Развитие понятия непрерывности у Шарля Мере.

Г.И. Синкевич, Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет.

Опубликовано: Синкевич Г.И. Развитие понятия непрерывности у Шарля Мере // Труды X Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: Издательство ЯГПУ – 2012 г. – С. 180–185.

Рисунок 1. Портрет Шарля Мере. Во второй половине XIX века продолжалась работа по упорядочению математического анализа, начатая Огюстеном Коши, и продолженная Карлом Вейерштрассом, Эдвардом Гейне, Георгом Кантором, Рихардом Дедекиндом и Шарлем Мере. В 1872 году у каждого из них вышли работы, связанные с арифметизацией анализа. Это лекции Вейерштрасса «Элементы арифметики», изданные его учеником Е. Коссаком [10], статья Гейне «Элементы учения о функциях» [1, 9], «Непрерывность и иррациональные числа» Дедекинда [2], «Новый точный инфинитезимальный анализ» Шарля Мере [13].

Рассмотрим здесь работы Шарля Мере, не получившие признания, но от этого не менее значимые.

Шарль Мере (Charles Méray) родился 12 ноября 1835 года в Chalon-sur-Saône, умер 2 февраля 1911 в Saône-et-Loire. В 11-летнем возрасте его отличало благоговейное отношение к математике, хотя учитель отмечал, что мальчик мало что понимал в геометрии и алгебре, да и сам Мере говорил о себе: «Я был влюблён в математику без понимания». Он с увлечением читал историю математики Монтюкла, а в 18-летнем возрасте поступил в Нормальную школу в Париже, показав первый результат среди поступавших. Своим учителем считал Шарля Брио. С 1857 по 1859 работал учителем лицея в Сен-Квентине, а затем взял отпуск и семь лет жил в деревне в Бургундии, занимаясь виноделием. В 1866 году он стал читать лекции в университете Лиона, а с 1867 года и до конца жизни был профессором математики в университете Дижона.

В 1899 году стал членом-корреспондентом Парижской Академии наук. Первая его работа по геометрии вышла в 1868 году, а в 1869 году в Дижоне вышла работа, оцененная значительно позже, в которой он первым даёт строгое определение иррационального числа: «Замечания о природе определённых величин с использованием пределов этих величин» [12]. Ему принадлежат несколько курсов анализа, выходивших с 1872 года [13, 15].

В работе [12] Мере формулирует два принципа теории иррациональных (неизмеримых, incommensurables) чисел: «1. Переменная величина $\nu$, которая последовательно принимает значения $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n, ...$, стремится к некоторому пределу, если её члены будут постоянно возрастать или убывать, оставаясь при этом в первом случае меньше, а во втором случае больше некоторой фиксированной числовой величины. 2. Переменная $\nu$ определяется ещё дополнительным свойством, что разность $\nu_{n+p} - \nu_n$ стремится к нулю при неограниченно возрастающем $n$, каково бы ни было отношение между $n$ и $p$.

Определим также эквивалентные возрастающие последовательности:

Если $m$ и $n$ бесконечно возрастают, разность $u_m - v_n$ двух возрастающих последовательностей сходится к нулю для некоторого зависимого промежуточного (взаимно обоюдного) индекса между этими индексами, легко выяснить, как достигается бесконечно малая для всякого другого закона. Говорят также, что возрастающие переменные $u$ и $v$ эквивалентны.

Их пределы (подлинные или фиктивные): предположим, что $u$ и $v$ имеют пределами $U$ и $V$ (добавим, что это рациональные числа). Если $u$ и $v$ эквивалентны, тогда $U$ и $V$ равны между собой. Напротив, допустим, что $u$ и $v$ не имеют предельной (числовой) точки. Будет оправданным, выражаясь фигурально, сказать, что они имеют равные пределы». Эти пределы он называет, в отличие от числовых пределов, «фиктивными пределами» возрастающих последовательностей.

Рассмотрим рассуждения Мере из курса 1872 года. Он был издан в Париже, получил невысокую оценку Германа Лорана [11], и остался незамеченным соотечественниками, а франко-прусская война затруднила знакомство с ним немецких математиков. Лоран писал: «Методы, применяемые в этой работе столь тонки и деликатны, что неизвестно, будут ли они понятны даже знатокам абстракций высшего Анализа, и стоило ли так резко разрушать многолетние традиции» [11, с. 25]. В качестве причины невысокой популярности трактатов Мере П. Дюгак называет его «чрезвычайно личный язык, который затрудняет чтение текста» [7, с. 348].

