не найдёт наблюдаемому явлению надлежащего места в построенной структуре. Оно полностью удовлетворено, если размещение завершается удачно. Но оно испытывает, как и любое чувство, потребность впечатлений. Оно – не только свидетель создания понятий. Оно – как дирижёр, погружённый в эмоции, опутавшие весь концерт чувств, каждое из которых сопровождается своей мелодией или окраской. Мы не называли бы его *чувством*, если бы оно ограничивалось ролью курьера, доставляющего сообщения. Не будем вслед за Аристотелем отказывать математикам, а тем самым и математическому чувству, в интересе к содержанию сообщения. Встроенные в мир S модели – не совсем те, что предоставляют нам чувства. Математическое чувство разглаживает их, придаёт им форму, может объединить два чувственных ощущения в одно. Так объединяются понятия прямой, луча света и натянутой нити. Но понятен скептицизм Философа при виде того, как часто само выполнение таких задач приносит удовлетворение. Как и всякому чувству, ему свойственны автоматизмы.

Математические факты простираются в далёкое прошлое, но та математика, в которой факты связаны между собой мыслью, создана греками… Пифагорейцы и после них Платон высказывались за целостный подход к математике. Скептик Аристотель, однако, полагал, что в построении понятий нужно продвигаться постепенно. Разве не скептицизм Аристотеля породил критический дискурс понятий и их развитие? Первым известным примером этого дискурса был вопрос, состоит ли прямая из точек? Принять ли нам точечный континуум, либо согласиться с Демокритом, что структура прямой – разрозненная в виде лежащих рядом друг с другом атомов. На этом примере мы видим, как вокруг некоего феномена возникают те или иные мифы, называемые также полезными фикциями, которые обогащают данный нам образ. Отвергнем ли мы их за излишнюю фабульность? Где-то в основе такого рассказа лежит истина, а мы пользуемся ею на практике.

Математика перестаёт быть наукой о предметах, которые можно рассматривать только одним способом. Это уже было в достижениях древних философов, но эти взгляды как зрелые мы приписываем философам XIX века. Мы видим мир по-разному, – каждый раз с новым чувством или с иной стороны. Но, по Канту, в основе этих различных взглядов заключена вещь в себе. Говоря языком философов, все мы раньше были номиналистами.

Имея дело с фигурами геометрии Евклида и натуральными числами, мы, несомненно, номиналисты… Мы не дробим их сущность на аспекты и различия их понимания. Фигуры, высеченные в подлинном пространстве, даже такие своеобразные, как сфера Александера, замыкания плоских областей Брауэра, или наследственные неприводимые континуумы Кнастера, – это однозначно мыслимые и видимые нами объекты. В этом смысле классическая теория чисел тоже номиналистична. Это просто математическая реальность, где мы лишь отмечаем свои наблюдения.

Но если мы многое можем сказать на какую-то тему, то зададимся наконец вопросом о множестве миров. Вопросы такого рода привели математиков к тому, чтобы взглянуть на природу математики также и с этой стороны. Математика создаёт систему понятий, посредством которой мы понимаем и познаём мир. Мы не знаем, однако, не заслоняют ли они нас от мира. Мы отмечаем с тревогой, что мир S наших мыслей может замкнуться в перечитывании и переживании взращенных в себе мифов, дающих математическому чувству пресыщенное удовлетворение. Образы, которые он создаёт, дают временное понимание вещей. Далёкую цель познания мы оставили Философу – если воспользоваться словами Аристотеля, скептически относящегося к математике. Заметим, что эгоизм – свойство не только этого чувства. Можно представить себе такую эгоистическую математику, хотя, наверное, мы используем слишком сильное выражение…

Метафизика

Нашему познанию мира предшествует *уверенность*, которая вместе с выросшими на ней убеждениями или даже, как пишет Алан Блюм, предубеждениями против того, что может прийти извне, составляет нашу *метафизику*. Математическое познание вместе с так называемым метафизическим сопровождением составляет то, что можно назвать *математичностью*.

Большую загадку представляет первичное запечатление, которое проявляется спонтанно; прежде всего, это первичный ритм, давший нам число. Это не поддаётся нашей чувственности, над ним не властно наше сознание. В нашей метафизике и в нашей математичности оно имеет *специальный* статус. Мы не разрушаем число, когда его мыслим.

Число вне времени. Для числа не нужно пространство, где бы проявлялось его присутствие. Можно представить мир, не имеющий ничего, кроме индуктивного ритма числа, не расположенного нигде. Мнение о независимости понятия числа от понятий пространства и времени приписывают Дедекинду. Но до него были пифагорейцы, примат числа провозгласил также Готлоб Фреге, современник Дедекинда. Но он видел сущность числа в количественном, но не в динамическом аспекте, установленном посредством индуктивного ритма.

