Л. В. Грамбовская

Подготовка абитуриентов к ЕГЭ по математике в контексте личностно-ориентированного обучения

Л. В. Грамбовская

ПОДГОТОВКА АБИТУРИЕНТОВ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ В КОНТЕКСТЕ ЛИЧНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ

СПбГАСУ
1832

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

Л. В. Грамбовская

ПОДГОТОВКА АБИТУРИЕНТОВ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ В КОНТЕКСТЕ ЛИЧНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ

Монография

Санкт-Петербург
2021

УДК 51(075.3)

Рецензенты:
канд. пед. наук, доцент *Е. Ю. Лукичева* (Санкт-Петербургская академия постдипломного педагогического образования);
канд. физ.-мат. наук, доцент *Г. И. Синкевич* (Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет)

Грамбовская, Л. В.

Подготовка абитуриентов к ЕГЭ по математике в контексте личностно-ориентированного обучения : монография / Л. В. Грамбовская ; Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет. – Санкт-Петербург : СПбГАСУ, 2021. – 261 с. – Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-9227-1098-5

Помимо необходимого теоретического материала широко представлены разнообразные методы решения уравнений с параметрами не выше первой степени с модулями и уравнений, сводящихся к ним. Упор делается на синтез аналитических и графических методов решения. Многочисленные рисунки, сопровождающие теоретические сведения и развернутые решения заданий, используются в качестве опоры для проведения учебных исследований и дальнейшего построения логических рассуждений. Особое внимание уделено координатно-параметрическому методу решения уравнений с параметрами в сочетании с методом сечений. Также представлены многочисленные задания для самостоятельного решения с ответами.

Монография предназначена для широкого круга читателей и может быть использована при изучении школьного курса математики или при получении дополнительного образования.

Табл. 3. Ил. 109. Библиогр.: 105 назв.

Печатается по решению Научно-технического совета СПбГАСУ

ISBN 978-5-9227-1098-5

Введение

Подготовка абитуриентов к ЕГЭ по математике является одной из важных составляющих школьного математического образования, так как обучение многим, особенно техническим, специальностям требует от выпускников глубоких математических знаний, развитого абстрактно-логического мышления, высокого интеллектуального развития. Кроме того, для поступления на экономические и технические факультеты университетов нашей страны абитуриенты предоставляют результаты сдачи ЕГЭ по профильной математике. Однако далеко не все старшеклассники обучаются в классах с углубленным изучением предмета. В результате перед выпускниками школы остро стоит проблема самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике.

Среди заданий второй части экзаменационной работы выделяются задачи с параметрами. Они занимают особую нишу в школьном математическом образовании и являются наиболее сложными для восприятия и усвоения. Сложность заключается в том, что тема «Параметры» встречается по всему курсу математики, задания этого типа очень разнообразны, времени в школьной программе отводится для их усвоения очень мало, т. е. можно констатировать, что учащиеся знакомятся с параметрами на школьных занятиях поверхностно. При этом решение задач по этой теме требует глубоких знаний предмета, определенных алгоритмов решения стандартных задач с параметрами, навыков исследовательской деятельности, творческого подхода к поиску решения. Перечисленные умения тесно связаны с личностными качествами учащихся, и их формирование отвечает идеям личностно-ориентированного обучения, математики в частности.

Монография посвящена подготовке абитуриентов к ЕГЭ по математике на базе решения уравнений с параметрами в контексте личностно-ориентированного обучения; рассматриваются разные методы решения линейных уравнений с параметрами, уравнений, сводящихся к линейным, в зависимости от вида уравнений; представлен большой массив примеров с развернутыми решениями и задания с ответами для самостоятельной работы.

Глава 1. МЕТОДОЛОГИЯ ПОДГОТОВКИ АБИТУРИЕНТОВ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ В КОНТЕКСТЕ ЛИЧНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ

1.1. Обзор научно-методической литературы, посвященной обучению абитуриентов навыкам решения задач с параметрами

Задания с параметрами занимали и занимают сейчас отдельную нишу в школьном математическом образовании. Можно сказать, что за последние тридцать лет задания такого вида переместились из разряда «сложных» для вступительных экзаменов, в разряд «обязательных» к изучению в школе, и они по-прежнему присутствуют в материалах выпускных экзаменов. Невозможно отобразить в школьных учебниках по математике все разнообразие заданий с параметрами, однако их удельный вес стал значительно больше. Работая с различными школьными учебно-методическими комплексами по алгебре, можно увидеть некую систему в изучении заданий этого вида.

Так, в дидактических материалах М. К. Потапова и А. В. Шевкина к учебникам по алгебре, начиная с восьмого класса, вводятся темы «Линейные уравнения с параметром» [70, с. 21–22], «Квадратные уравнения с параметром» [70, с. 23–24], «Системы линейных уравнений с параметром» [70, с. 42–44], где раскрываются методы решения данных видов уравнений и систем. В этих же пособиях предлагаются самостоятельные и контрольные работы, содержащие задания с параметрами. в дидактических материалах к учебнику за девятый класс [71] продолжается рассмотрение линейных неравенств с параметром [71, с. 6–8], систем линейных неравенств с параметром [71, с. 9–14], неравенств второй степени с параметром [71, с. 15–17]; предлагаются также самостоятельные и контрольные работы, содержащие такие задания. В дидактических материалах к учебникам за десятый класс [67, с. 19–20, с. 82–83] продолжается рассмотрение уравнений, неравенств и их систем на базе квадратичной функции, алгебраические методы решения заданий такого типа. В дидактических материалах к учебнику за одиннадцатый класс [68, с. 106] рассматриваются более сложные уравнения и неравенства, содержащие параметр. При этом сами учебники не содержат задач такого типа.

Предлагаемая в этих пособиях система заданий с параметром интересна для абитуриентов, так как является пропедевтической для освоения более сложных заданий на эту тематику, помогает формированию у учащихся аналитических методов решения. При этом рассматриваемые задачи не отражают сложность и разнообразие даже линейных уравнений с параметром, тем более таких, которые могут быть предложены на экзамене.

На сегодняшний день для самостоятельной подготовки к сдаче ЕГЭ абитуриент может найти большое количество разнообразных пособий, содержащих задания с параметрами и методами их решения. Как правило, такие пособия содержат задания разного уровня сложности, от линейных уравнений до задач более сложных, например содержащих трансцендентные функции, радикалы и др. По такому же принципу построены пособия таких авторов, как Г. В. Апостолова [2], В. С. Высоцкий [10], П. И. Горнштейн [12], Г. В. Дорофеев, В. В. Затакавай [21], Л. С. Заслонкина [31], В. В. Локоть [40], П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков [81], Е. М. Родионов [77], Г. А. Ястребинецкий [104], В. В. Ясинский [103]. В них система заданий построена от линейных, дробно-линейных уравнений с параметром до более сложных уравнений и неравенств. Причем упор делается именно на решении более сложных заданий, линейные же уравнения рассматриваются только вида $ax = b$. Отметим пособие [95], в котором автор предлагает к каждому решенному примеру с параметром строить «графическую иллюстрацию исследования уравнения с параметром» [95, с. 9], под которой он подразумевает нанесение корней уравнения на параметрическую ось.

В пособиях таких авторов, как В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич [1], В. Г. Балан, В. И. Лавренюк, Л. И. Шарова [3], М. К. Потапов, С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко [72], А. И. Козко, В. Г. Чирский [33], С. А. Шестаков, Е. В. Юрченко [96], посвященных заданиям с параметрами, линейные уравнения вообще не рассматриваются.

Можно отметить пособия С. И. Колесниковой [34], Е. Г. Конновой [36], В. К. Репета [76], в которых помимо сложных уравнений и неравенств с параметрами рассматриваются линейные уравнения с модулем относительно переменной и параметра. Так, в [76] представлены отдельные линейные уравнения, содержащие три выражения под знаком модуля, решенные графическим методом с использованием системе координат aOx. В [34] линейные уравнения с параметрами и модулями представлены в виде одного конкретного примера со сложным графиком, решенного разными аналитическими методами с графической опорой на систему координат xOy. В пособии [36] решение дробно-линейных уравнений с параметром представлено на нескольких примерах, решенных двумя способами, аналитическим и графическим методами, с использованием координатной плоскости aOx.

Ю. В. Садовничий [79] решение линейных уравнений с параметрами и модулями относит к «логическим задачам». В пособии представлены аналитические методы решения таких заданий, причем дробно-рациональные неравенства, линейные уравнения с параметрами и модулями, неравенства, содержащие иррациональность, автор объединяет под одним параграфом, т. е. однотипных заданий мало.

Отдельно остановимся на работе авторов А. В. Прус, В. А. Швец [73]. В этом пособии изложена методическая система решения уравнений и неравенств с параметрами от линейных до трансцендентных, подобран большой массив заданий, представлены развернутые решения и задания для самостоятельного изучения. Особенно интересным является предложенная методистами схема решения простейших линейных уравнений с параметрами. Эту схему мы будем использовать в дальнейшем. Отдельный параграф в [73] посвящен методам решения уравнений и неравенств с параметрами, содержащими выражения под знаком модуля. Аналитические и графические методы решения уравнений этого вида рассматриваются на небольшом количестве примеров, в основном содержащих квадратичные функции, иррациональности. При выборе метода решения авторы делают акцент на подборе системы координат, подходящей для того или иного вида примеров.

Очень интересным, на наш взгляд, является пособие В. П. Моденова [49], в котором автор рассматривает так называемый координатно-параметрический метод решения уравнений и неравенств с параметрами. По примеру декартовой системы координат В. П. Моденов вводит понятия координатно-параметрической плоскости (aOx), координатной прямой (оси переменной Ox) и параметрической прямой (оси параметра Oa). Построение графического образа уравнения (неравенства) с параметром в системе координат aOx и дальнейшее исследование количества и вида его решений автор называет координатно-параметрическим методом решения или КП-методом. С точки зрения В. П. Моденова, КП-метод основан на нахождении множества всех точек КП-плоскости, значения координаты x и параметра а каждой из которых удовлетворяют заданному условию. Если указанное множество точек найдено, то можно каждому допустимому значению параметра $a = \text{const}$ поставить в соответствие координаты x точек этого множества, дающее искомое решение задачи, или указать те значения параметра, при которых задача не имеет решения [49, с. 6]. Данный метод будет широко представлен в данной монографии.