Мере следовал классической традиции Лагранжа и Коши, излагавших анализ на основании рядов Тейлора и Маклорена. Коши в 1821 году определял иррациональные числа как пределы последовательностей рациональных чисел, и даже определил операцию умножения и деления иррационального числа на рациональное, а также возведения иррационального числа в степень [6, с. 337, 341; или 5, с. 382, 388]. Рассматривались только целые функции, т.е. могущие быть разложены в ряд по целым степеням, и Мере неоднократно подчёркивает, что этого достаточно для нужд анализа. Мере опирается на критерий сходимости Коши, но для своей теории вводит много новых понятий: фиктивного предела, олотропности[1] и связанных с ними. Он считал, что «разрывные функции, не имеющие производных, не интегрируемые никогда не встретятся, так что о них можно не беспокоиться. Не стоит обращаться к уравнению Лапласа, принципу Дирихле, потому что производные определяются, рассчитываются, перемешиваются в дифференциальные выражения так, как этого хотел Лагранж, то есть с помощью простых операций»[12]. Тем не менее Мере идёт дальше Коши, – он определяет операции над иррациональными числами строго и последовательно, и на их основе вводит понятие непрерывной функции.

[1] Этот термин принадлежит Мере и в дальнейшем никем не употреблялся.

Поразительно, что точно так же и в том же году рассуждали в немецком городе Галле Кантор и Гейне в своих работах [4, 9].

Мере называет иррациональные числа (не разделяя их на алгебраические и трансцендентные) неизмеримыми.

Вот его рассуждение [13, курсив Мере]:

«Назовём вариантой числовое значение (целое или дробное, положительное или отрицательное) $v_{m,n,\ldots}$, величина которого зависит от значения целых $m$, $n$, …, которые берутся в любых возможных комбинациях величин, и которые нумеруются с помощью этих индексов, например:

$$v_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m}$$

$v_{m,n} = \dfrac{1}{mn}$ - это варианта двух индексов.

1. Если существует число $V$, для которого при достаточно больших $m$, $n$, …, разность $V - v_{m,n,\ldots}$ по абсолютному значению будет произвольно мала для достаточно больших величин индексов, то говорят, что варианта $v_{m,n,\ldots}$ стремится или сходится к пределу $V$.

Если $V = 0$, варианта $v_{m,n,\ldots}$ называется бесконечно малой. Таковой будет, например, разность между вариантой и её пределом.

Среди вариант, не имеющих пределов, нужно отметить такие, у которых абсолютная величина может приобрести значение, большее любого наперёд заданного числа; их называют *бесконечными* величинами; а те, которые наоборот, имеют числовые значения, меньшие, чем некоторое конечное число, называются *конечными*.

2. Нетрудно установить следующие утверждения:

I. Сумма, произведение (или произведение степеней) определённого числа нескольких конечных вариант и постоянных значений будет конечной величиной. То же для отношения двух подобных величин, у которых знаменатель не является бесконечно малым.
II. Произведение бесконечно малой на постоянную или конечную величину, сумма некоторого количества таких произведений (положительных степеней), на бесконечно малую, обратная к бесконечно большой, будет бесконечно малой вариантой.
III. Степень с бесконечным (положительным) показателем некоторой постоянной величины или варианты будет бесконечной или бесконечно малой смотря по тому, какое у этой величины окончательное абсолютное значение: превосходит ли оно величину >1, или оно меньше, чем величина <1.
IV. Сумма, произведение (или произведение степеней) определённого количества некоторых вариант, имеющих пределы, и постоянной величины, имеют в пределе результат, который получится, если подставить в этом вычислении предел этих значений. То же самое относится и к частному двух подобных величин, если знаменатель не является бесконечно малым.

**Неизмеримые числа.**

3. Назовём сходящейся такую варианту $v_{m+n,\dots}$, для которой разность между $v_{m+p,n+q,\dots}$ и $v_{m+n,\dots}$ для произвольных $p$ и $q$ будет меньше любой бесконечно малой варианты с индексами $m$ и $n$, короче говоря, такой, что эта разность стремится к нулю для $m, n$ бесконечных независимо от $p$ и $q$.

