XIV век и ранние представления о континууме.

Г.И. Синкевич, СПбГАСУ

Опубликовано:

История и педагогика естествознания. Москва, 2015. – Выпуск I. – с. 7-12.

В исследованиях по истории математики, особенно древней математики, следует опасаться двух соблазнов – иллюзии того, что современная математика уже была проявлена в древней, и иллюзии того, что рассуждения математиков былых времён не обладали силой современных исследователей. И та и другая крайность подобна Сцилле и Харибде, между которыми есть узкий путь поиска объективной оценки, для чего следует рассмотреть результаты предшественников и современников, а также степень влияния идеи на потомков. Здесь мы попробуем следовать этому методу и рассмотреть ранние представления о континууме в работах математиков XIV века. Нас будут интересовать только те понятия, которые играют роль в анализе и теории множеств XIX века, а именно понятия континуума, точки, границы, интенсивности, измерения.

XIV век не был счастливым для Европы. В это время шла Столетняя война, была эпидемия чумы. Но в XI–XII веках появляются первые европейские университеты, и благодаря институтам переводчиков в Багдаде и Толедо с арабского на латынь переведены работы античных философов и математиков. В Европе появляются первые университеты, начинает формироваться научная среда. Европейская наука имела сильную опору в виде научных достижений античности, сохранившихся в арабских переводах. Благодаря научным диспутам в науку вернулось искусство спора, аргументации. Латынь как язык, сформированный в богословских текстах, обладала мощным арсеналом логических функторов, позволявшим создавать аргументированные рассуждения. Противоречия снимались введением более тонких различий. Появилась уверенность в том, что человеческий ум равномощен мирозданию и способен его объяснить (Данте).

В университетах Парижа (XII век) и Оксфорда (XIII век) лекции профессоров заключались в чтении классиков, прежде всего Аристотеля, и их комментировании. Это породило плодотворные результаты схоластической логики, выработавшей аппарат толкования и оперирования философскими понятиями. В большинстве случаев трактаты писались по материалам лекций и диспутов, что вносило в них живость устной речи и выразительность аргументирования. В математику приходят новые понятия, имеющие большую общность по отношению к массовой математической культуре Средневековья – коммерческой и навигационной. Начинается развитие финансовой математики, формализуется понятие риска, появляются первые коммерческие руководства [1]. Подобно спорам XIX века математики пытались отделить понятия точки, линии и поверхности от их физической интерпретации (споры реалистов и номиналистов). Континуум рассматривался как целостный геометрический либо физический объект, понятие числового континуума формируется лишь в XIX веке [2]. Вот разнообразные точки зрения того времени: континуум не слагается из атомов, а из частей, делимых без конца (Аристотель, Аверроэс), либо континуум слагается из неделимых тел (Демокрит), либо из точек. В свою очередь, континуум состоит из бесконечного числа точек (Генрих (Harclay) – неделимые непосредственно примыкают друг к другу; Роберт Линкольнский – точки связаны опосредованным образом, либо конечного числа неделимых; Пифагор – континуум слагается из конечного числа точек, в основе мира лежит целое число; Платон, Вальтер (Waltherus modernus) – континуум слагается из конечного числа неделимых [3, с. 402–403.]

«Физика» Аристотеля состоит из восьми книг, в первой и шестой из них он полемизирует с элеатами, и обсуждает апории Зенона. В ней же изложена теория континуума Аристотеля – пустота невозможна, поэтому материя не может состоять из неделимых атомов. По Аристотелю, вещи соприкасаются, когда границы их находятся «вместе», и непрерывны, когда границы их составляют «одно» [5, с. 306]. «Непрерывно то, чьё движение едино» [5, с. 323].

Основные положения книги Аристотеля «Физика» были изложены Проклом в трактате «Начальные основания физики или о движении». Первый латинский перевод Прокла появился около 1160 года. «Новая Логика» Аристотеля переведена на латинский язык в 1121–1158 году, с XII века труды Аристотеля переводят преимущественно с арабского, но также и с греческого; к этому времени весь «Органон» Аристотеля уже был известен в Европе. В 1254 году в Париже переводят сочинения Аристотеля, Альберт Великий в Париже излагает его учение, в том числе и физику. Как заметил В.П. Зубов, для XIV века характерны «математизация» Аристотеля и «физикализация» Евклида [4, с. 622].