Остановимся также на диссертационных исследованиях, посвященных методике обучения решению задач с параметрами. В докторской диссертации Горбачева В. И. [11] решение уравнений (неравенств) с параметрами рассматривается в контексте технологии организации развивающего обучения в курсе алгебры и начала анализа средней школы. Автор понимает развивающее обучение как развитие теоретического мышления школьников в процессе формирования умений решать задачи с параметрами разного уровня сложности. В. И. Горбачев отмечает, что обучение учащихся умению решать задачи с параметрами традиционно строится на конкретных примерах. На основании рассмотрения готовых решений задач определенного вида учащийся должен сделать теоретическое обобщение того, как решаются такие задачи, т. е. идет обучение от конкретного (эмпирического) вида мышления к абстрактному (теоретическому). Автор предлагает другой подход к обучению, а именно восхождение от абстрактного к конкретному. Это восхождение В. И. Горбачев [11] обеспечивает за счет обучения учащихся умению решать задачи с параметрами на основе использования логических структур общего аналитического решения уравнений (неравенств) разного уровня сложности. В диссертационном исследовании автором разработаны логические структуры решения уравнений (неравенств) степени не выше первой, не выше второй, содержащих радикалы, логарифмическую функцию.

Для нас интересной является методика обучения решению уравнений не выше первой степени (для удобства назовем их линейными относительно переменной), разработанная В. И. Горбачевым. Логическая структура общего аналитического решения линейных уравнений с параметрами вида $F(a; x) = 0$ включает ориентировочную основу учебных действий в виде: постановки задачи; нахождения области допустимых значений параметра a, входящих в область допустимых значений уравнения $F(a; x) = 0$; нахождения граничных значений параметра a, проходя через которые уравнение меняет количество решений; исследования исходного уравнения $F(a; x) = 0$ при граничных значениях параметра; построения общего решения уравнения на частичных областях; построения модели решения на параметрической оси Oa; классификации частных решений [11, с. 213].

В. И. Горбачев также классифицирует возможные виды частных решений уравнений не выше первой степени: исходное уравнение не имеет смысла, не имеет решений, имеет бесконечное множество решений, имеет единственное решение [11, с. 214]. Мы будем придерживаться данной логической структуры решения линейного уравнения с параметром; также возьмем на вооружение классификацию частных решений простейшего линейного уравнения с параметром.

В диссертационном исследовании В. В. Мирошина [48] обучение школьников умению решать задачи с параметрами рассматривается в контексте формирования содержательно-методической линии задач с параметрами как «естественной и системной составляющей части современных школьных курсов алгебры, алгебры и начала анализа» [48, с. 7]. С точки зрения автора, содержательно-методическая линия задач с параметрами должна базироваться на принципах обратной связи, под которой Мирошин В. В. понимает «постоянное обращение к ранее использованным методам, наряду с введением новых» [48, с 29]. В. В. Мирошин разработал методику развертывания содержательно-методической линии задач с параметрами при изучении тем «Линейная функция и ее график» и «Квадратичная функция и ее график», а также составил систему задач, которая, по мнению автора, формирует учебные навыки и способствует развитию системного мышления.

Автор разворачивает методику изучения простейших линейных уравнений с параметром вида $Ax = B$, заданий с параметром, содержащих квадратичную функцию, линейных и квадратичных неравенств с параметром, которые могут быть легко встроены в школьный курс математики. Система заданий построена так, чтобы у ученика сформировались понятия: линейное уравнение с параметром, общее решение линейного уравнения с параметром, частные решения уравнения, схема решения уравнений такого вида; обобщенное понятие свойств линейной функции и пр.

Предложенная система заданий содержит помимо простейших линейных уравнений с параметром дробно-линейные уравнения с параметром, линейные уравнения с параметром и модулем, линейные неравенства с параметром, задания с параметром, содержащие квадратичную функцию. Если решение дробно-линейных уравнений можно свести к решению простейших линейных уравнений с особыми условиями, которые нужно исследовать, то решение уравнений с параметром, содержащих выражения под знаком модуля, имеет свою специфику, которая не рассматривается в работе. В данной монографии методам решения уравнений с параметром и модулями не выше первой степени уделено особое внимание. В. В. Мирошин говорит о том, что решение уравнения с параметром сродни исследованию, но как учебный эксперимент решение задач такого вида не рассматривает. В нашей же работе исследовательская деятельность абитуриента рассматривается как ведущая при решении задач с параметрами.

В диссертации Н. В. Толпекиной [86] решение уравнений и неравенств с параметрами представлено с точки зрения организации учебных исследований, под которыми автор понимает «такой вид познавательной деятельности учащихся, который способствует формированию умений: добывать новые предметные знания, приемы, способы действий; самостоятельно организовывать поиск; достигать поставленных целей обучения; формировать мыслительные операции как аналогия, классификация, обобщение и т. д.» [86, с. 30].

Н. В. Толпекина разработала теоретические и методические основы учебных исследований (аналитических и графических) в процессе решения уравнений и неравенств с параметрами; дидактические материалы для учебных исследований; исследовательские карты с подробными пошаговыми эвристиками, служащие основой для формирования процессуального компонента организации и поведения учебного исследования [86, с. 10]. Такие карты составлены для линейного уравнения, линейного неравенства, уравнений и неравенств, содержащих квадратичную функцию, и некоторые другие виды заданий.

Для нас интересной является разработанная Н. В. Толпекиной карта для исследования решений линейного уравнения с параметром вида $Ax = B$. Данная карта содержит эвристику-ориентир, используя которую ученик может решить уравнение аналитическим методом. Пример исследовательской карты представлен и для линейного уравнения с параметром и выражениями, стоящими под знаком модуля. Если простейшее линейное уравнение с параметром абитуриент может с легкостью самостоятельно решить, используя предложенную карту, то применение таковой для более сложных уравнений вызовет у учащихся значительные трудности.

Подводя итог, можно сказать, что, несмотря на большое количество разнообразной литературы, связанной с решением заданий с параметрами, проблема подготовки абитуриентов по этой теме остается актуальной хотя бы потому, что большинство авторов стараются охватить большой класс разнообразных заданий – от линейных уравнений и неравенств до более сложных. При этом отсутствуют пособия, содержащие методику обучения решению заданий определенного вида, например линейных уравнений с параметрами и более сложных уравнений, решение которых можно свести к линейным. В большинстве пособий линейные уравнения с параметрами сводятся к простейшим вида $Ax = B$, решаемым аналитическими методами. Если рассматриваются уравнения с параметрами, содержащие линейные выражения под знаком модуля, то авторы рассматривают какой-то один вид таких уравнений, и решения, как правило, представлены тоже одного вида.

Данная монография содержит методическую систему решения уравнений с параметрами и модулями от простых до материалов, представленных на ЕГЭ по профильной математике.

1.2. Психолого-педагогические аспекты подготовки абитуриентов к ЕГЭ по математике в контексте личностно-ориентированного обучения

Проблема личностно-ориентированного обучения математике в средней школе достаточно широко и полно освещена в педагогической, психологической, научной, методической литературе и сегодня является актуальной для образовательного пространства Российской Федерации.

Личностно-ориентированный подход, как и сама личность, не может быть сведен к одному-единственному способу его понимания. Поэтому есть все основания вести речь о существовании различных концепций этого подхода. Остановимся на более существенных для нашего исследования.

Методологические основы парадигмы личностно-ориентированного образования с позиций философии разрабатываются С. И. Подмазиним, утверждающим, что «личность всегда должна рассматриваться как цель и никогда как средство» [64, с. 140]. Следовательно, важным моментом подготовки абитуриентов к ЕГЭ по математике в контексте личностно-ориентированного обучения является признание ученика и его личности субъектом и целью образовательного процесса.

Научно-методические основы личностно-ориентированной педагогики с культурологических позиций разрабатываются коллективом ученых под руководством Е. В. Бондаревской [5–6]. Интересным является ряд существенных требований, которые выдвигает автор к технологиям личностно-ориентированного образования: диалогичность, деятельностно-творческий характер, направленность на поддержку индивидуального развития ребенка, предоставление ему необходимого пространства свободы для принятия самостоятельных решений, творчества, выбора содержания и способов учения и поведения. Утверждается, что любая технология может стать личностно-ориентированной, если она отвечает данным требованиям [5].

В. В. Сериков рассматривает личностно-ориентированный подход в рамках предмета дидактики, включая категорию целей, содержания образования, методов обучения, деятельности преподавателя и ученика, критериев эффективного учебного процесса. Мы поддерживаем мнение автора относительно того, что «образование, ориентированное на личностную сферу, предполагает:

особый вид целей, отражающих целостное развитие личности, а не только ее знаниевую образованность; качественно новую личностно-ориентированную конструкцию содержания, отражающую специфическую природу личностного опыта, его несводимость к деятельностному компоненту; специальные технологии, направленные не на „передачу" содержания, а на конструирование ситуаций, требующих личностного развития воспитанника» [85, с. 122].

Личностный опыт характеризуется, по мнению В. В. Серикова, специфическими способами освоения действительности, предусматривающими вхождения субъекта в личностно-развивающую образовательную ситуацию, требующую проявления личностной позиции обучаемого и играющую смыслообразующую роль по отношению к другим компонентам содержания образования [85, с. 35].

Г. К. Селевко [82–83] считает, что личностно-ориентированная технология обучения вбирает все лучшие сущностные качества развивающего обучения и дополняет его некоторыми важными особенностями. Так, ученый отмечает, что «в деятельности учащегося присутствуют не только познавательные потребности, но и такие, что касаются саморазвития личности, а именно: потребность в самоутверждении, самовыражении, защищенности, самоактуализации» [82, с. 212]. Основной мотивацией учебной деятельности по данной технологии является мотивация самосовершенствования личности [82, с. 214], которую мы тоже будем учитывать в своей методике подготовки абитуриентов по математике.

Особое внимание ученый уделяет именно развитию личности ученика, под которым он понимает «процесс физического и психического изменения индивида во времени, направленный на совершенствование, переход в любых его свойствах и параметрах от меньшего к большему, от простого к сложному, от низшего к высшему» [82, с. 181]. Мы тоже считаем развитие личности приоритетным в личностно-ориентированном учебном процессе.

А. А. Плигин в своей монографии [63] под личностно-ориентированным образованием понимает тип образовательного процесса, в котором личности ученика и учителя являются субъектами этого образовательного процесса. Центром новой дидактики должно стать развитие способностей и познавательных стратегий, ценностных ориентаций личностных смыслов и Я-концепций. Именно такая дидактика, по мнению автора, сделает образование личностно-ориентированным [63, с. 16].

Поддерживая тезис о развитии познавательных стратегий, М. А. Холодная [89–90] подчеркивает важность формирования персонального познавательного стиля каждого ученика, так как это является одним из аспектов интеллектуального воспитания учащихся в условиях современной школы. Значит, личностно-ориентированный учебный процесс должен быть построен таким образом и иметь в своем арсенале такие средства, чтобы предоставлять возможность развития и обогащения различных познавательных стилей освоения действительности каждого абитуриента.