Вот примеры такой сходимости:

$1^0$ Варианты, имеющие предел. Так как $v_{m+p,n+q,\dots} - v_{m,n,\dots} = (V - v_{m,n,\dots}) - (V - v_{m=p,n+q,\dots})$ - это разность двух бесконечно малых вариант.

$2^0$ Конечные варианты, которые, начиная с некоторого значения индексов, уже не растут и не уменьшаются (говоря алгебраически). Это легко доказывается.

4. Две варианты $v_{m,n,\dots}$ и $v'_{m',n',\dots}$эквивалентны, когда их разность $v_{m,n,\dots}$- $v'_{m',n',\dots}$, рассматриваемая как единая варианта с индексами $m,n,..m',n',\dots$, будет бесконечно малой.

Установив это, легко докажем следующее.

*Сумма, произведение (или произведение степеней) некоторого количества сходящихся вариант, и неизменных величин, будет сходящейся вариантой, эквивалентной такой, которая получилась бы заменой соответствующих эквивалентов. То же верно и для частного, если знаменатель не является бесконечно малым.*

5. Это утверждение тривиально, если варианты имеют пределами определённые числа, но в том случае, когда некоторые из них не сходятся ни к какому пределу, *выражаемому численно,* это утверждение тоже остаётся справедливым.

Тем не менее, согласимся, что это в переносном смысле означает, что инварианта сходится к некоему фиктивному *неизмеримому* пределу, если она сходится к точке, не допускающей точное определение. Если несоизмеримые пределы двух сходящихся вариант равны, то эти варианты будут эквивалентны; сумма, произведение и т. д. вариант, сходящихся к какому-либо пределу, подлинному или фиктивному, в зависимости от случая, есть сумма или произведение или т.п. их пределов, подлинных или фиктивных. И, если дополнить эти условия, верны предложения, которые мы сформулировали, равно как и цитируемые теоремы.

6. *Сходящаяся варианта, не являющаяся бесконечно малой, конечна при сохранении определённого знака*. По нашей гипотезе существуют бесконечные комбинации величин $m$, $n$, … , которым соответствует $v_{m,n,\dots}$, превосходящие по абсолютному значению фиксированное число δ. Придадим $m$, $n$, … такие достаточно большие значения, чтобы $v_{m+p,n+q,\dots} - v_{m,n,\dots}$ было бы численно меньше, чем δ, каковы бы не были $p$, $q$, … Так как $v_{n+p,m+q,\dots}$ равно $v_{m,n,\dots} + \left(v_{m+p,n+q,\dots} - v_{m,n,\dots}\right)$, это равенство справедливо для всех $p$, $q$, …, короче говоря, для всех индексов, равных или превосходящих знак $v_{m,n,\dots}$.

Более того, если две варианты $v_{m,n,\dots}$ и $v'_{m',n',\dots}$ сходятся к несоизмеримым пределам, и не являются эквивалентными, их разность $v_{m,n,\dots} - v'_{m',n',\dots}$ конечна и сохраняет определённый знак. Смотря по тому, каков этот знак, + или –, мы говорим, что неизмеримый предел первой больше или меньше, чем второй.

Таким же образом, говорят, что измеримое число $a$ больше или меньше неизмеримого конечного числа для варианты $v_{m,n,\dots}$, смотря по тому, как получается, $a - v_{m,n,\dots}$ > или < 0.

Если, по абсолютному значению, эта конечная разность остаётся меньше ε, назовём *значением* неизмеримого числа приближённым в соответствии с ε, с избытком в первом случае и с недостатком во втором случае.

*Мы будем определять все неизмеримые числа, приближая их значения с помощью некоторого δ , каким бы малым его не вообразить.*

Действительно, пусть $v_{m,n,\dots}$ – сходящаяся соответствующая варианта, и для данных достаточно больших $m$, $n$, …, при которых $v_{m+p,n+q,\dots} - v_{m,n,\dots}$ остаётся по абсолютной величине меньше, чем $\frac{1}{2}\delta$, каковы бы ни были $p$, $q$, …

Тождество $v_{m+p,n+q,\dots} = v_{m,n,\dots} + \left(v_{m+p,n+q,\dots} - v_{m,n,\dots}\right)$ приобретает вид $\left(v_{m,n,\dots} + \frac{1}{2}\delta\right) - v_{m+p,n+q,\dots} > 0$ при $\delta < 0$, $\left(v_{m,n,\dots} - \frac{1}{2}\delta\right) - v_{m+p,n+q,\dots} < 0$ при величине числа $< \delta$.