В XIII веке Р. Бэкон в толкованиях Аристотеля показывал, что при переходе качества из одного в другое нельзя указать последний момент существования прежнего качества, но лишь первый момент нового качества. Возникающее здесь понятие границы как сечения прошло долгий путь до введённого в 1872 году Дедекиндом понятия непрерывности, при котором в одном множестве нет наибольшего числа, если во втором множестве есть наименьшее.

Труды Аристотеля толковались как христианскими, так и мусульманскими философами. Но если в христианской традиции основные усилия направлялись на адаптацию учения Аристотеля к доктрине Церкви, арабская традиция была свободна. В XIII–XIV веках распространяются работы арабских комментаторов Аристотеля. Самым значимым среди них был Аверроэс (ибн Рушд, 1126–1198), получивший за свои толкования Аристотеля имя Комментатор. Среди его христианских оппонентов выделяются Альберт Великий (1193–1280) и его ученик Фома Аквинский (1225–1274). Их полемика стимулировала развитие понятия континуума, его бесконечной делимости, понятия движения.

Аверроэс в комментарии к третьей части физики Аристотеля говорит: «Физик доказывает, что континуум делим до бесконечности, а геометр этого не доказывает, но предполагает как доказанное в физике. Евклид в своей геометрии предполагает, что континуум не состоит из конечного множества непосредственно примыкающих друг к другу атомов, хотя и не делает этого в явной форме, то есть не включает в число своих предположений» [3, с. 424–425].

Аверроэс утверждал невозможность неделимого движения в неделимом времени. В работах Аверроэса и Альберта Великого, возникает идея последовательности и бесконечной последовательности[1], как характеристики движения, зарождающегося различия между кинематическим и динамическим аспектами. Позже эта идея была развита в трудах Вычислителей – группы учёных Мертон-колледжа в Оксфорде (основан в 1264 году).

Уильям Оккам (ок. 1285–1358), английский философ и логик, преподавал в Оксфорде. Он отличал завершающую и соединяющую точки и утверждал, что между двумя примыкающими частями континуума нет ничего промежуточного [3, с. 428]. Комментируя определение Аристотеля: непрерывно то, чьи края образуют *одно*, Оккам писал: «*Одно*, (или *общая граница*) означает лишь отсутствие чего-либо между частями континуума, иначе говоря, линия непрерывна лишь благодаря отрицанию чего-либо между её частями, что могло бы стать причиной разрыва между ними» [4, с. 299].

Между первой точкой и всякой другой точкой, взятой на линии, существует какая-то промежуточная точка, но это не значит, что некая точка существует между первой и любой другой точкой линии (вместе взятыми) [5, с. 308].

В XIV веке в Англии, в Оксфорде, в Мертон-колледже, работала группа математиков, значительность открытий которых дало им имя Калькуляторов. Благодаря им античная традиция оценок с помощью неравенств сменяется новой традицией точного вычисления, равенства. Их заслугой было введение в науку понятий «интенсивность» и «мгновенная скорость», хотя и не определённых строго. Представителем мертонской школы был Ричард Суисет (иначе

[1] res successive

Суайнсхед, жил в XIV веке). Около 1346 года была написана «Книга вычислений» Ричарда Суисета, в которой он впервые вводит в математику физические понятия изменения и движения, интенсию и ремиссию качеств (густота и разрежённость, сила и сопротивление, скорость и медленность, тепло и холод). Суисет вводит упорядоченные шкалы непрерывных изменений, между которыми есть соответствие [6, с. 134].

Другим представителем Калькуляторов был Томас Брадвардин (1290–1349), написавший между 1328 и 1335 годом трактат «О континууме» (De continuo) [3]. В его трактате содержится полемика с различными точками зрения на континуум. Одна группа его оппонентов – сторонники дискретной геометрии (финитисты), другая группа – это сторонники актуально-бесконечно малых.