Одним из путей реализации личностно-ориентированной педагогики, интеграции ее в мировое образовательное пространство является ориентация учебных программ на компетентностный подход и создание эффективных механизмов его внедрения, поэтому остановимся на некоторых аспектах этого подхода, которые являются интересными для нашего исследования. С учетом работ И. А. Зимней [32], А. В. Хуторского [92], авторского коллектива под руководством А. П. Тряпицыной [35] и др. сущность компетентностного подхода к обучению, по нашему мнению, заключается в формулировании общих целей образования (которые должны достигаться на любом предметном содержании, в нашем случае – на предметном содержании математики) в виде набора компетенций и конкретизирующих их обобщенных задач возникающих, прежде всего в реальной социальной практике. Планируемым результатом обучения должна стать способность (умение) старшеклассников решать эти задачи на основе имеющихся у них знаний и умений. Как следствие, предметные знания (умения) должны приобрести ярко выраженный конкретно-ситуативный характер. В нашем случае это умения и навыки решения разнообразных задач, содержащих параметры, включая материалы Единого государственного экзамена.

Не вдаваясь в подробный анализ различных подходов к определению понятия «компетентность», следует особо отметить, что всем им свойственно выделение в качестве основной характеристики компетентности деятельностной составляющей. Так, компетентность может формироваться, проявляться и быть оценена в процессе осуществления определенной деятельности. При этом система знаний, умений и навыков, на формирование которых традиционно направлен процесс математической подготовки абитуриентов, является неотъемлемой составляющей компетентности, однако не исчерпывает ее.

А. В. Хуторской также рассматривает различия между традиционным и личностно-ориентированным содержанием образования. Так, по мнению автора, «традиционно в содержание образования включают первоначально отчужденный от учеников общественно-исторический опыт человечества, который передается им для усвоения. в образовании личностно-ориентированного типа представления относительно содержания образования меняется. в зоне первоочередного внимания находится деятельность самого ученика, его внутреннее образовательное приращение и развитие. Образование в этом случае – это не столько «передача» ученику готовых знаний, сколько создание, проявление его в самом себе, формирование себя» [92, с. 69].

Ключевыми терминами в этом случае являются «образ» и «среда». «Ученик изменяется и развивается в направлении определенного образа; внешнее содержание образования в этом случае воспринимается им как среда для внутренних образовательных изменений. Личностное новообразование ученика получает функцию внутреннего содержания образования, создаваемого в направлении запланированного образа человека. Традиционное содержание образования оказывается не предметом усвоения, а внешней составляющей образования, получающей функции среды. С точки зрения личностно-ориентированного обучения никакая внешне предлагаемая информация не может быть перенесена внутрь его, если у школьника нет соответствующей мотивации и личностно значимых образовательных процессов» [92, с. 69].

Содержание образования, которое понимается как среда, предполагает другой способ конструирования учебных предметов. Итак, понятие образовательной среды является важным для характеристики подготовки абитуриентов по математике в контексте личностно-ориентированного обучения, поэтому будем использовать его в нашей работе.

К личностно-ориентированным подходам можно отнести и личностно-деятельностный подход И. А. Зимней [32], который автор истолковывает как единство его личностного и деятельностного компонентов [32, с. 75]. Личностно-деятельностный подход в своем личностном компоненте предполагает, что в центре обучения находится сам ученик – его мотивы, цели, его неповторимый психический тип. Этот тезис осуществляется через содержание и форму самих учебных заданий, характер общения с учеником [32, с. 76], на что мы будем обязательно обращать внимание в нашей работе. Деятельностный компонент, по мнению И. А. Зимней, в общепедагогическом плане опирается на положение о субъект-субъектных отношениях учителя и ученика; в общепсихологическом – на теорию деятельности А. М. Леонтьева [39], В. А. Петровского [62], С. Л. Рубинштейна [78], теорию учебной деятельности Д. Б. Эльконина [97–99], В. В. Давыдова [18–19] и др. Эти положения тоже воспринимаем как базовые для организации процесса подготовки абитуриентов по математике в контексте личностно-ориентированного обучения.

И. А. Зимняя отмечает, что личностно-деятельностный подход, предполагая организацию самого процесса обучения как организацию (и управление) учебной деятельности учащихся, означает переориентацию этого процесса на постановку и решение ими самими конкретных учебных задач (познавательных, исследовательских, преобразующих, проектных и т. п.). При личностно-ориентированном подходе, отмечает автор, педагогу предстоит определить номенклатуру учебных задач и действий, их иерархию, форму представления и организовать выполнение этих действий учащимися при условии овладения ими ориентировочной основы действий и алгоритмом их выполнения [32, с. 86]. Эти положения также рассматриваем как базовые.

На наш взгляд, на сегодня наиболее теоретически разработана личностно-ориентированная модель обучения, созданная коллективом ученых под руководством И. С. Якиманской [100–102], которая получила название «субъектно-личностный подход к обучению». Данная концепция является интересной для нашей работы еще и потому, что автор концепции рассматривает личностно-ориентированный образовательный процесс как систему построения взаимосвязи обучения и учения (последнее рассматривается автором как особая форма индивидуальной деятельности ученика), вместе обеспечивающие развитие личности как индивидуальности. Ее содержание, методы, приемы, техники направлены главным образом на раскрытие и использование субъектного опыта каждого ученика и подчинены становлению личностно значимых способов познания путем организации целостной учебной (познавательной) деятельности [101, с. 17].

Обучение не столько задает вектор развития, сколько создает для этого все необходимые условия. Тем самым существенно меняется функция обучения. Развитие способностей ученика – основная задача личностно-ориентированной педагогики [101, с. 14]. Для построения методики подготовки абитуриентов по математике в контексте личностно-ориентированного обучения, по нашему мнению, важным является положение И. С. Якиманской относительно того, что «эффект создания и управления личностно-ориентированным обучением зависит не только от организации, но и в значительной степени от индивидуальных возможностей ученика как основного субъекта образовательного процесса. Это делает само проектирование гибким, вариативным, многофакторным» [101, с. 15]. Реализация концепции подготовки абитуриентов по математике в контексте личностно-ориентированного обучения требует разработки такого содержания образования, которое включает не только научные знания, но и цель познания, т. е. приемы и методы познания. По мнению И. С. Якиманской, только при наличии дидактического обеспечения, реализующего принцип субъектности образования, можно говорить о построении личностно-ориентированного процесса [101, с. 35]. В работах также формулируются требования к разработке дидактического обеспечения личностно-ориентированного обучения, на которые будем опираться в нашей работе. Данное исследование ориентировано именно на создание личностно-ориентированных дидактических материалов и методики работы с ними.

В отношении математического образования отметим, что с конца XX в. начинаются активные попытки внедрения личностно-ориентированных технологий обучения. Так, научными школами Е. Г. Гельфман и М. А. Холодной [90] разрабатывается концепция обучения математике на деятельностной основе с учетом психологических особенностей учащихся. Эта концепция получила название «Математика. Психология. Интеллект», ключевым элементом которой является «ментальный опыт» ученика [90, с. 362]. Данный проект содержит в себе учебный курс математики 5–9-х классов, комплект методического обеспечения этого курса, средства его контроля.

Над концепцией развития математического образования «Математика для каждого» работает коллектив ученых под руководством Г. В. Дорофеева [23–24]. Ведущей идеей данной концепции является гуманизация и гуманитаризация математического образования, воплощение которых автор усматривает в «ориентации курса математики на личность ученика, развитие его духовной сферы» [23, с. 10]. Провозглашается принцип приоритета развивающей функции в обучении математике, с точки зрения которой конкретные математические знания в «Математике для каждого» являются не столько целью образования, сколько основой для организации полноценной в интеллектуальном отношении деятельности учащихся, являющейся более значимой для формирования личности учащегося, чем сами конкретные математические знания, которые являются основой этой деятельности [23, с. 14].

На сегодня, по нашему мнению, наиболее полно реализован на практике личностно-ориентированный подход к обучению, разработанный И. С. Якиманской. Так, в Российской Федерации в этом русле выполнен ряд диссертационных исследований и написаны учебники по методике обучения математике. Например, коллективом ученых под руководством А. В. Гусева в соавторстве с И. С. Якиманской выпущено пособие по методике обучения геометрии [101], в котором отмечается, что «развитие психических процессов зависит, безусловно, от содержания учебного материала, но однозначно им не определяется. Если учитель ставит перед собой задачу научить чему-либо, ему необходимо для этого подобрать соответствующий материал и обеспечить его усвоение. Если учитель ставит задачу развить ученика, то он должен разбираться в структуре интеллектуальной деятельности, специфической для математики, уметь ее выявлять, корректировать, строить» [101, с. 86]. «Однако это особая задача, к решению которой современного учителя математики пока специально не готовят» [47, с. 87].

Для нашей работы особенно ценно такое мнение О. В. Гусева: «Выявление интеллектуальной деятельности, которое обеспечивает эффективное овладение математикой (ее описание, оценка, формирование в ходе обучения), ставит перед дидактикой, методикой, самим учителем принципиально новую задачу – создание дидактических материалов особого типа. Но здесь знания самой математики недостаточно, необходимо использование психологии, что обеспечивает описание интеллектуальной деятельности, специфической для математики. Только сочетание математической и психологической компетентности учителя обеспечит не на словах, а на деле реализацию личностно-ориентированного подхода к обучению» [47, с. 87]. Поэтому, как уже отмечалось, создание специальных дидактических материалов на базе психологии с описанием содержания предметных знаний и описанием интеллектуальной деятельности по математике считаем первоочередной задачей нашего исследования.

Реализуя данные идеи в школьной практике, Н. С. Подходова [47, с. 234] разработала методическую систему личностно-ориентированного обучения геометрии в начальной школе и пропедевтического курса математики для 5–6-х классов общеобразовательной школы. Данная концепция является интересной для нашего исследования еще и потому, что основную задачу учителя, работающего в личностно-ориентированной педагогике, автор рассматривает так: «Помочь ученику научиться связывать научное понятие с образами, входящими в его личностный опыт, а в случае их отсутствия – организовать условия для их образования» [47, с. 143].