Тогда $\left(v_{m,n,\dots} + \frac{1}{2}\delta\right)$, $\left(v_{m,n,\dots} - \frac{1}{2}\delta\right)$ будут приближениями к неизмеримому числу сообразно $\delta$, одно с избытком, второе с недостатком.

7. Это утверждение хорошо проверяется на примерах. Положительное неквадратное число $a$, не являющееся точным рациональным квадратным корнем какой-либо числовой величины, может быть представлено бесконечным множеством квадратных вариант, которые к нему сходятся. Мы утверждаем, что эти рациональные (положительные) будут сходящимися и эквивалентными друг другу вариантами.

Действительно, пусть $v_n^2 = a + \varepsilon_n$, $v_{n+p}^2 = a + \varepsilon_{n+p}$, $\varepsilon_n$, $\varepsilon_{n+p}$

сходятся к нулю при бесконечно возрастающих индексах, и тогда $v_{n+p} - v_n = \dfrac{\varepsilon_{n+p} - \varepsilon_n}{v_{n+p} + v_n}$.

Знаменатель не является бесконечно малым, потому что в противном случае $v_n^2, v_{n+p}^2$ сходятся к нулевому пределу, отличному от $a$ , числитель же нет, тогда $v_{n+p} - v_n$ стремится к нулю при бесконечно возрастающем $n$, независимо от соотношения между $n$ и $p$ , что и доказывает сходимость варианты $v_n$.

Таким же образом доказывается эквивалентность двух вариант, квадраты которых сходятся к одному и тому же числу. *Это означает, что все положительные числа рационально измеримы или неизмеримы.* Они употребляются для обозначения рационального фиктивного $a$ , означая истинное рациональное, когда $a$ есть квадратное число.

Таким образом, мы сказали, что квадраты многих вариант имеют общий предел $a$, и все могут стремиться к неизмеримому пределу $\sqrt{a}$ .

Равенство $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ означает, что квадраты двух вариант сходятся к числу 8, и другая к числу 2, первая эквивалентна удвоенной второй.

Неравенство $1<\sqrt{2}<\sqrt{8}$ выражает избыток первой над второй и их обеих перед единицей завершается знаком +.

В подобном равенстве $\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}$ мы будем воспринимать рациональный корень четвёртой степени как биквадратный из варианты, сходящейся к $a$ и равен рациональному корню из квадрата такой эквивалентной варианты, квадрат которой равен $a$.

Рассуждая таким образом, *мы всегда можем получить утверждение о неизмеримых числах, выражающее основные отношения между числами в их собственном смысле*.

8. Надо сказать ещё кое-что о неизмеримых вариантах. Пусть $u_{m,n,\ldots}$ – это последовательность величин такого рода, и

величины $v_{m,n,\ldots}$ приближённо отличаются от неё на величину $\varepsilon_{m,n,\ldots}$, причём эта последняя бесконечно мала.

Если $v_{m,n,\ldots}$ – сходящаяся величина, мы делаем заключение, что обе величины стремятся к одному и тому же пределу, измеримому или нет, а именно к пределу $v_{m,n,\ldots}$.

Так как по абсолютной величине $v_{m,n,\ldots} - u_{m,n,\ldots} < \varepsilon$, $v_{m+p,n+q,\ldots} - u_{m+p,n+q,\ldots} < \varepsilon$, тогда $(v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots}) < (u_{m+p,n+q,\ldots} - u_{m,n,\ldots}) + (\varepsilon_{m,n,\ldots} + \varepsilon_{m+p,n+q,\ldots})$, где в последней части второе слагаемое бесконечно мало, условие для сходимости $u$ заключается в том, что её величины в разных случаях (разновременно) измеримы. Необходимо добиться, чтобы разность $u_{m+p,n+q,\ldots} - u_{m,n,\ldots}$ была бы меньше варианты с индексами $m, n, \ldots, p, q, \ldots$, бесконечно малой для неограниченно возрастающих $m, n, \ldots$, и для некоторых фиксированных $p, q, \ldots$ .