Брадвардин близко подходит к пониманию плотности континуума: «две точки на плоской поверхности и неделимые в континууме не могут сочетаться (conjungi) друг с другом непосредственно, между ними должна находиться ещё одна точка, а, следовательно, много точек», «между двумя неделимыми любого континуума должно заключаться бесконечное множество точек» и «всякий континуум имеет бесконечное множество атомов» [3, с. 406]. Он утверждает метод исчерпываний и аксиому Архимеда, отрицая существование бесконечно малых: «Всякую прямую можно разделить на множество отрезков [3, с. 399], «любое конечное пространство может быть пройдено равномерным движением за любое конечное время» [3, с. 401].

Идея сечения (деления) континуума широко обсуждалась в кругах номиналистов: «Время как континуум разделяется моментом таким образом, что либо в прошлом нет последнего момента, либо его нет в будущем в зависимости от того, к будущему или прошлому мы относим момент настоящего. Под настоящим понимается мгновение, а под прошлым и будущим – время» [3, с. 401–402]. «Не существует минимального градуса формы, способного к интенсификации и ремиссии. Иначе существовало бы наиболее медленное движение. Если бы такой минимальный градус существовал, неделимые в континууме непосредственно смыкались бы друг с другом» [3, с. 404]. «Если b есть момент первого бытия вещи, то не существует последнего момента её небытия, и наоборот, если момент b рассматривается как момент небытия, то не существует первого момента её бытия» [3, с. 409].

Есть у Брадвардина и идея самоподобия континуума: «Всякий континуум состоит из бесконечного числа континуумов того же рода, имея бесконечное число атомов (то есть треугольник может быть разделён на бесконечное число треугольников, поверхность имеет бесконечное множество поверхностей, линий и точек)» [3, с. 413]. «Ни один континуум не интегрируется (не слагается) из атомов[2]» [3, с. 424]. Брадвардин вслед за Оккамом говорит об условном, фиктивном понятии точки в математическом смысле: «поверхность, линия и точка вообще не существуют», «континуум получает непрерывность и границы не посредством таких вещей, а посредством самого себя» [3, с. 428–429].

Брадвардин установил первые парадоксы бесконечного, сопоставляя бесконечные множества [3, с. 420-423].

Французский философ и математик Никола Орем (родился до 1330 года, умер в 1382) был знаком с трактатом Суисета и часто критиковал его в своих сочинениях [4, с. 721, 726]. Трактат Орема «О конфигурации качеств» был написан до 1371 года, В.П. Зубов относит его к 1350 году [4, с. 604]. Этот трактат в XIV и XV веках изучался в университетах Европы.

Заслуга Орема перед будущим исчислением состоит в том, что он разделил вещи на постоянные и переменные, рассматривал измерения по трём ортогональным осям, выделил понятие последовательности изменений, понятие мгновенной скорости, понятие непрерывной величины [7, с. 637], понятие длящейся последовательности[3] времени, в зависимости от которой изменяются вещи (качества), образуя последовательную длительность[4] [7, с. 679-680]. После

---

[2] Nullum continuum ex athomis integrari.
[3] sucessio morosa
[4] duratio successiva

Суисета (и вероятно, независимо от него) Орем вычислил конечную площадь ступенчатой фигуры бесконечной длины [6, с. 140], то есть сумму $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i}$ [7, с. 637, 709].

Орем геометризует интенсивность и экстенсивность качеств (например, скорость, кривизна кривой), создавая их образы как вертикальные отрезки с основанием на общей горизонтали. Интенсивность приобретается *последовательно*. Высота отрезка соответствует интенсивности предмета в данной точке, которая отложена по горизонтали. «Всякая вещь, поддающаяся измерению, за исключением чисел[5], воображается в виде непрерывной величины. Следовательно, для её измерения нужно воображать точки, линии и поверхности, или их свойства; стало быть, всякая интенсивность, способная быть приобретаемой последовательно, должна быть воображаема в виде прямой линии, поставленной отвесно в какой-нибудь точке пространства, то есть предмета, способного к интенсификации» [7, с. 637]. Орем допускает распространение такой модели на трёхмерную для «плоского» качества, и на четырёхмерную (воображаемую телесную) для «телесного» качества. Величину линейного качества он представляет в виде площади [7, с. 641]. Рассматривая скорость во времени и пространстве, Орем получает три взаимно ортогональные оси. Идея координатной системы в XVII веке неявно (с осью абсцисс и ординатой точки) воплотилась у Декарта, а для трёхмерных величин в XVIII веке у Эйлера.