К личностно-ориентированной методике обучения математике можно отнести исследование, выполненное коллективом методистов под руководством Н. Л. Стефановной и Н. С. Подходовой [46]. Остановимся на некоторых аспектах этой работы, так как считаем их важными для построения модели методики подготовки абитуриентов по математике в контексте личностно-ориентированного обучения. По мнению авторов концепции, основной и очень важной задачей школы является раскрытие индивидуальности учащегося: необходимо помочь ученику проявиться, развиться, устоять, обрести избирательность к различным социальным воздействиям. Для этого нужна не изолированная, а единая для всех, разнообразная учебная среда, где любой ученик мог бы проявить себя, не боясь быть непринятым. При этом главным является не объем знаний, а соединение последних с личностными качествами, умение самостоятельно распоряжаться своими знаниями [46, с. 21]. Поэтому создание такой разнообразной учебной среды будем считать одной из приоритетных задач нашего исследования.

Кроме того, в данной работе отмечается, что «в современной системе образования доминирует трактовка понятия обучение математике как „обучение математической деятельности“, которое опирается на основные положения психологии: обучение и развитие ученика происходят в процессе целенаправленной учебной деятельности, причем развивающие цели считаются приоритетными над знаниевыми. В традиционной же системе обучения математике основной задачей является усвоение знаний, умений и навыков» [46, с. 93]. Исходя из данной концепции, можно сказать, что использование субъектного опыта учащегося касается не только содержательного аспекта, но и процессуального, что связано с собственными способами восприятия и обработки учебной информации учеником. Отторжение собственных стратегий учащихся постепенно приводит их к мысли об оторванности математики от реальной жизни, в результате чего у них не проявляется критичность мышления [46, с. 94].

Авторы различных концепций личностно-ориентированного обучения так или иначе обращаются к таким психологическим понятиям, как «личность», «индивидуальность», «индивид» и т. п. Некоторые ученые ведут речь об индивидуальных особенностях, другие – о личностных особенностях, рассматриваются также и такие понятия, как «субъектность», «структура личности», «целостная личность» и т. п. Поэтому мы считаем необходимым рассмотреть эти понятия в нашем исследовании и определиться относительно их толкования.

В целом, по мнению Б. Г. Ананьева, единство биологического и социального в человеке обеспечивается путем сочетания таких макрохарактеристик, как индивид, личность, субъект и индивидуальность.

Субъектность является важной характеристикой личности человека, и для того, чтобы сделать учебный процесс личностно-ориентированным, необходимо конструировать его таким образом, чтобы не только учитель, но и ученик стал действительно субъектом познания, субъектом обучения и учения (деятельности), субъектом общения и на основании этого субъектом собственной жизни.

Рассмотрим теперь такое понятие, как «личность», которое, по мнению многих ученых, является едва ли не самой сложной природной системой с присущей ей собственной неповторимой совокупностью определенных качеств. Модель личности можно считать средством научного познания и самопознания человека [28, с. 86].

В философии под личностью понимают и устойчивую систему качеств, характеризующих человека как члена общества и, собственно, как индивидуального носителя данных черт.

В психологии под личностью обычно понимают некоторое ядро, «интегрирующее начало», связывающее воедино разные психические процессы индивида, придавая его поведению необходимую последовательность и неизменность. Психология личности помогает пониманию уникальности и сложности функционирования целостного человека в реальном мире.

На сегодня в психологии личности стали популярными модели развития и самоактуализации. В работах Б. Д. Эльконина [98], Г. Крайг [37], Т. Д. Марцинковской [74], Н. Ньюкомб [59], Л. Первина, А. Джона [61], А. А. Реана [75], Л. Хьелла, Д. Зилгера [94] и др. понятие «развитие» определяется как «регулярные и относительно устойчивые количественные и качественные изменения в организме, мыслительных процессах, эмоциях, формах социального взаимодействия и других видах поведения» [59, с. 23]. Развитие предполагает постепенное усовершенствование или повышение степени сложности [91, с. 114]. Развитие учащегося – это частный аспект человеческого развития [37, с. 16]. По принципу развития психика постоянно изменяется вместе со средой и служит для адаптации организма к нему [74, с. 27].

Так как одним из ключевых понятий теорий личностно-ориентированного обучения является понятие личности учащегося, то за определение возьмем трактовку С. Д. Максименко [29]: «Личность – это целостность, способная к саморазвитию, само-определению, сознательной предметной деятельности, поведения и саморегуляции и имеет уникальный и неповторимый внутренний мир».

Любая личность характеризуется ее структурой (выбором наиболее значимых компонентов и установления их иерархии). Учитывая то, что любая модель структуры личности является гипотетической конструкцией, которая описывает только часть определенной действительности, а в нашем исследовании частью такой действительности является подготовка абитуриентов по математике, то интересным именно для нас является модель структуры личности, предложенная В. С. Ледневым. Автор рассматривает три основные группы компонентов структуры личности: функциональные механизмы психики, опыт и типологические свойства [38, с. 8].

К функциональным механизмам психики В. С. Леднев относит механизмы восприятия информации; мышление, осуществляющее преобразование информации на нескольких уровнях; память; высшие уровни саморегуляции, включающие механизмы эмоций, внимания, воли и т. п. Опыт личности, по мнению автора, состоит из двух компонентов. Первый – это знания, умения, навыки; второй – направленность личности, познавательные, эстетические, коммуникативные, физические качества учащегося. К типологическим свойствам личности ученый относит характер, темперамент, способности, онтогенетические особенности развития. Причем рассмотренные компоненты структуры не являются независимыми и отделенными друг от друга [38, с. 12]. Автор замечает, что наряду с предложенными основными подструктурами личности могут быть выделены и другие подструктуры.

Абитуриенты относятся к разряду старших подростков, для этого возраста характерными являются становление учебной деятельности на уровне формальных операций, интерес к самой деятельности, а не только к ее конечному результату. Исходя из этого, В. В. Орлов [60] подчеркивает, что «усвоение способов и приемов учебной деятельности должно стать самостоятельной учебной задачей», что является, по нашему мнению, особенно актуальным для подготовки абитуриентов к ЕГЭ по математике в контексте личностно-ориентированного обучения.

Г. С. Селевко считает, что для формирования учебной деятельности учащегося старшей школы большое значение приобретают мотивы интеллектуально-познавательного плана, которые являются осознанными, реально действующими и понятными для него. Когнитивное (познавательное) развитие ученика, а соответственно, и развитие его интеллекта включают в себя как накопление знаний, так и развитие компонентов обработки информации. Г. Крайг подчеркивает, что решение проблем происходит более эффективно в том случае, когда у человека есть большой запас соответствующих сведений. У людей, владеющих более эффективными методами хранения и извлечения знаний, формируются более полные базы знаний [37, с. 589].

Проведя анализ научно-методической, психологической, педагогической литературы, в нашей работе будем исходить из следующего.

Под личностно-ориентированным обучением будем понимать образовательный процесс, направленный на развитие и саморазвитие личности ученика, исходя из выявления его индивидуальных особенностей как субъекта познания, предметной деятельности, общения.

Личностно-ориентированный подход к обучению – это такая организация процесса обучения, в основе которой лежит приоритет индивидуальности и самоценности старшеклассника, уникальности его субъективного опыта, ученик становится ценностью с точки зрения воспроизведения общественно-исторического опыта человечества.

Под подготовкой абитуриентов к ЕГЭ по математике в контексте личностно-ориентированного обучения будем понимать такую организацию образовательного процесса, когда имеет место личностно-ориентированный подход к обучению.

В нашей работе под обучением (по А. В. Хуторскому) понимаем совместную деятельность учащегося и учителя, которая направлена на индивидуальную самореализацию ученика и развитие его личностных качеств в ходе освоения изучаемых дисциплин [92, с. 21]. Под учением (по А. В. Скрипченко) – активную целенаправленную деятельность ученика, которая заключается в усвоении знаний, умений, навыков, а также способов их обретения, форм поведения учащегося и видов его деятельности. Это прежде всего личностное присвоение знаний, умений, навыков, в процессе которого заданное содержание знаний осваивается через индивидуальный опыт ученика, его потребности и мотивационную сферу.

Наряду с обучением и воспитанием особое значение для личностно-ориентированного учебного процесса приобретает целенаправленное развитие личности ученика и запуск механизмов ее (личности) саморазвития. Все эти процессы тесно взаимосвязаны и выступают как целостное образование, поэтому в парадигме личностно-ориентированной педагогики образование рассматривается как многоуровневое пространство, которое включает в себя процессы обучения и учения, воспитания и самовоспитания, развития и саморазвития, взросления и социализации, однако определяющим является развитие, которое специально организованное обучение только корректирует. И чем богаче и разнообразнее это образовательное пространство (образовательная среда), тем полноценнее будут происходить становление и развитие личности учащегося, тем легче раскрыть индивидуальные возможности каждого старшеклассника.

В данной работе будем рассматривать понятия «личностный опыт», «ментальный опыт» и «субъектный опыт» как синонимы и в дальнейшем использовать преимущественно термин «субъектный опыт», под которым вместе с И. С. Якиманской, В. В. Орловым и др. будем понимать «жизненный опыт конкретного ученика, который включает различные формы и способы деятельности, источником которого является биография учащегося, результаты его повседневной жизнедеятельности, взаимодействие с миром вещей и людей, результаты обучения, в том числе и специально организованного» [60, с. 13].

В содержание субъектного опыта (по И. С. Якиманской) включаем: предметы, представления, понятия; операции, приемы, правила выполнения действий (умственных и практических); эмоциональные коды (личностные смыслы, установки, стереотипы) [102, с. 76]. Для нашего исследования особенно ценным является тезис И. С. Якиманской [102] относительно того, что «развитие ученика как личности (его социализация) идет не только путем овладения им нормативной деятельностью, но и через постоянное обогащение, преобразование субъектного опыта как важного источника собственного развития» [102, с. 31].

Кроме того, субъектный опыт делает всех учеников разными, неповторимыми. Цель личностно-ориентированного обучения – максимально раскрыть эти отличия, а не нивелировать их [102, с. 76]. Поэтому выявление, структурирование, обогащение и дальнейшее использование субъектного опыта в личностно-ориентированном учебном процессе является одним из центральных положений в нашем исследовании.

Основываясь на проведенном анализе научно-методической литературы, выделим такие основные характеристики подготовки абитуриентов к ЕГЭ по математике в контексте личностно-ориентированного обучения: признание ученика субъектом и целью обучения; выявление, структурирование и дальнейшее обогащение субъектного опыта ученика; утверждение стимулирующей и развивающей учебной среды; согласование процессов обучения и учения; диалогичность обучения, утверждение школьника как равноправного участника учебного процесса; направленность на поддержку индивидуального развития старшеклассника; деятельностно-творческий характер общения; предоставление учащемуся необходимого пространства свободы для принятия самостоятельных решений, творчества, выбора содержания и способов учения и поведения; переориентация учебно-воспитательного процесса на постановку и решение самими учащимися конкретных учебных задач (проблем): познавательных, исследовательских, преобразующих, моделирующих и тому подобное.