Теперь мы полагаем необходимым утверждать, что далее мы будем понимать неизмеримые числа в том смысле, который мы продемонстрировали выше, в их приближении к бесконечно малым, бесконечным и конечным».

Далее Мере определяет непрерывную функцию и расширяет это понятие, создав новый термин «олотропная функция»:

«Пусть $f(x, y, \ldots)$ – сумма целых рядов, $R_x, R_y, \ldots$ – их области (круги) сходимости, $R_x{}^\circ, R_y{}^\circ, \ldots$ – соответственно меньшие положительные величины. Если $x', y', \ldots, x, y, \ldots$ – произвольные варианты в этих кругах, центры которых в точках $O_x, O_y, \ldots$ как центры областей $R_x{}^\circ, R_y{}^\circ, \ldots$, таким образом, что все разности

$x'-x, y'-y,...$ будут бесконечно малыми, и разность $f(x',y',...)-f(x,y,...)$ так же стремится к нулю.

*Рассмотрим сумму N первых элементов целого (по целым степеням) ряда. Заменив варианты на сходящиеся варианты, которые сходятся внутри меньшего внутреннего круга сходимости, получим сходимость вариант и их эквивалентность друг другу, при N – индексе замещённых вариант от переменных, неограниченно сходящимся к каким-либо значениям.*

Именно это и будет как раз тем, что обеспечит целочисленному ряду свойство определять значение функции, даже неизмеримое, от независимых переменных. Мы полагаем излишней другую точку зрения в этой теории.

*Если $x', y',...$ соответственно стремятся к данным пределам x, y, …, расположенным во внутренней части круга сходимости, $f(x',y',...)$ стремится к $f(x,y,...)$.*

Будем говорить, что функция $f(x,y,...)$ олотропна (olotrope) на порциях $S_x, S_y$ ,... вспомогательной плоскости, определённой геометрически независимыми переменными, когда для всех значений переменных *x*, *y*, …, ограниченных этими областями, $f(x+h, y+k,...)$ представляет собой ряд по целым степеням, а *h*, *k*, … таковы, что они остаются внутри области сходимости, отличаясь на величины, не превосходящие $\delta_x, \delta_y,...$, все не равные нулю.

Назовём $\delta_x, \delta_y$ ,... *областями олотропии* или *олометрами* функции те участки, на которых выполняются названные условия.

Сразу же из этого определения следует, что $f(x, y, \ldots)$ представляется в форме ряда по целым степеням от $x - x_0, y - y_0, \ldots$, где $x_0, y_0, \ldots$ обозначают некоторые числовые значения переменных внутри области, такие, что для соседних точек $x, y, \ldots$, для которых модули их разностей остаются внутри олометров. Таким образом, получается вместо $x - x_0, y - y_0, \ldots$ можно писать $h, k, \ldots$ $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$.

*Сумма целочисленного ряда есть олотропная функция от переменных внутри круга с тем же центром, что и круг сходимости, но меньшего размера*».

Понятие олотропной функции аналогично понятию равномерно непрерывной функции, сформулированному в те же годы Кантором и Гейне. К сожалению, оно не было развито ни в последующих работах Мере, ибо он работал только с целыми функциями, ни его коллегами. Мере излагает классический анализ с помощью введённых понятий – определяет производную, теорему о среднем, теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, Ферма о необходимом условии экстремума, теорию интеграла и дифференциальных уравнений.

Таким образом Мере расширил понятие числа добавлением иррациональных чисел как классов эквивалентных сходящихся последовательностей и фиктивных пределов (сходящаяся последовательность есть число). Он отвергал физические и геометрические образы ради создания внутреннего языка чистого анализа [14, с. 15–16].

Сейчас французы чтут память своего соотечественника, называя построение иррационального числа построением Мере-Кантора-Гейне. Именем Шарля Мере названо бургундское вино, которое вы видите на рис. 2. Рисунок 2. Вино «Шарль Мере».