Хотя числу не требуется пространство, чтобы где-то находиться, но, желая освоить числа, мы пытаемся расположить их в удобных нам пространствах, поддающихся нашей чувственности. Это делал Евклид в VII книге «Начал» для обоснования действий над числами, и Гаусс, который для построения пространств, в которых могли бы находиться его числа, обратился к множеству. Хотя понятие о числе могло бы заключаться в себе, однако для числа характерно проявление во всей математике. Число *служит* математике, но, честно говоря, число *навязывается*. Впитывая в себя всё, что созвучно первичному ритму. Наш язык тоже имеет свой ритм, хотя неизвестно, как он согласуется с числовым ритмом. Есть и иные встроенные в нас ритмы. Задумайтесь над связью математики и музыки.

По Фреге число – это количественный аспект множества. Согласно Фреге множество – это первооснова наших мыслей, о чём будут спорить философы. Ни Гаусс, ни его преемник Дедекинд не ставили множество так высоко. Два множества соответствуют одному и тому же числу, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие. Здесь не различаются конечные и бесконечные множества. Эта же мысль выражена в ранней переписке Кантора с Дедекиндом. Кантор обогатил формирующуюся теорию указанием на две степени количественной бесконечности – счётную и несчётную. Если бы он дал этому только одно доказательство – геометрическое, – получилась бы уравновешенная теория множеств. Его второе доказательство, называемое диагональным, арифметическим, задало теории скорость, за которой мысль не могла угнаться. Оказалось, что нет барьера количественного аспекта множества. Это связано с некоторой *лёгкостью* мысленного построения множеств, если нам не нужно воспринимать их чувственно. Количественный аспект множества встречает свой барьер только в виде знаменитой антиномии Рассела. Трудно примирить количественный аспект множества с числовым первичным ритмом, который простирается дальше потока натуральных чисел, со своей собственной иерархией величины в смысле формирующегося там порядка.

Мир S организуется в *контексты*, состоящие из суждений, соединённых между собой так, чтобы они оставались *согласованными* между собой. Согласованность суждений является выражением их взаимного приспособления. Мир S признаёт их за свои *внутренние когерентные истины*. Мы употребили множественное число, потому что эти контексты независимы, не претендуют на всеобщность. Поэтому в математике есть геометрия и арифметика, и ещё более узкие контексты, например, логарифмы.

Истины соединяются когерентными связями только в определённых контекстах. Они автономны, и свободная структура их связей имеет некоторое подобие с миром монад Лейбница. Истины передаются из одного информационного контекста в другой только в форме *метафор*, наиболее известны среди них те, которые переносят арифметику в геометрию, например, трактуя последовательно откладываемые отрезки как числа. Истины, перенесённые метафорой в иной контекст, начинают жить там своей особой жизнью. Они превращаются во что-то новое, но мы отождествляем метафоры с их прототипами. Истины, перенесённые в другой контекст, обогащаются своим новым носителем. Если вернуться обратно в свою исходную область, это тоже будет обогащение новым опытом. Наибольшими метафорами являются те, которые несут математические истины в действительность.

Истины мира S относятся к его внутренней гармонии, т. е. упомянутой когеренции, и не претендуют на статус высшей истины. Перенесённые в реальность через метафоры, они могут столкнуться с фактами. Если мы не получаем соответствие, то изменяем построение мира S. Таким образом, мы можем назвать математику экспериментальной наукой. Опыту тоже придают метафоры, переносящие истины от одних контекстов в другие, что позволяет взаимно корректировать истины. Математика развивается благодаря постоянному обмену опытом между контекстами. Но сутью истины остаются отдельные её монады, созданные в отдельных контекстах.

Математические истины более других оторваны от внешних ощущений, они посещают сознание буквально на мгновение. Известно, что доказательства, не записанные сразу в Шотландском кафе, были безвозвратно утрачены[2]. Математические истины, даже

---

[2] Kawiarnia Szkocka во Львове – кафе, где в первой половине XX века собирались математики. В их числе были Банах, Улам, Серпинский, Штейнхаус, Мазур и многие другие. Обсуждая математические вопросы, они записывали свои рассуждения карандашами на мраморных столах.

зафиксированные, было бы невозможно возродить, если бы они не были включены в наш чувственный опыт и не использовались бы многократно. Они живут, передаваясь от монады к монаде, скорее, как отблески, а не как пламя. Но, по словам Соломона Голомба, пожалуйте к нам ещё, и будет то же, что и раньше[3]. Мы платим за эту эфемерную *стабильность* истин высокую цену, отстраняясь при их поиске как можно дальше от своего чувственного восприятия. Истины, воспринятые чувствами, замещаются наперекор своей внутренней природе истинами в значении логической взаимосвязи. Отсюда слова Аристотеля, что математик, равнодушный к содержанию математической теоремы, согласится и с её отрицанием, если оно окажется истинным.