В качестве основы проектирования подготовки абитуриентов в контексте личностно-ориентированного обучения выделяем три взаимосвязанных между собой элемента: среда по отношению к ученику должна быть развивающей, деятельность старшеклассника должна быть преимущественно собственной, отношения между учеником и учителем – субъект-субъектное общение в диалоге, сотрудничестве и поддержке.

Как уже отмечалось, подготовка абитуриентов по математике в контексте личностно-ориентированного обучения требует создания разноплановой разноуровневой учебной среды. Этому процессу активно способствует исследовательский подход в обучении, при котором идеями исследований пропитаны все формы и методы учебной работы. Поэтому именно такой подход взят за основу в данной работе. Этот подход выполняет также и собственные функции, а именно: активно способствует приобретению личного опыта аналитико-синтетической, исследовательской, рефлексивной, творческой деятельности, формированию ключевых и предметных компетентностей. Обучение в таком контексте происходит в диалоге, педагог выступает в роли режиссера, организатора и соучастника этой деятельности. Само же обучение рассматривается как прирост индивидуального и социокультурного опыта ученика, что является особенностью личностно-ориентированного обучения (по И. С. Якиманской [102]).

Таким образом, на основе проведенного теоретического анализа проблемы исследования сформулирована научно обоснованная концепция и построена модель подготовки абитуриентов к ЕГЭ по математике в контексте личностно-ориентированного обучения.

Глава 2. ОБЩИЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

2.1. Определение уравнения с параметром

Прежде чем перейти непосредственно к методам решения линейных уравнений с параметрами, остановимся на общих подходах к решению уравнений с одним параметром.

Воспользуемся таким определением. Уравнение с параметром – это уравнение, в записи которого кроме числовых входят буквенные коэффициенты, являющиеся величинами, значения которых не указаны конкретно, но считаются известными и заданными на некотором числовом множестве [73, с. 7]. Если присвоить переменной a некоторое фиксированное значение, то уравнение с параметром можно рассматривать как уравнение относительно одной переменной x.

Например, в уравнении

$$|x-1|+|x-a|=2 \qquad (2.1)$$

буква x – переменная; a – параметр, заданный на всей числовой оси. Если $a = 0$, то уравнение (2.1) примет вид $|x-1|+|x|=2$; если $a = 2$, то имеем $|x-1|+|x-2|=2$ и т. д. Как мы видим, параметр в уравнениях может принимать различные значения, поэтому с математической точки зрения его можно рассматривать как переменную величину.

В уравнении вида

$$||x-1|-a|=1 \qquad (2.2)$$

получим: при $a = 0$ имеем $|x-1|=1$, решениями которого являются два числа: $x = 2$, $x = 0$, при $a = -1$ будет $||x-1|+1|=1$, решением которого является одно число $x = 1$; при $a = 3$ уравнение (2.2) примет вид $||x-1|-3|=1$, решениями которого есть уже четыре числа: $x = -3$, $x = -1$, $x = 3$, $x = 5$.

Пусть задано уравнение

$$Ax = B, \tag{2.3}$$

где x – переменная; A, B – выражения, которые могут содержать параметр a.

Если ставится задача найти решение уравнения относительно переменной x в зависимость от значений параметра a из некоторого множества G, тогда уравнение (2.3) называется уравнением с параметром, а множество G – множеством допустимых значений параметра a.

Уравнение (2.3) является краткой записью семейства уравнений, которые можно получить из этого уравнения при различных значениях параметра a. Для того чтобы не потерять отдельные решения, удобно наносить все найденные решения уравнения на числовую прямую, которую назовем прямой параметра или параметрической прямой.

При решении уравнений с одним параметром абитуриентам прежде всего необходимо осознать следующее.

1. В процессе решения уравнений с параметрами важно выполнять равносильные преобразования.

2. Параметр – это переменная величина. Поэтому выражение, содержащее параметр, требует дополнительных исследований. Обычно результаты проведенных исследований влияют и на процесс поиска решения, и на полученный результат.

3. Часто множество допустимых значений параметра a – все действительные числа из промежутка $(-\infty; \infty)$. Нередко возникает необходимость отыскания так называемых граничных (контрольных) значений параметра a, при переходе через которые происходят качественные изменения решений в заданном уравнении. При этом отыскания граничных (контрольных) значений тоже требуют дополнительных исследований.

4. Любое уравнение, содержащее параметр, представляет собой не отдельное уравнение, а целое семейство уравнений с похожими (или объединенными по определенным признакам)

свойствами, для каждого из которых необходимо получить конкретное решение. Чтобы выделить или распознать такие свойства, необходимо провести дополнительные исследования.

В итоге отметим, что решить уравнение с одним параметром означает выяснить, при каких значениях параметра a из множества A действительных чисел уравнение имеет решения и если да, то найти их, определив их зависимость от значений параметра a.

Укажем умения и навыки, которыми должен владеть абитуриент для того, чтобы уметь на достаточном уровне решать линейные уравнения, содержащие модуль, с одним параметром:

1) решать стандартные линейные уравнения с параметром вида $Ax = B$, рассуждать относительно возможных решений этого уравнения в зависимости от значений параметра;

2) раскрывать выражения, стоящие под знаком модуля или нескольких модулей на частичных областях;

3) строить графики линейных функций и исследовать их свойства, используя построенные графики как графическую опору для рассуждений;

4) строить графики кусочно-линейных функций и исследовать их свойства, используя построенные графики как графическую опору для рассуждений;

5) строить совместно несколько графиков в одной системе координат (xOy, xOa, aOx), проводить исследования количества общих точек на графиках;

6) строить графики элементарных функций, например дробно-рационального вида $f(x) = \dfrac{a}{bx + c} + d$, используя метод элементарных преобразований графиков функций;

7) решать уравнения различными методами, включая аналитические, метод сечений, координатно-параметрический метод (термин В. П. Моденова), комбинированными методами.

Напомним, как можно раскрыть выражения, стоящие под знаком модуля на частичных областях, и построить графики функций, соответствующие этим выражениям. Поскольку в пособии рассматриваются линейные уравнения, то за основу берем под знаком модуля многочлены первой степени относительно переменной x.

2.2. Построение графиков функций, содержащих модули

Коротко остановимся на методе частичных областей. В. П. Моденов описывает его так: «Решение задачи в исходной области сводится к решению совокупности более простых задач в каждой из „частичных областей“, из которых составлена исходная область» [49, с. 8]. Рассмотрим примеры.

Пример 2.1. Пусть задана функция

$$y = |\,x - 2\,| + |\,2x - 3\,| - |\,x + 4\,|. \tag{2.4}$$

Эвристическое правило-ориентир, по которому можно раскрывать выражения, стоящие под знаком модуля на частичных областях, может быть таким.

1. Найти числа, при которых каждое из подмодульных выражений обращается в нуль. В рассматриваемом примере это числа: $x = 2$, $x = 1{,}5$, $x = 4$.

2. В функции (2.4) заданы три выражения под знаками модуля. Поэтому берем три числовые оси, на каждой из которых в порядке возрастания откладываем нули. Пусть первая числовая ось соответствует первому выражению $(x - 2)$, вторая числовая ось – выражению $(2x - 3)$, третья ось – $(x + 4)$ (рис. 2.1, *а*).

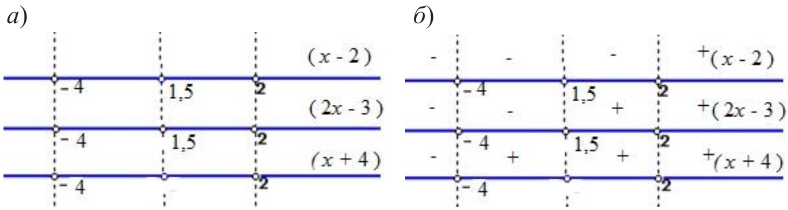


Рис. 2.1

3. Нулями числовая ось делится на частичные промежутки, на каждом из которых каждое подмодульное выражение имеет определенный постоянный знак. Например, числами – 4; 1,5; 2 числовая ось делится на четыре частичных промежутка: $(-\infty; -4)$, $(-4; 1{,}5)$, $(1{,}5; 2)$, $(2; \infty)$, в каждом из которых выражения $(x - 2)$, $(2x - 3)$, $(x + 4)$ имеют постоянные знаки (рис. 2.1, *б*).

4. Раскрывая подмодульные выражения согласно схеме рис. 2.1, *б*, получим:

$$\text{если } x < -4, \text{ то } y = -(x-2)-(2x-3)+(x+4) = -2x+9;$$
$$\text{если } -4 \le x \le 1{,}5, \text{ то } y = -(x-2)-(2x-3)-(x+4) = -4x+1;$$
$$\text{если } 1{,}5 < x \le 2, \text{ то } y = -(x-2)+(2x-3)-(x+4) = -5;$$
$$\text{если } x > 2, \text{ то } y = (x-2)+(2x-3)-(x+4) = 2x-9.$$

5. Функцию (2.4) можно переписать так:

$$y = |x-2| + |2x-3| - |x+4| = \begin{cases} -2x+9, \text{ если } & x < -4, \\ -4x+1, \text{ если } & -4 \le x \le 1{,}5, \\ -5, \text{ если } & 1{,}5 < x < 2, \\ 2x-9, \text{ если } & x \ge 2. \end{cases} \tag{2.5}$$

График (2.5) изображен на рис. 2.2.

В результате построений получили график кусочно-линейной функции (ломаной линии), определенной на всей числовой оси с некоторыми особенностями (граничными точками). Назовем эти точки точками излома. Для функции (2.4) таких точек три $A(-4; 17)$, $B(1{,}5; -5)$, $C(2; -5)$ (см. рис. 2.2). Обратим внимание на то, что абсциссы точек совпадают с найденными нулями.

Поэтому можно предложить другой, более быстрый способ построения функций, содержащих несколько модулей. Назовем такой способ «метод изломов». Рассмотрим его на конкретных примерах.