Понятие несобственного интеграла было впервые рассмотрено в работах Даламбера (1768 год), затем Эйлера, Лагранжа, Пуассона, и завершилось определением Коши 1823 года, сохранившимся почти неизменным до наших дней.

Жан Буридан (ок.1300–1358), младший современник Брадвардина, учился в Сорбонне у Уильяма Оккама. Впоследствии Буридан дважды был ректором Парижского университета. В.П. Зубов называет его «умелым спорщиком и

[5] exceptis numeris

глубоким мыслителем» [5, с. 307]. В «Вопросах к восьми книгам «Физики» Аристотеля» Буридан продолжает геометризацию учения об интенсии и ремиссии форм, а также рассматривает поверхности конечной площади, возрастающие до бесконечности в длину или высоту [6, с. 140].

Рассмотрим его концепцию континуума, изложенную в «Вопросах к восьми книгам «Физики» Аристотеля», и в трактате «О точке». Он продолжает развивать взгляды Брадвардина на континуум. Буридан придаёт значение понятию границы, проявляет значимость геометрического понятия «касание», связь которого с понятием «касания» у Лобачевского отметил В.С. Широков [8, с. 254]. Как Брадвардин, Буридан полагал континуум состоящим из точек, но его «точка или мгновение до бесконечности малы[6]» [9, с. 257]. «Но отсюда не следует, наоборот, что точка есть некая определённая бесконечно малая величина, ибо точкой может назваться и $1/_{12}$ –я часть континуума, которая не есть нечто актуально-бесконечно-малое» [9, с. 305]. «Точки в континууме взаимно упорядочены, и можно обособить первую, а, следовательно, и остальные точки. Бесконечность промежуточных точек не исключает предшествования, благодаря которому все точки полагаются существующими актуально одна вне другой и вполне упорядоченными[7]» [9, с. 311-313].

Далее Буридан создаёт конструкцию, послужившую основой одного важного построения математики XIX века – последовательность интервалов, в каждом из которых содержится точка континуума: «если взять первую крайнюю точку, то можно указать часть линии, ближайшую к ней и более близкую, нежели все прочие части, которые не являются частями этой части и которых она не является частью. Но если мы возьмём несколько таких частей, из которых одна не является частью другой, то нет двух частей, одинаково близких к первой точке. Например: к первой точке непосредственно примыкает первая половина линии, первая четверть, или первая восьмая. Но среди

---

[6] in infinitum parvum est punctus vel instans

[7] Отметим, что вопрос о выборе и упорядоченности был рассмотрен в 1904 году Э. Цермело.

четвертей одна предшествует всем прочим четвертям, и среди восьмых одна предшествует всем прочим восьмым. Следовательно, аналогично можно сказать о точках, а именно: поскольку все находятся совершенно друг вне друга, одна должна предшествовать всем прочим[8]» [9, с. 313].

Интересны гипотезы, которые Буридан обсуждает, но отвергает. Первая из них – сечение линейного континуума, в результате чего на месте сечения появляются две новые завершающие точки, что ложно [9, с. 319]; другая – о границах (завершении) континуума: каким образом линия завершилась бы в точке, а тело в поверхности? Ведь тело ограничено помимо души, иначе оно было бы бесконечным. Если оно ограничено посредством своей сущности, это ложно; если посредством чего-то привходящего, - мы имеем то, что нам требуется. Ложность первого члена очевидна, ибо тогда весь континуум имел бы свою границу, как в середине, так и в конце, или на [9, с.336] краю, ибо тело одинаково имеет свою сущность и на краю и в середине» [9, с. 335-336]. – Это следует понимать как то, что границей линейного континуума могут быть только крайние точки, и наличие граничных (предельных) точек внутри отрезка недопустимо. В 1870-80-е годы Вейерштрасс и Кантор разработали концепцию предельных точек, а Кантор создал понятие совершенного множества как содержащего все свои предельные точки (1872 г.), и континуума как связного совершенного множества (1883 г.). Буридан отвергал предположения, противоречащие его представлениям о природе континуума, например, такие, что граница континуума как множество предельных точек содержится всюду в нём самом. Но интуиция Буридана позволила ему сформулировать эту гипотезу и рассмотреть её! Так же высоко следует оценить высказанную Буриданом идею последовательности.