Мы чувствуем присутствие математической истины в нашем сознании только в состоянии её становления. Если мы хотим сохранить её, то только если она принята в сознании как собственная. Мы не сохраняли бы множество истин, если бы математика – как хотели бы некоторые – была книгой или постройкой. Находясь в постоянном взаимодействии с внешними и внутренними истинами, математика сохраняет живыми только свои активные истины. Есть среди них и такие, которые, достигнув совершенства, становятся общим достоянием, музейными экспонатами – как озёра Вады, либо украшениями галерей – как теорема Морли. Это ценность сама по себе, не предназначенная для каких-то целей. Вряд ли посторонняя цивилизация, унаследовав наши книги, здания и упомянутую галерею, была бы способна их освоить. Математические истины бесследно исчезнут вместе со своим миром *S*.

Пока предметом математики были простые фигуры геометрии и числа в своих исключительно индивидуальных формах, платоновский взгляд на незыблемость математики казался несомненным. Но XIX век показал, насколько математика зависит от нас самих. Брауэр в начале XX века обратил внимание на влияние нашей логики на математические истины. Вмешательство логики полно безапелляционных установлений, заполняющих мыслительные пробелы. Эти пробелы могли бы оставаться открытыми, но логика – чувствительная к *horror vacui* – закрывает их непосредственное участие в мнениях, которые застывают. Логика не создаёт форму мира *S*, ей нужно только упорядочивать и поддерживать уже построенные структуры… Во многих случаях мы чувствуем её сдерживающее влияние. Закрывая мысленные каналы, она освобождает нас от борьбы с проблемами, решая их за нас. Случается, мы поддаёмся и пользуемся этим выгодным даром. Мы бы передумали, если бы сумели найти какое-то внутреннее чувство, управляющее нашей логикой.

Именно наши чувства построили богатство и жизнеспособность конструкции, установленной миром *S* наперекор внешнему миру. Однако в самом характере чувства есть эфемерность и игра. Чувства вводят нас в заблуждение, вовлекая в игру, преследуя свои цели. Не обманывает ли нас и математичность?

В нашем понимании природы должно помочь изучение живых организмов. Однако мы с опасением обращаемся к этому знанию, не будучи готовыми к использованию открываемых здесь истин. Райское древо добра и зла и скала Прометея служат предупреждением. Такой страх перед знаниями сопровождает человечество с момента его создания. Это не касается самой математики, но её метафоры чреваты далеко идущими последствиями.

От математики проистекает опасность другого рода. Представьте, что естественные науки объяснили бы нам, как понятия возникают в нашем сознании. Вся поэтичность математики исчезнет. Захотели бы мы продолжать заниматься такой математикой? Мы предоставили бы это другим. Но это может повлиять не только на математику. Мы развиваемся благодаря мифологии, где таится неизведанное.

О математике

Математика сама создаёт свой мир. Одна из составляющих этого мира – стихия

[3] Solomon Golomb, Mathematics after Forty years of the Space Age, Mathematical Intelligencer, 1999, vol. 21, no 4, 38-44.

(первоэлемент), являющаяся числом с его ритмом, независимым от наших мыслей. Но есть ещё основа, которую составляют множества, вокруг которой мы создаём мифы, позволяющие нам освоить и упорядочить полученные образы. Наконец, есть формирующаяся интуиция, которая не ожидает образа пассивно. Мы персонифицируем все эти вещи, потому что только так их можно понять. Нашей позицией в этом мире всегда будет какой-то фиксированный контекст. Мы не охватываем целое, хотя где-то вдали оно обрисовывается.

Арифметика – это *искусство* обслуживать числа. Мы не знаем, *какие* они, может, даже не знаем, *для чего* они *предназначены*, мы только знаем, *как*. Однако вряд ли это искусство происходит из самого ритма индукции. У нас нет уверенности, что ритм индукции был бы заинтересован в сложении и умножении чисел. Мы видим это в рассуждении Евклида, который в VII книге «Начал» для введения этих действий переносил с помощью метафоры числа в геометрию, интерпретируя их как многократно взятые отрезки. Понятие поля мы обосновываем через умножение. Евклид не делал того, что сейчас делаем мы в курсах арифметики, определяя эти действия индуктивно. Но и в наше время мы тоже стараемся иметь числа в *воплощениях*. Это выражение заимствовано от Моисея Мендельсона[4], философа конца XVIII века. Число развивается через воплощение. Из геометрии оно приобретает количественные признаки. Приходит обоснование для дробей. Наконец, при столкновении с физическим *континуумом* появляется идея числовой непрерывности. Так называемая «реальность» стремится к численности, особенно геометрия, *величины* которой постепенно входят в статус чисел. Было бы упрощением связать этот процесс с каким-либо историческим периодом. Евклид является символическим примером. Наше числовое чувство формировалось в течение всего периода эволюции, причём не обязательно в контакте с чистыми числами, а с их воплощениями. Это мог быть упоминавшийся *День Шестой*, в котором произошло формирование нашего сознания.