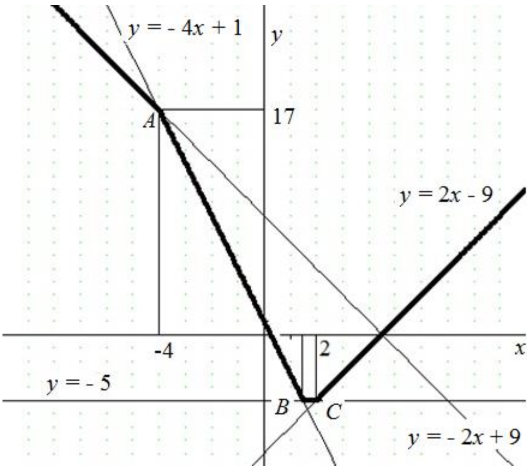


Рис. 2.2

Пример 2.2. Пусть задана функция

$$y = |x-1| - |x+1| - |2x+1|. \qquad (2.6)$$

Построим график методом изломов. Для этого найдем нули: $x = 1$, $x = -1$, $x = 0{,}5$, которые являются абсциссами точек изломов. Для нахождения ординат точек изломов подставим каждое полученное значение переменной x в выражение $y = |x-1| - |x+1| - |2x+1|$. Получим: если $x = 1$, то $y = -5$; если $x = -1$, то $y = 1$; если $x = 0{,}5$, то $y = 1$. Имеем три точки с координатами $A(1; -5)$, $B(-1; 1)$, $C(-0{,}5; 1)$. Построим точки в системе координат xOy (рис. 2.3, *а*).

Учитывая, что функция (2.6) непрерывна на всей числовой оси, можно соединить точки *A, C*, *B* отрезками. Для уточнения вида графика функции на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(1; \infty)$ можно взять две произвольные точки *D* и *E* с абсциссами из этих промежутков, координаты которых легко вычислить. Например, если $x = -2$, то $y = -1$, тогда точка $D(-2; -1)$; если $x = 1$, то $y = -7$, поэтому $E(2;-7)$. Построим точки D и E в системе координат и соединим их линиями с точками B и A соответственно (рис. 2.3, *б*).

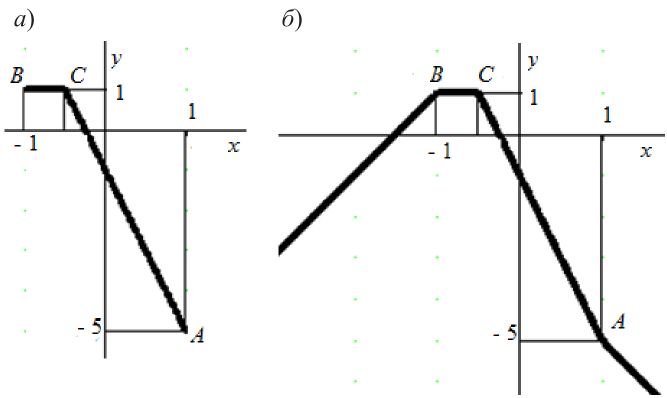


Рис. 2.3

Знание двух подходов к построению графиков кусочно-линейных функций поможет абитуриенту выбрать более рациональный способ решения конкретного примера.

Не менее важным является тот факт, что такие знания будут полезными при выполнении действий самоконтроля за правильностью проведенных вычислений и построений.

Напомним, как строятся графики дробно-рациональных функций методом элементарных преобразований. Данные навыки необходимы абитуриенту, так как при решении линейных уравнений с параметрами графическими методами часто приходится строить дробно-рациональные функции. Пусть имеем функцию вида $f(x)=\dfrac{a}{bx+c}$.

Рассмотрим методику построения такой функции на конкретном примере.

Пример 2.3. Пусть задана функция

$$f(x) = \frac{3x-1}{3x+1}. \tag{2.7}$$

Данная функция имеет точки разрыва: $x = -\frac{1}{3}$. Поэтому функция (2.7) определена на $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3};\ \infty\right)$. Преобразуем (2.7) так:

$$f(x) = \frac{3x-1}{3x+1} = \frac{3x+1-1-1}{3x+1} = \frac{3x+1}{3x+1} + \frac{-2}{3x+1} =$$

$$= -\frac{2}{3x+1} + 1 = -\frac{2}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)} + 1.$$

Окончательно получим:

$$f(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+\frac{1}{3}} + 1. \tag{2.8}$$

Графиком функции $f(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+\frac{1}{3}} + 1$ является гипербола, полученная из стандартной функции $f(x) = -\frac{1}{x}$ путем элементарных преобразований:

$$f(x) = -\frac{1}{x} \to f(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} \to f(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+\frac{1}{3}} \to f(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+\frac{1}{3}} + 1.$$

График функции (2.8) показан на рис. 2.4, *б*.

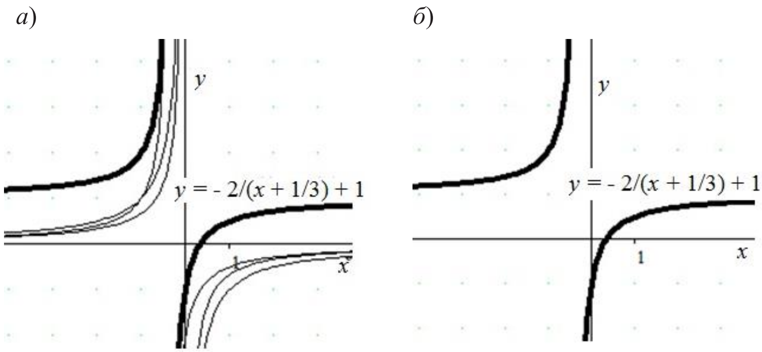


Рис. 2.4

Аналогичные построения в дальнейшем будут широко использоваться при решении уравнений с параметрами графическими методами.

Глава 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

Общеизвестно, что не существует универсальных методов решения уравнений с параметрами. При решении такого вида уравнений нередко применяют как графические, так и аналитические методы. Причем применение и одного, и другого методов связано со значительными трудностями.

Так, при графическом решении затруднения возникают как на этапе построения, так и на этапе исследования свойств функциональных зависимостей, входящих в конкретное уравнение. Это вызвано прежде всего тем, что наличие параметра в выражении, который необходимо исследовать, делает его график «динамичным», т. е. таким, что он может «двигаться» в системе координат или вообще менять вид при изменении значений параметра.

Аналитические методы решения уравнений с параметром требуют от абитуриента умений тщательно и очень внимательно выполнять различные алгебраические эквивалентные преобразования. Нередко требуется применять специальные формулы или уметь приводить известную формулу к новому виду. Некоторые проблемы возникают также на этапе интерпретации полученных результатов.

При решении уравнений с параметрами можно выделить два разных класса задач: установить количество решений, например один, два и т. д. в зависимости от значений параметра, и решить уравнение в зависимости от значений параметра. При нахождении количества решений традиционно используют графические методы. Когда необходимо найти аналитическое представление самых решений, используют аналитические методы (как правило, в сочетании с графическими).

Отметим, что решение задач с параметром фактически является эквивалентом учебного эксперимента. Однако организовать учителю такой эксперимент, эффективную учебную коммуникацию, где бы абитуриент самостоятельно проявлял инициативу, был бы соучастником учебного исследования, является весьма нелегким делом.

Рассмотрение задачи под разными углами зрения, использование графической интерпретации уравнения как основы эксперимента является важной составляющей решения заданий такого типа и, несомненно, поможет абитуриенту глубже осознать методы решения задач с параметрами, в том числе и заданий Единого государственного экзамена по математике.

Рассмотрим аналитические методы решения уравнений с одним параметром.

3.1. Решение линейных уравнений, содержащих параметры, с использованием готовой схемы

Пусть задано линейное уравнение с параметром вида $Ax + B = 0$, где x – переменная; A и B – выражения, которые могут содержать параметр. Тогда схема решения данного уравнения, согласно [73, с. 15], может быть представлена так. Если обозначить выражение A символом □, выражение B символом Δ, то получим уравнение □ · x = Δ. Схема решения представлена на рис. 3.1. Также обязательно учитываем область допустимых значений переменной x и параметра a.

Рассмотрим решение уравнений вида $Ax = B$ на примерах с использованием готовой схемы, указанной на рис. 3.1.

Пример 3.1. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$(a^2 - 4)x = a + 2. \qquad (3.1)$$

Решение. Область допустимых значений для переменной x и параметра a все числа. Обозначим $(a^2 - 4) = A$, $a + 2 = B$. Тогда согласно схеме можно рассуждать так.

Пусть $A = 0$, $(a^2 - 4) = 0$, или $a = 2$, $a = -2$.

Если $a = 2$, тогда $0 \cdot x = 4$. Уравнение (3.1) решений не имеет.

Если $a = -2$, тогда $0 \cdot x = 0$. Уравнение (3.1) имеет бесконечное множество решений.

Схема решения линейного уравнения с параметром

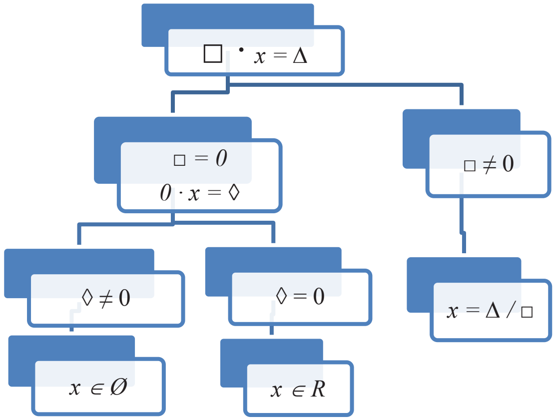


Рис. 3.1

Пусть $A \neq 0, (a^2 - 4) \neq 0$, или $a \neq 2, a \neq -2$, тогда имеем единственное решение $x = \dfrac{a+2}{(a+2)(a-2)} = \dfrac{1}{a-2}$.

На числовой оси параметра a решение уравнения (3.1) можно представить так, как показано на рис. 3.2.

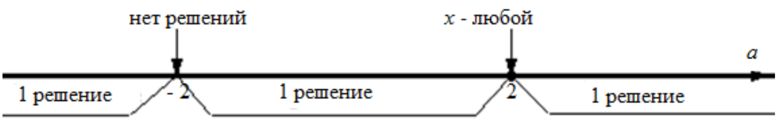


Рис. 3.2

Ответ: если $a \in (-\infty;-2) \cup (-2;\,2) \cup (2;\,\infty)$, то уравнение имеет одно решение $x = \dfrac{1}{a-2}$; если a = –2, то уравнение не имеет решений; если a = 2, то имеем бесконечное множество решений.

Пример 3.2. Решить для всех значений параметра a уравнение

$$(a^2-9)x = a^2-2a-3. \tag{3.2}$$

Решение. Область допустимых значений для переменной x и параметра a все числа. Для удобства решения разложим правую часть уравнения: $(a^2-9)x = (a-3)(a+1)$. Обозначим $(a^2-9) = A$, $a^2-2a-3 = B$. Тогда согласно схеме можно рассуждать так.

Пусть A = 0, тогда $(a^2-9) = 0$ или a = 3, a = –3.