[8] Идея покрытий была высказана Больцано в 1817 году, встречается в лекциях Дирихле 1862 года, лемма о покрытиях сформулирована Гейне в 1872 году, теорема о покрытиях доказана Борелем в 1895 и обобщена Лебегом в 1898 году.

Свой трактат Буридан заканчивает словами: «Итак, если против вышесказанного будут возражать, студенты сумеют на всё ответить, основываясь на вышеизложенном» [9, с.347].

Выводы

Понятие пространства появилось на латыни около 1300 года (согласно Кеджори). В XIV веке движение согласно античным представлениям понималось как поступательное или вращательное. Ещё не было понятия направленности движения; понятие вектор, оформившееся только к 1840 году, присутствовало лишь как радиус-вектор точки (от латинского "vehere"). Термин «направление» широко используется в математике с XVIII века. В XIV веке зарождаются понятия последовательности, упорядоченности, порядка. Понятия «течение», «изменение», «поворачивать», «продвижение в определённом направлении», «менять направление» были обыденными словами и не входили в научные рассуждения в качестве базовых терминов, например, «dies desem continuous» означало «10 дней подряд». Различие скалярных и векторных величин сформировалось к XIX веку, хотя термин «скаляр» впервые появился у Ф. Виета в 1640 году. Благодаря схоластам некоторые из них становятся научными конструктами.

Очень важным было введение в математику понятия изменения, интенсивности качества, рассмотренное Вычислителями Мертон-колледжа. На значительность их вклада в Исчисление обратил внимание Е. Медушевский в своей книге «Непрерывность» [10].

Н. Орем впервые ввёл понятие последовательности и мгновенного движения, хотя истолковывалось оно на уровне представлений XIV века. В 1660-х годах понятие «ряд» появляется в переписке Коллинса и Грегори, в 1685 году Валлис в использует его в своей «Алгебре» (он же вёл термин «интерполяция» и «бесконечно малая»). Буридан формулирует тезис «точка и мгновение до бесконечности малы» (in infinitum parvum est punctus vel instans), само понятие бесконечно малой в 1656 году впервые использует Валлис.

И лишь в 1879 году Георг Кантор вводит понятие полной упорядоченности.

Буридан в своём трактате делает попытку ввести в континууме отношение порядка и возможность обособления (последовательного перебора точек).

В XIV веке спорили о понятиях «касание» и «пересечение», в частности, некоторыми авторами предполагалось, что при пересечении перпендикулярных прямых общей является одна точка, а при пересечении под углом будет несколько общих точек. Знаменитый пример Секста Эмпирика о точке касания при движении сферы по плоскости широко анализировался авторами XIV века. Буридан опирается на этот пример в своих рассуждениях. В 1830 году Лобачевский использует понятие касания как основное для геометрии.

Континуум толковался как замкнутый отрезок геометрической линии, либо как фрагмент физического материала, обладающего сплошной структурой, например, камня, либо как интервал времени. Движение понималось как набор статичных состояний. Не была прояснена разница между отрезком и интервалом. Понятие границы толковалось как понятие рубежа, ограничителя в физическом смысле. Разделялось понятие соприкасающейся и завершающей точки. Между двумя близкими отрезками времени предполагалось мгновение, либо точка, а между двумя соседними точками предполагалась линия (линия есть длина, концами которой являются две точки [5, с. 306]). Понятие соседства, окрестности ещё не было разработано, оно зародилось в работах Больцано и Коши, и достигло своего завершения в работах Вейерштрасса. В XIV веке не было понятий сближения, сходимости. Понятие плотности возникает в работе М. Штифеля в 1544 году [11]. Критерий сходимости последовательности был сформулирован Больцано в 1817 году и использован Коши в Курсе анализа в 1821 году.