Отдельные *числа* встречаются независимо от первичного ритма. Они воспринимаются чувственно в воплощениях, в виде геометрических орнаментов, либо как чувственно воспринимаемое количество. Поэтому в понятии числа есть некоторая трудность. Мы не нуждаемся в ритме индукции, чтобы увидеть число 3. Числа 13 и 7, как наиболее выразительные, познаются нами раньше, чем число 6, которое появляется даже позже, чем библейские десять тысяч. Ян Потоцкий словами Веласкеса убеждает нас, что числа фигурной природы не чужды братьям нашим меньшим[5]. Кажется, мы познаём их с чувством, близким тому, которым даны нам геометрические фигуры. Об этом пишет биолог Грегори Бейтсон в известной книге «Разум и природа»[6], придавая фигурным числам исключительную роль в живом мире. Они неизвестны, как он пишет, в неживой природе.

Можно заинтересоваться, почему исторически так медленно развивалось наше освоение чувственно воспринимаемых чисел? Откуда берутся трудности с малыми числами? Откуда – трудности в применении нескольких шагов чистой логики? Математикам, и не только им, известны выглядящие парадоксальными некие диспропорции в эффективности нашего мышления. Даже хорошие математики ощущают беспокойство, когда им нужно сосчитать дроби или провести строгое доказательство на языке эпсилон-дельта, хотя им легко выполнить рассуждение на высоком уровне; вспомните гениев теории чисел.

Желая избежать биологической аргументации, прибегнем к умеренной мифологии. На развитых стадиях обращения с числами мы попадаем в области, в которых осознаётся влияние первичного ритма, который придаёт деятельности неожиданное ускорение. Сознание освобождается от оков метафизического наблюдения. Оно нарушило бы свободную мелодию, которая прихотливо льётся, находя себе окончательное место.

---

[4] Moses Mendelssohn. O oczywistości w naukach metafizycznych. Uniwersytet Wrocławski. 1999. (Moses Mendelssohn. (1764). Abhandlung Uber Die Evidenz in Metaphysischen Wissenschaften. Nabu Press. 2011)

[5] Jan Potocki, Rękopis znaleziony w Saragossie, Warszawa 1964. Потоцкий, Я. (1797). Рукопись, найденная в Сарагосе. Москва: Наука, 1968. — 624 с.

[6] Bateson G. Mind and Nature: A Necessary Unity (Advances in Systems Theory, Complexity, and the Human Sciences). — Hampton Press, 1979.

В поддержку этого аргумента пусть послужит наблюдение некоторой асимметрии, присущей арифметике. Первичный ритм способствует умножению. Определение умножения не нуждается в обосновании через сложение. Ритм индукции перемножает простые числа через повторение. Индукция подготовила базу для расширения этого приёма на произвольные числа, в виде разложения числа на простые множители. Сознание в значительной степени освобождено от обязанности следить за значением результата действия. Сложение не обладает таким даром. Действие сложения контролируется постоянно бодрствующим сознанием. Эта асимметрия касается не только арифметики.

Геометрия – это математика *зрительного чувства*. Некоторые простые истины, продиктованные чувством – дополненные чувством осязания, – стали базой, на которой Евклид основал свои «Начала». В ней числа живут в симбиозе с фигурами на равных правах. Многие научные наблюдения можно сделать с первого взгляда. Геометрические истины наглядны и принимаются как *аксиомы*. Зрительное чувство *быстро* и внушает большое разнообразие навязчивых ощущений. Поэтому наша математичность осторожна. Геометрия не полностью доверяет зрительному чувству, даже вместе с достоверным чувством осязания. Наконец, она применяет логику для одобрения своих истин. Геометрическое доказательство опирается на выполнение логически непротиворечивых мысленных действий и на одобрение опытом столяра и чертёжника, где преобладает осязание. Не обязательно видеть аксиомы геометрии как её фундамент, но скорее, как источник, которым прирастают знания. Мы иногда удивлялись, что в школьные времена доказательства встречались прежде всего в геометрии, тогда как в арифметике истины удивительно надёжны и суждения здесь не имеют значения, только иногда нужно кое-что проверить.