Литература

1. Гейне, Э. Элементы учения о функциях / Э. Гейне. – Пер. с нем., примечания Г.И. Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексные программы. Межвузовский тематический сборник трудов. – Спб: СПбГАСУ – в печати.
2. Дедекинд, Р. / Непрерывность и иррациональные числа / Р. Дедекинд. Пер. с нем. С.О. Шатуновского. – Одесса, 1923. – 4 изд. – 44 с.
3. Дюгак, П. / Понятие предела и иррационального числа, концепции Шарля Мере и Карла Вейерштрасса / П. Дюгак // Историко-математические исследования. – 1973. – XVIII. – С.176–180., электронный ресурс: http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1970_num_23_4_3163
4. Кантор, Г. / Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов / Г. Кантор // Труды по теории множеств – М.: 1985. – С. 9 – 17.
5. Коши, О. Алгебрический анализ: переведён с французского Ф. Эвальдом, В. Григорьевым, А. Ильиным / О. Коши. – Lepzig : Druck von Bär & Hermann, 1864. – 252 с.
6. Cauchy, A.-L. Course d'Analyse de l'Ecole Royale Politechnique (1821). Analyse Algébrique / A.-L. Cauchy // Oeuvres. Ser. 2, t. 3. 1–471. – Электронный ресурс: http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE_CAUCHY_1_2
7. Dugak, P. / Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite / P. Dugak // Revue d'histoire des sciences et de leurs applications. – 1970. – T. 23. – n°4. – P. 333–350. Электронный ресурс: http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1970_num_23_4_3163
8. Dugac, P. / Elements d`analyse de Karl Weierstrass / P. Dugac // Archive for History of Exact Sciences. – Paris, 1972. – 10. – P. 41–176.
9. Heine, E. / Die Elemente der Functionenlehre / E. Heine // J. reine angew. Math. – 1872. – 74. – S. 172–188.

10. Kossak, E. / Die Elemente der Arithmetik, Programm Fried. / E. Kossak // Werder. Gymn. – Berlin, 1872.
11. Laurent, H. / Ch. Méray. Nouveau précis d'analyse infinitésimale / H. Laurent // Bulletin des Sciences Mathématiques. – 1873. – 4. – P. 24–28.
12. Méray, Ch. / Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données / Ch. Méray // Revue des Sociétés savantes, Sci. Math. phys. nat.– 1869. – (2) 4. – P. 280–289.
13. Méray, Ch. Nouveau précis d'analyse infinitesimale / Ch. Méray. – Publication : F. Savy. XXIII – Paris: 1872. – 310 p. – Электронный ресурс: http://mathdoc.emath.fr/cgi-bin/linum?aun=000839
14. Méray, Ch. / Considérations sur l'enseignement des mathématiques / Ch. Meray. – [Darantière] ([Dijon]). – 1892. – 52 p. Электронный ресурс: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k994185
15. Méray, Ch. / Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques. Principes généraux / Ch. Méray. – Paris: Gauthier-Villars et fils. – 1 vol. – 1894–1898. – Электронный ресурс: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k995200
16. Pionchon, J. / Notice sur la vie et les travaux de Charles Méray // J. Pionchon // Revue bourguignone d'Enseignement Supérieur. – 1912. – **22**. – P. 1–158.
17. Roque T. / Les définitions les plus rigoureuses sont-elles plus faciles à comprendre ? Charles Méray et la proposition d'une définition « naturelle » des nombres irrationnels / T. Roque. – Universidade Federal do Rio de Janeiro. – Электронный ресурс: https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:M_XHOIq-lT0J:www.edc.uoc.gr/~tzanakis/ESU6/PdfFiles/6-04-Roque.pdf+LES+D%C3%89FINITIONS+LES+PLUS+RIGOUREUSES+SONT-ELLES+PLUS+FACILES+%C3%80+COMPRENDRE+?+Charles+M%C3%A9ray+et+la+proposition+d%E2%80%99une+d%C3%A9finition+%C2%AB+naturelle+%C2%BB+des+nombres+ir

rationnels+Tatiana+ROQUE+Universidade+Federal+do+Rio+de+Janeiro&hl=ru&gl=ru&pid=bl&srcid=ADGEESibLOQS4DwTFRO8LZ2pT-RURu5s2O6fOQ2XAzxeveCB7PIrC9lfdiz02Ee4rl9SXU_csvvIIaIHIXrOhxQq1F5PEMDof99jumFI0b2oQZf--V_ELTh2wxYNHq_6SPmluy_c36hQ&sig=AHIEtbSVhM-sJquEPe48C1HY_8OUxb0kCg

18. Tannery, J. / Méray Ch. « Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques, Première partie : Principes généraux » / J. Tannery // Bulletin des Sciences Mathématiques. – 1894. – **(2)18**. – P. 80–90.