Если a = 3, тогда $0 \cdot x = 0$. Уравнение (3.2) имеет бесконечное множество решений.

Если a = –3, тогда $0 \cdot x = 12$. Уравнение (3.2) не имеет решений.

Пусть $A \neq 0$, $(a^2-9) \neq 0$ или $a \neq 3$, $a \neq -3$, тогда имеем единственное решение $x = \dfrac{(a+1)(a-3)}{(a+3)(a-3)} = \dfrac{a+1}{a+3}$.

На числовой оси параметра a решение уравнения (3.2) можно представить так, как показано на рис. 3.3.

Рис. 3.3

Ответ: если $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty)$, то уравнение имеет одно решение $x = \dfrac{a+1}{a+3}$; если $a = -3$, то уравнение не имеет решений; если $a = 3$, то имеем бесконечное множество решений.

Пример 3.3. Решить для всех значений параметра a уравнение

$$(a+4)x + x = (a-1)(a+2) + 3x. \qquad (3.3)$$

Решение. Область допустимых значений для переменной x и параметра a все числа. Выполним эквивалентные преобразования (3.3), вынесем за скобку переменную x и приведем уравнение к виду $Ax = B$.

$$(a+4)x - 2x = (a-1)(a+2), \;\; x(a+4-2) = (a-1)(a+2),$$

$$x(a+2) = (a-1)(a+2).$$

В последнем уравнении обозначим выражения:

$$(a + 2) = A, \; (a - 1)(a + 2) = B.$$

Пусть $A = 0$, $a + 2 = 0$ или $a = -2$, тогда $0 \cdot x = 0$. Уравнение (3.3) имеет бесконечное множество решений.

Пусть $A \neq 0$, $a + 2 \neq 0$, или $a \neq -3$, тогда имеем единственное решение $x = \dfrac{(a-1)(a+2)}{(a+2)} = a - 1.$

На числовой оси параметра a решение уравнения (3.3) можно представить так, как показано на рис. 3.4.

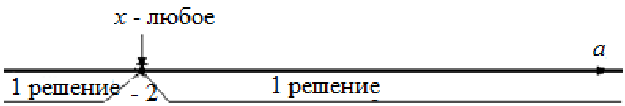


Рис. 3.4

Ответ: если $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$, то уравнение имеет одно решение $x = a - 1$; если $a = -2$, то уравнение имеет бесконечное множество решений.

Пример 3.4. Найти те значения параметра a, при которых уравнение (3.4) не имеет решений.

$$a^2 x = a(3x + 2) - 1. \qquad (3.4)$$

Решение. Область допустимых значений для переменной x и параметра a все числа. Выполним эквивалентные преобразования (3.4), раскроем скобки, перегруппируем одночлены, вынесем за скобку переменную x и приведем уравнение к виду $Ax = B$. Получим:

$$x(a^2 - 3a) = 2a - 1, \quad a(a - 3)x = 2a - 1.$$

Пусть $A = 0$, $a\ (a - 3) = 0$ или $a = 3$, $a = 0$.

Если $a = 3$, тогда $0 \cdot x = 5$. Уравнение (3.4) не имеет решений.

Если $a = 0$, тогда $0 \cdot x = -1$. Уравнение (3.4) не имеет решений.

Пусть $A \neq 0$, $a(a - 3) \neq 0$ или $a \neq 3$, $a \neq 0$, тогда имеем единственное решение $x = \dfrac{2a - 1}{a^2 - 3a}$.

На числовой оси параметра a решение уравнения (3.4) можно представить так, как показано на рис. 3.5.

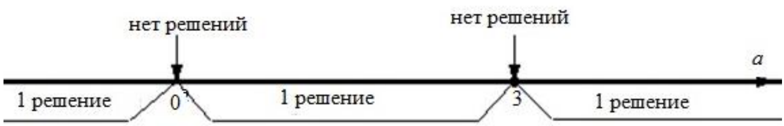


Рис. 3.5

Ответ: если $a = 3$; $a = 0$, то уравнение не имеет решений.

Рассмотрим решение дробно-линейных уравнений с параметрами.

Пример 3.5. Решить уравнение при всех значениях параметра a.

$$\frac{a^2x-4x-a-2}{x^2+x-2}=0. \tag{3.5}$$

Решение. Найдем область допустимых значений уравнения. $x^2+x-2\neq 0,\ (x-1)(x+2)\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -2.$ Параметр a может принимать любые значения.

Выполним равносильные преобразования.

$$\frac{x(a^2-4)-(a-2)}{(x+2)(x-1)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(a-2)(a+2)x=a+2,\\ x\neq -2,\ x\neq 1.\end{cases}$$

Решим уравнение $(a-2)(a+2)=a+2$ системы с использованием схемы (см. рис. 3.5). Обозначим левую и правую часть: $A=$ $=(a-2)(a+2)$, $B=a+2$.

Пусть $A=0$, $(a-2)(a+2)=0$, $a=2$, $a=-2$.

Если $a=-2$, тогда $0\cdot x=0,$ уравнение имеет бесконечное множество решений.

Если $a=2$, тогда $0\cdot x=0,$ уравнение $(a-2)(a+2)=a+2$ не имеет решений.

Пусть $A\neq 0,\ a\neq 2,\ a\neq -2,$ тогда уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{a+2}{(a+2)(a-2)}=\dfrac{1}{a-2}.$

Исследуем те значения параметра, при которых корни уравнения не входят в область допустимых значений. Для этого решим две системы:

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{a-2},\\ x\neq 1,\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{a-2}\neq 1,\ a\neq 3;\quad \begin{cases}x=\dfrac{1}{a-2},\\ x\neq -2,\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{a-2}\neq -2,\ a\neq 1{,}5.$$

На числовой оси параметра a решение уравнения (3.5) можно представить так (рис. 3.6).

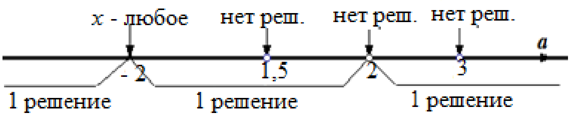


Рис. 3.6

Ответ: если $a = -2$, то уравнение имеет бесконечное множество решений; если $a = 1{,}5$, $a = 2$, $a = 3$, то уравнение не имеет решений; если $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1{,}5) \cup (1{,}5; 2) \cup (2; \infty)$, то уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{1}{a-2}$.

Пример 3.6. Решить уравнение при всех значениях параметра a.

$$\frac{4ax+27}{a^2-9} - \frac{x-1}{a+3} - \frac{4}{a-3} = 0. \qquad (3.6)$$

Решение. Найдем область допустимых значений уравнения. Переменная x может принимать любые значения. Параметр a имеет ограничения. $a^2 - 9 \neq 0$, $(a-3)(a+3) \neq 0$, $a \neq 3$, $a \neq -3$. Если $a = -3$, $a = 3$, то уравнение (3.6) не имеет смысла. Будем считать это высказывание равносильным «уравнение не имеет решений».

Выполним равносильные преобразования уравнения (3.6).

$$\frac{4ax+27}{a^2-9} - \frac{x-1}{a+3} - \frac{4}{a-3} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x(a+1)-3(a+4)}{(a-3)(a+3)} = 0.$$

Дробно-рациональное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} (a+1)x = a+4, \\ a \neq -3,\ a \neq 3. \end{cases}$$

Решим уравнение $(a + 1)\,x = a + 4$ с использованием схемы (рис. 3.5). Обозначим: $A = a + 1$, $B = a + 4$.

Пусть $A = 0$, $a = -1$. Если $a = -1$, то $0 \cdot x = 3$, уравнение не имеет решений. Если $a \neq -1$, тогда уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{a+4}{a+1}$.

На числовой оси параметра a решение уравнения (3.6) можно представить так (рис. 3.7).

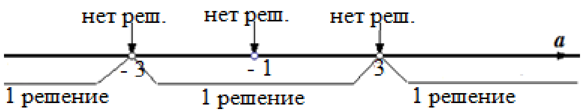


Рис. 3.7

Ответ: если $a = -3$, $a = -1$, $a = 3$, то уравнение не имеет решений; если $a \in (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ -1) \cup (-1;\ 3) \cup (3;\ \infty)$, то уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{a+4}{a+1}$.

3.2. Решение уравнений, содержащих параметр, с использованием понятия неявно заданной функции

Пусть задано уравнение

$$\left| x+1+a \right| = x. \qquad (3.7)$$

Необходимо решить его в зависимости от значений параметра a. Если обозначить левую и правую часть уравнения через переменную y, то получим два уравнения: $y = | x + 1 + a |$, $y = x$, каждое из которых представляет явно заданную функцию одной переменной вида $y = f(x)$, где параметр a является любым действительным числом, а переменная x имеет ограничения $x \geq 0$. Графики этих функций легко построить в системе координат xOy. Решениями уравнения (3.7) будут абсциссы общих точек графиков функций $y = | x + 1 + a |$, $y = x$.

Перенесем в левую часть уравнения (3.7) выражение, стоящее справа. В результате получим другое представление уравнения (3.7):

$$\left|x+1+a\right|-x=0. \tag{3.8}$$

Обозначим левую часть уравнения (3.8) так: $F(x;a)=$ $=\left|x+1+a\right|=0,$ тогда говорят, что функция $F(x;\ a)$ задана неявно уравнением (3.8). Напомним также, что если уравнение $F(x;\ a) = 0$ можно решить относительно одной из переменных, тогда его можно представить в виде явно заданных функций (зависимостей). В уравнении $F(x;\ a) = 0$ независимыми являются переменная x и параметр a. Если параметр a заменить на традиционную переменную y, то получим функцию двух переменных, а именно $F(x;\ y) = 0$. Поскольку функция двух переменных не рассматривается во всех учебниках школьного курса математики, то рассмотрим отдельные элементы теории функции двух переменных, которые в дальнейшем будем использовать в процессе решения уравнений с параметрами.

Пусть задана функция $G = F\ (x;\ y)$, областью определения M которой является множество всех пар $(x; y)$. Обычно каждая из независимых переменных x и y принимает значение из множества действительных чисел R, тогда говорят, что область определения функции двух переменных образует пространство $R\times R$. Если для функции одной переменной стандартной областью определения является конечный или бесконечный промежуток, то в случае функции двух переменных имеем большое разнообразие и различную сложность возможных (и естественных) областей изменения аргументов.