Многие истины «Начал» заключаются в так называемых «определениях», которые по существу являются объяснениями понятий, часто попытками их понимания, а иногда предостережениями от их неосторожного восприятия. Ибо как иначе относиться к таким объяснениям, и одновременно предостережениям, как определение «линии», которая есть «длина без ширины». Эти два последних понятия не объясняются, лишь указано, что то, в чём мы наблюдаем ширину, не является линией, а если мы не видим никакой длины, то не относим это к линии… «Начала» не являются замкнутым трудом. Считается, что это сумма знаний, ранее известных Фалесу, пифагорейцам, а позже Евдоксу.

Понятие *пространства* появляется у Евклида как бы на периферии его размышлений, посвящённых геометрическим предметам, которыми являются фигуры. Но философам всегда не хватало этого вместилища, в которое погружён некий объект размышлений. Мир наших мыслей требует заключать в чём-то всякий набор вещей. Пространство необходимо нашему уму, и можно только удивляться, почему это понятие не дано нам априорно? Априорные понятия обладают собственной градацией. Понятие пространства в математике формировалось медленно, и можно проследить это исторически. Оно вошло в математику для потребностей астрономии и физики, но как философское и математическое понятие оно не зависит от физического мира. Оно нужно нашей мысли для завершения своих построений.

Античная математика в соответствии с Аристотелем – наука о *неподвижном*. Это было самоограничение, вызванное парализующей разум апорией Зенона о стреле, блокирующей понимание движения. Между тем, движение и изменчивость – суть физических явлений. Аристотель посвятил целую главу в «Физике» *возрастанию* и *убыванию*. Ситуации, в которых мы видим изменения, далеки друг от друга. Это может быть путь, удлиняющийся со временем, интенсивность цвета или темп прибывания воды в потоке. Ощущение этих явлений не так очевидно, как визуальное восприятие. Интенсивность силы, ощущение интенсивности цвета, чувство нарастания скорости постигаются нами целым комплексом чувств, опосредованно, но в какой-то умеренной (темперированной) целостности. Возможно, поэтому законы, регулирующие изменения, интенсивность и скорость, так долго не имели определённых формулировок.

Идею общего математического понятия изменения восприняли схоластические философы XIV века. Вычислители[7] из Мертон Колледжа в Оксфорде и философы Парижа исходили из того, что непосредственно наблюдению подлежит не величина (количество) изменения, а её *интенсивность*. Мы наблюдаем не количество воды в потоке, а интенсивность течения… Интенсивность изменений, наблюдаемых в указанном диапазоне, определяет количественное изменение. Одним из замечательных примеров выступила интенсивность Божьей благодати, нисходящей на человека, которая в нём количественно накапливается, суммируется тем способом, который позже Ньютон и Лейбниц назвали *интегралом*. Есть также интенсивность силы, которой обладает движущееся тело, определяющей его *динамику* – а, следовательно, и скорость. Таким образом, если на тело воздействует сила, – так, как при свободном падении, – неизменная во времени, то скорость возрастает во времени равномерно. Схоласты доверяли запечатлённым в нас чувствам, позволяющим ощущать степень напряжения взаимодействий. Эти чувства действительно неясны, но не обманывают нас. Они позволили схоластам сформулировать закон свободного падения, который позже Галилей проверил экспериментально.

Идеи XIV века полностью вошли в математический анализ Ньютона, в котором, по его словам, геометрия Евклида обогатилась наукой о движении. Математика схоластов и Ньютона вновь почерпнула полную горсть из чувственно доступного нам мира. В своих истоках она была свободна от арифметического влияния. Это было ещё тогда, когда Ньютон формулировал законы динамики и включил в них законы Кеплера о движении планет, и даже тогда, когда Бернулли занимался проблемой брахистохроны, а Эйлер – проблемой струны.

Но вернёмся к нашей мифологии, – к понятию *Дня Шестого*. Интенсивность изменений имеет некоторое подобие с числовым ритмом *Дня Первого*. Это как бы ритм *непрерывного наполнения*. Подобно арифметическому ритму, он заставляет задуматься над разнообразием воплощений, придавая математическим понятиям новый, ускоренный темп развития. Уже не требуется сотни лет, чтобы исчисление превратилось в уравнение струны у Эйлера. Вспомним, что именно интенсивность – величина, которая так трудно определялась, – непосредственно наблюдаема и измерима. Эту истину выражает нам *дифференциальное уравнение,* которое по отношениям между интенсивностями обещает восстановить отношения между самими величинами, недоступными непосредственному наблюдению.

Исчисление указывает, что наши мысли обладают скрытым от нас непрерывным ходом. Мы навязываем миру, кроме ритма последствий, ещё и непрерывный ход событий. Итак, у нас два способа видеть явления. Наша межличностная экспрессия требует атомизации мысли в предложениях. Но в невербальных ситуациях – а таковыми являются доматематические ситуации – она выражается в непрерывном потоке мысли.