К чести открытий номиналистов следует отнести развитие тезиса Аверроэса о том, что математика не существует вне души, математические понятия следует отличать от соответствующих им физических понятий. В XIX веке необходимость такого разделения обосновал Больцано, благодаря Ганкелю его идеи стали широко известны и привели к созданию теории множеств в работах Кантора и Дедекинда.

Как отдельное явление середины XIV века отметим описание Оремом различия между переменной и постоянной, описание трёх перпендикулярных осей, последовательное изменение интенсивности, представление величины линейного качества в виде площади и вычисление конечной площади бесконечной плоской фигуры. Безусловно, до создания анализа как теории было ещё очень далеко, но здесь начинает формироваться научно-логический аппарат, который спустя три века позволит Ньютону создать Исчисление. Ценность представляют даже те гипотезы номиналистов, которые, будучи высказанными, ими отвергались, но нашли своё воплощение много веков спустя.

Замечательным в работах схоластов XIV века является то, что они обсуждали все гипотезы, к которым приводила их интуиция, но отвергали те из них, с которыми не согласовывался их научный опыт, к XIV веку довольно скромный. Многие из идей, высказанных, но отвергнутых после обсуждения Оремом, Брадвардином и Буриданом, послужили конструктивной основой представлению о числе XVI века, понятию бесконечно малой XVII века, в анализе XIX века – понятию плотности, последовательности, границы, представлению о сечении, покрытии, упорядоченности, непрерывности.

Литература

1. Синкевич Г.И. Возникновение финансовой математики как науки и формирование категории риска на материале торговых книг эпохи позднего Средневековья и Возрождения / Г.И. Синкевич // История, современное состояние математики и астрономии и взгляд в будущее. Материалы конференции, посвящённой памяти Насираддина Туси. Баку: Национальная академия наук Азербайджана, Институт математики и механики. 10-12 сентября 2014 года. – с. 338–351.
2. Синкевич Г.И. Эволюция понятия числовой прямой / Г.И. Синкевич // Труды Международной научной конференции «Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство» 24-29 марта, Цахкадзор, 2014. – т. I. – с. 450–455.
3. Зубов В.П. Трактат Брадвардина «О континууме» / В.П. Зубов // Историко-математические исследования. – М.: Наука. – 1960 г. – XIII. – С. 385–440.

4. Зубов В.П. Трактат Николая Орема «О конфигурации качеств» / В.П. Зубов // Историко-математические исследования. – М.: Наука. – 1958 г. – XI. – С. 601–635.
5. Зубов В.П. Жан Буридан и концепции точки в XIV веке / В.П. Зубов // Из истории мировой науки. Избранные труды 1921–1963. СПб: Алетейя. – 2006 г. – С. 295–311.
6. Широков В.С. О «Книге вычислений» Ричарда Суисета / В.С. Широков // Историко-математические исследования. – М.: Наука. – 1976. – XXI. – С. 129–142.
7. Орем Н. Трактат о конфигурации качеств / Н. Орем // Историко-математические исследования. – М.: Наука. – 1958 г. – XI. – С. 636 – 719. С. 637].
8. Широков В.С. Инфинитезимальная концепция Буридана / В.С. Широков // Историко-математические исследования. – М.: Наука. – 1978 г. – XXIII. – С. 250–269].
9. Буридан Ж. Трактат «О точке» / Ж. Буридан // В.П. Зубов. Из истории мировой науки. Избранные труды 1921–1963. СПб: Алетейя. – 2006 г. – С. 311–347.
10. Mioduszewski J. Ciągłość / J. Mioduszewski. – Warszawa.: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogichne – 1996. – 182 s.
11. Синкевич Г.И. Михаэль Штифель (1487-1567) и теоретико-множественные представления XVI века / Г.И. Синкевич // История науки и техники. – 2013. – № 10. – С. 11–16.