Мотивация анализа строится на более широком круге ощущений, чем те, которые доставляет геометрия. Оказывается, чувство ощущения времени, интенсивности силы и ощущение нарастания величины имеют много способов воплотиться в математические ситуации. Метафизичность этих мотиваций ощущается ненавязчиво, но в целом намного сильнее и увереннее, чем в области классической геометрии. Обоснования анализа, как правило, не являются нашими прямыми убеждениями, связанными с личным опытом, но похоже, что результатом *запечатления* их в нас – пользуясь словами Конрада Лоренца – на ранних стадиях нашей эволюции, хотя, возможно, не в *День Первый*. Ю. Словацкий в книге «Генезис Духа» благодарит муравья, опытом которого руководствуется.

Исчисление – более, нежели любая другая дисциплина – раскрывает сущность интуиции. В самом деле, если математик говорит об интуиции, то имеет в виду исчисление и всё то, что с ним связано. Интуиции, которые лежат в основах геометрии Евклида, слишком просты, чтобы их роль была обнаружена. Чувство, контролирующее исчисление, скрыто в нас глубже. Хотя интенсивность силы, бег времени и мгновенная скорость нам неочевидны, но мы доверяем идущим от них сигналам. Интуиции, лежащие в основе исчисления, выдержали нападение многих методов, превратив следы мнимых поражений в произведения

---

[7] В историко-математической литературе их называют также Калькуляторы.

искусства, навсегда украсившие математику.

Интуиции, которые привели к открытию исчисления, выглядят как суммарный доматематический опыт, как *интегральный* опыт предсознания, не только нашего, но и всего хода эволюции. Бывает, что мы не доверяем интуиции, а Паскаль добавлял, что это оттого, что она слишком часто бывает безошибочна. Галилей не доверял интуиции и проверял. Точно так же не доверял интуитивному пониманию аксиом геометрии Декарт, заменивший метод Евклида своим арифметическим методом координат. Подобно им и Лейбниц, развивая свою область анализа, избегал пути ньютоновской интуиции. Ценность интуиции не в лёгкости, а в уверенности, которую она доставляет.

Точно так же, как с числами, мы не знаем, *чем* являются время и пространство, если отвлечься от их конструкций, которые предоставляет нам математика, и которые *служат* нам при устройстве в мире наших мыслей явлений, их порядка и развития. Математически мы можем только измерять время. Но нет универсальной меры – в виде универсального потока, – подобной числовому ритму. В каждой из отдельных задач мы полагаемся на убеждение, что данный тип временного потока существует, и пользуемся им как параметром. Интуиции мы черпаем из нашего чувства времени как континуального потока.

Мы видим природу математически. Мы не можем иначе. Но, когда мы говорили о мире S и встроенной в него структуре понятий, мы не разделяли математические и нематематические. Математика появляется лишь в тот момент, когда в общем исследовании преобладает выделение *точности (строгости)*. Но неригористические (нестрогие) фазы рассуждений – это *тоже* математика, хотя мы бы предпочли назвать её *математичностью*. Мы не исключаем, что всё, что воспринимаем в мире, *математично* хотя бы потенциально. То, что в доступном нам диапазоне явлений природа математична, представляется *тавтологией*. Но то, что явление остаётся *за пределами* математики, не значит, что оно нематематично. Если вслед за Шопенгауэром принять, что внешний мир – это воля и представление, то придётся предположить, что природа обязана *нам* своей математичностью. Но нам принадлежат математические детали, такие, как квадрат в законе тяготения[8]. Закон дал Творец, который не должен заранее видеть квадрат, так как он появится, приспособляясь к нашему восприятию. Авторитет Творца не уменьшается, наоборот, он усиливается, если не требовать, чтобы Он одновременно с нами создавал математические формулы.

Математические истины являются истинами *нашего* мира S. Они исчезнут вместе с нами. Так называемые «математические объекты», в которых заинтересованы *математические реалисты*, существуют только в нас. Они физически недосягаемы. Достижения погибших цивилизаций хранятся в музеях, но там нет их метафизических и математических достижений. Они навсегда утрачены вместе с погибшей цивилизацией.

Крепко ли это держится?

Фраза «что такое математика?» банальна, хоть и нова, так как раньше математики знали, что ответить. Математика была для них «наукой о числах и фигурах», и этот вопрос не будил эмоций. Теперь такая постановка вопроса встречается в названиях книг.

Нет такого понятия, как *вся* математика. Есть *математические науки*, а о самой математике редко говорят как о науке. От науки требуется, чтобы был *предмет* исследования. Если что-то и может объединить математику в целое, это не может быть предметом. Это могла бы быть форма, если бы математика развивалась, как растёт дерево. Так и было до недавнего времени, до начала XIX века. В прошлом, в Античности, всё шло последовательно. Арифметичность воплощалась в геометрии, сама при этом обогащаясь новыми структурами. Она оставалась наукой о неподвижных сущностях. Европейские схоласты и, наконец, Ньютон нашли способ ввести в математику движение. В математику вошло пространство и время, и необходимые для них мыслительные конструкции. Нынешняя математика мчится

---

[8] $F = g \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

огромными скачками к проблемам, которые порождают множество несвязанных между собой анклавов. Она может расти из всякого места, и часто растёт – иным способом – в местах, уже ранее метаматематических. При этом вокруг этих областей исследования создаётся эманация общих понятий, и ещё неизвестно, математика ли это.

В этих высоких разделах появляется математическое *творчество*, крайне различно оцениваемое. Творчество Кантора не одобряли выдающиеся математики его эпохи: Кронекер, Пуанкаре, Вейерштрасс и даже Дедекинд. Кронекер вызывающе заявил, что математика не нуждается в расширении понятий. Он провоцировал, но при нынешнем состоянии математики это заявление уже не выглядит таким наивным. Подлинное творчество не знает сигнала «стоп». Это позволяет развиваться свободным искусствам даже в вакууме.

В математике мы ценим прежде всего *открытия*. В свое время Платон утверждал, что математические понятия имеют абсолютное бытие, не сразу известное нам, и их, подобно островам Тихого океана, нужно открывать. Для нас таким математическим анклавом осталась теория чисел, уводящая в неизведанный мир, а открытие теорем подобно открытию новых земель или новых звёзд. Нет необходимости связывать все эти выводы в одно целое. Мы не ищем связи гипотезы Гольдбаха с числами-близнецами.

Математический анализ сам по себе явился открытием. Но это было открытие нового мира, а не острова в Тихом океане. Дорога к открытию исчисления – это перебор пластов нашего мышления для поиска отправной точки развития правильной интуиции, а потом спрямление её ошибочных дорожек. Только после открытия схоластами Мертон Колледжа правильного направления и первой математизации в виде теории неделимых Ньютон увенчал поиски вспышкой творческой мысли. Мы не называем этот процесс мышления одним словом, потому что он в равной степени был и открытием, и творческим процессом. Мы старше Платона более чем на две тысячи лет, и мы не мыслим так просто. Потом у нас был Кант, который выяснил происхождение понятий, принимаемых нами как абсолютные. Математические открытия зарождаются в смутных ожиданиях, которые в потоке творческой деятельности становятся надёжными элементами математики. Таким образом, не стоит спрашивать, создаёт математика или открывает, хотя взгляд на открытие более симпатичен.

Но и энтузиазм по поводу открытий имеет свои границы. Математика – не монолит. В ней есть конкурирующие силы. Есть много взаимно деструктивных сил, занимающих чужое место. Далеко идущая арифметичность может разрушить даже число в его естественной форме. Существует необходимость в защите математики от проблем, которые имеют только вкус рекорда. Нас ставят перед вопросом, верно ли, что большим математическим открытиям способствуют великие, даже катастрофические события? Если так, то потому, что они раскрепощают мысли и воплощают многочисленные математические страхи. Обратное неверно. Ни словесные заклинания, ни усердные прогулки, ни вызванные войной потрясения сами по себе не вызывают вспышки понимания и не служат причиной математических открытий. Не следует мучительно доискиваться оправдания их происхождения.

Нелюбимой является *дедукция*. Теоремы возникают раньше доказательств. Теоремы античной геометрии были известны столетиями, прежде чем они появились в «Началах», где нашли поддержку в виде аксиом, т. е. более очевидных и простых утверждений, из которых удавалось вывести мысленное доказательство. Теоремы, приписываемые Фалесу, были известны до того, как на основе аксиом была разработана теория параллельных и теория подобия фигур. Теория площадей подобных фигур из X книги «Начал» послужила опорой ранее известных квадратур Гиппократовых луночек. Для математики опасны теоремы, вошедшие в неё только потому, что у них есть доказательства. Так случается в тех частях математики, где мысль не оказывает никакого сопротивления формализму.

Дедукция *соединяет* математику. Она не даёт математике направления. Дедукция не может выйти за пределы истины, если она уже в ней находится. Это большое преимущество. Дедуктивная математика не может лгать. Математики тоже. Но хотя быть правдивым требует определённых усилий, однако только формулировка не вполне уверенных мнений даёт надежду на развитие. Так называемые настоящие математики хотя не ценят дедукцию, но ещё более не ценят творчество. И все же они продвигают математику вперед.

Складывается впечатление, что математика слишком много на себя взяла. Она хотела ответить на все вопросы, быть слугой всех наук, распыляя свои силы во всех направлениях. На наших глазах пали её величайшие столетние проблемы, а насыщение потока математических результатов превосходит всё предшествующее. Но можно ли её сравнивать с достижениями космологии, физики и биологии, которым покровительствовало множество нобелевских лауреатов, и которыми полны иллюстрированные журналы? Кто расскажет о тех одиноких математиках, которым мы обязаны решениями проблем Ферма, Бибербаха и Пуанкаре? Кто попытается хотя бы приблизительно описать путь их открытий и ответить на вопрос, почему мы так заинтересованы в решении этих проблем? Потому что, если посмотреть более внимательно, они даже ничего не дают самой математике. Даже наоборот, потому что после разрешения этих проблем математика обеднела.

Можно, однако, признать, что математика уже достаточно развита, и требовать постоянного её развития было бы признаком какой-то навязчивой идеи. Почему мы так зависим от математики? Разве это не те теоремы, которым найдено доказательство и которые достигли статуса достойных экспонатов коллекции? Или это нужно скорее для поддержания мыслительного напряжения, того беспокойства, которое сопровождает математические исследования. Это напряжение даёт нам почувствовать жизнеспособность мысли. Но если кто-нибудь спросит нас о направленности исследований в области математики, мы не ответим. Не ожидайте от математики многого, как сказал Марк Кац. Философа, который, согласно Аристотелю, может помочь математикам в выборе пути, не существует.

Спустившись со сцены поколений, и видя нынешнее хаотичное развитие математики, спросим, не превратится ли она во что-то, что не хотелось бы видеть как математичность. Хотелось бы, чтобы математика могла произрастать на любом месте. Но ещё Философ предупреждал, что некоторые вещи должны быть оставлены как нематематические. Мы не находим во всех новых исследованиях того колорита метафизичности, который сопровождал прежние числа и фигуры, и тех оживших надежд, которые сопровождали зарождение анализа. Кроме того, многие новые математические дисциплины выглядят второсортными.

Естественные науки перестали быть щедры на проблемы. Именно благодаря им математика развивала новые области исследований и развивалась сама. Этой потребности не соответствует чрезвычайно математизированная физика, которая полными горстями черпает готовые формализмы, поэтому её проблемы математически вторичны. Понимание микромира могло бы расширить математические методы, если бы оно развивалось независимо от заранее приготовленной математики.

Сохраняющаяся ныне интенсивность потока математических открытий обусловлена не до конца исчерпанным запасом средств и ранее поставленных проблем. Залежи, которыми математика так обогатилась, исчерпываются, как истощается разработанная шахта. Мы не думаем, что этот запас средств и проблем, хоть и исчерпаемый, иссякнет для ближайших поколений. Но, замкнувшись в нём, математика могла бы развиваться сама для себя. В ней всегда было самолюбивое течение, но её новые «числа и фигуры» заточают математиков в жёсткие рамки оторванной от естественных наук профессии.

В наше время естественные науки выходят из берегов, не ведая, куда идут в своём бурном развитии. В них математическое влияние проявляется лишь использованием кодов, необходимых для алгоритмизации. Из-под математического влияния вырвалась физика. Если так, то не лучше ли позволить наукам самобытное развитие, чем участвовать с ними – не боясь этих слов – в варварской гонке за *фактами*? В то же время математики должны ответить на важный для себя вопрос: чего они хотят от математики? Есть фундаментальные вопросы математики, которые ещё не совсем развиты. Независимого от арифметики и алгебры, пути развития ожидает топология. Мы не всегда смели это сказать, но в математике есть неосознанный раскол между непрерывным и дискретным. Быть может, слишком поспешным был взгляд на континуум как на «составленный из точек»? В геометрии мы оставили понятие неделимости. Быть может, не надо было так легко забывать о геометрии как о дисциплине самой в себе? Подскажет ли что-нибудь в этом квантовая теория?

Нужно ли что-то сделать, чтобы в математике не гоняться за всякими не подчинёнными нашим метафизическим ожиданиям целями, и проникаться истинами, о которых нечего сказать, кроме того, что они взаимно непротиворечивы? Этому способствует взгляд на математику как на сразу изготовленную постройку. Но если мы видим математику как чувство, как смысл, тогда каждая сказанная нами фраза будет выражать нашу уверенность в понимании нас самих. Если мы видим перед собой постройку, то сталкиваемся с искушением экстремизма, что в конце концов означает алгебраизацию.

В принятой традиции *finis* обычно видят как опасения и катастрофы. Сейчас одна из катастроф, которая угрожает математике, – уход на свой путь её нематематических отраслей. Их много. Образующиеся здесь стремления не уступают по силе развития другим наукам в погоне и скорости. Но они возвращаются к математике, потому что в нас есть отдалённое ощущение, что последнее слово в науках и философии, – это привилегия математики.

Перевод с польского Галины Синкевич