Рассмотрение этих областей значительно облегчается их геометрической интерпретацией, если взять на плоскости две взаимно перпендикулярные оси и обычным образом откладывать на них значения x и y. Как известно, каждой паре $(x;\ y)$ однозначно соответствует точка плоскости, имеющая эти значения своими координатами. Тогда для характеристики тех пар, для которых определена функция $G = F(x; y)$, проще указать, какая фигура на плоскости xOy заполняется соответствующими точками. Например, для функции $F = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ область определения описывается неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$, графическая интерпретация которой представлена на рис. 3.8, *а*.

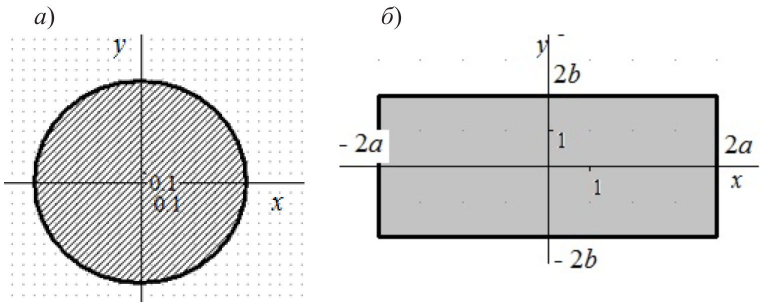


Рис. 3.8

Функция $F = \arcsin\dfrac{x}{a} + \arcsin\dfrac{y}{b}$ определена для тех значений x и y, каждое из которых отдельно удовлетворяет неравенствам $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, графический образ этих неравенств показан на рис. 3.8, *б*. Тогда говорят, что функция $F = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ определена в круге, а функция $F = \arcsin\dfrac{x}{a} + \arcsin\dfrac{y}{b}$ определена в прямоугольнике. Представленная геометрическая интерпретация настолько удобна, что обычно сами пары чисел $(x; y)$ называют точками, а множества таких «точек», соответствующие тем или иным образам, называют именем самих образов [88, с. 123–124].

Рассмотрим функцию, заданную неявно уравнением $F(x; y) = 0$. Если множество точек плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, состоит из конечного числа непрерывных кривых, каждая из которых является графиком однозначной функции $y = y(x)$, то говорят, что это уравнение неявно определяет соответствующее семейство функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$. Если точка $(x_0; y_0)$ лежит только на одной из этих кривых, то условие $y = y(x_0) = y_0$ позволяет однозначно выбрать эту кривую из всего семейства. То есть уравнение $F(x; y) = 0$ и условие $y(x_0) = y_0$ однозначно определяют (задают) неявную, непрерывную функцию в окрестности точки $(x_0; y_0)$, такую, что $F(x; y(x)) \equiv 0$ и $y(x_0) = y_0$ [7, с. 31].

Укажем на отдельные особенности и преобразования графика кривой $F(x; y) = 0$.

1. Если уравнение линии $F(x; y) = 0$ не изменяется при замене x на $-x$, то кривая симметрична относительно оси ординат.

2. Если уравнение линии $F(x; y) = 0$ не изменяется при замене y на $-y$, то кривая симметрична относительно оси абсцисс.

3. Если уравнение линии $F(x; y) = 0$ не изменяется при одновременной замене x на $-x$ и y на $-y$, то кривая симметрична относительно начала координат.

4. Если уравнение линии $F(x; y) = 0$ не изменяется при замене y на x, а x на y, то кривая симметрична относительно биссектрисы $y = x$.

5. График линии $F\left(\dfrac{x}{p}; y\right) = 0$ получается из графика кривой $F(x; y) = 0$ с помощью растяжения (сжатия) последнего в p раз вдоль оси абсцисс.

6. График линии $F(x + a; y) = 0$ получается из графика кривой $F(x; y) = 0$ с помощью параллельного переноса последнего вдоль оси абсцисс на $|a|$ единиц масштаба в направлении, противоположном знаку a.

7. График кривой $F(x; y + b) = 0$ получается из графика кривой $F(x; y) = 0$ с помощью параллельного переноса последнего

вдоль оси ординат на $|\, b \,|$ единиц масштаба в направлении, противоположном знаку b. [8, с. 182].

Если в уравнении $F(x;\, y) = 0$ можно выразить в явном виде переменную $y = y(x)$ или $x = x(y)$, тогда $F(x;\, y) = 0$ можно представить в виде явно заданных функций (зависимостей). При этом зависимости $y = y(x)$ и $x = x(y)$ являются взаимно обратными, а их графики симметричны относительно прямой $y = x$. Этот факт в дальнейшем будем использовать при решении уравнений с параметрами.

Вернемся к уравнению $|\, x + 1 + a \,| - x = 0$ (3.8) и воспользуемся теоретическими сведениями, которые были рассмотрены в данном пункте. Данное уравнение неявно задает функцию вида

$$F(x;\, a) = |\, x + 1 + a \,| - x = 0.$$

Теоретически каждая из переменных x или a может принимать любые значения из промежутка $(-\infty;\ \infty)$. Вместе с тем данное уравнение ограничивает эти промежутки. Для того чтобы установить эти ограничения, выразим переменную a через переменную x, т. е. перейдем к представлению уравнения $|\, x + 1 + a \,| - x = 0$ через зависимости вида $a = g(x)$.

Вернемся к записи уравнения в форме (3.7): $|\, x + 1 + a \,| = x$. По определению модуля правая часть уравнения (3.7) должна принимать неотрицательные значения, поэтому: при $x \geq 0$ имеем $x + 1 + a = x$ или $x + 1 + a = -x$. Окончательно: при $x \geq 0$ $a = -1$ или $a = -2x - 1$. Из последнего уравнения, учитывая, что $x \geq 0$ можно найти область изменения переменной (параметра) a. Для этого выразим x через a: $x = -0{,}5a - 0{,}5$. Подставим последнее выражение в неравенство $x \geq 0$. Имеем: $-0{,}5a - 0{,}5 \geq 0$, $a \leq -1$. В результате алгебраических преобразований получили область изменения переменных x и a, а именно: $x \geq 0$ и $a \leq -1$. Область определения функции двух переменных, заданной неявно уравнением $|\, x + 1 + a \,| - x = 0$ (3.8), можно представить в системе координат xOa, где x – абсцисса; a – ордината, так, как показано на рис. 3.9, *а*.

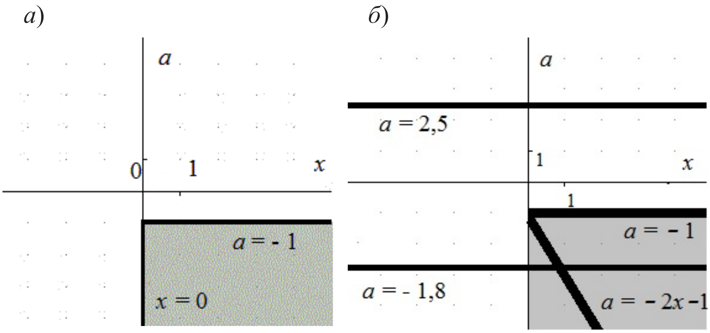


Рис. 3.9

Областью определения функции, заданной неявно уравнением

$$F\,(x;\,a) = |\,x + 1 + a\,| - x = 0,$$

является (открытый справа и снизу) прямоугольник, на котором необходимо построить две прямые $a = -1$ и $a = -2x - 1$ (см. рис. 3.9, *б*). Количество решений уравнения (3.8) зависит от того, сколько общих точек будет на графиках горизонтальной прямой $a = p$ и семейства линий, заданных уравнением $F\,(x;\,a) = |\,x + 1 + a\,| - x = 0$. Решениями уравнения (3.8) является множество точек вида $(x;\,a)$, принадлежащих прямым $a = -1$ и $a = -2\,x - 1$, попавших в область определения функции $F\,(x;\,a)$ Окончательный ответ принято записывать, выразив переменную x через переменную (параметр) a.

Ответ: если $a \in (-\infty;\,-1)$, то решение одно $x = -0{,}5a - 0{,}5$; если $a = -1$, то решений бесконечное множество $x \in [0;\,\infty)$; если $a \in (-1;\,\infty)$, то решений нет.

Другой способ решения уравнения $|\,x + 1 + a\,| = x$ (3.7) заключается в том, что для функции двух переменных, неявно заданной уравнением

$$F\,(x;\,a) = |\,x + 1 + a\,| - x = 0,$$

можно рассмотреть семейство зависимостей вида $x = f(a)$, обратных к семейству зависимостей вида $a = g\,(x)$. Поскольку уравнение (3.7) уже решено, то используем проведенные ранее рассуждения. Для прямой $a = –1$ обратной будет прямая $x = –1$, симметричная относительно прямой $a = x$. Аналогично для прямой $a = –2x$, симметричной относительно прямой $a = x$ (а следовательно, и обратной), будет прямая $a = – 0,5x – 0,5$ (см. рис. 3.10, *а*).

а) *б*)

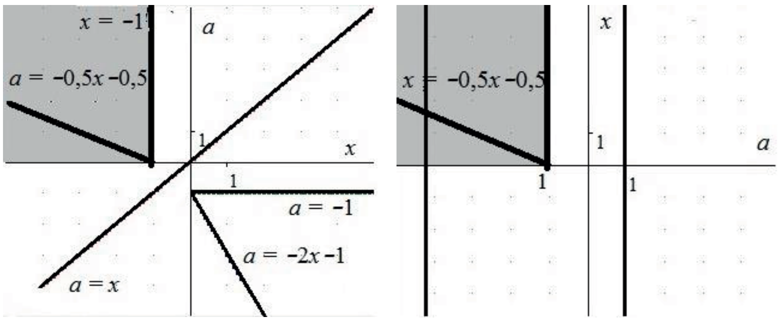


Рис. 3.10

Отметим также, что для линии, заданной неявно уравнением

$$F\,(x;\,a) = |\,x + 1 + a\,| – x = 0,$$

область определения будет определяться прямоугольником, открытым слева и сверху (см. рис. 3.10, *а*). Для удобства поменяем местами оси координат и рассмотрим множество точек вида $(a;x)$ плоскости $aOx,$ которые удовлетворяют уравнению $|\,x + 1 + a\,| = x$ (см. рис. 3.10, *б*).

Количество решений уравнения (3.8) зависит от того, сколько общих точек будет на графиках вертикальной прямой $a = p$ и семейства зависимостей вида $x = f(a)$, заданных неявно уравнением $F\,(x;\,a) = |\,x + 1 + a\,| – x = 0$.

Решением уравнения (3.8) является множество точек вида $(a;\,x)$, принадлежащих прямым $a = –1$ и $x = –0,5\,a – 0,5$, входящих в область определения функции $F(x;\,a)$ (см. рис. 3.10, *б*). Данный способ решения можно считать более удобным по сравнению с предыдущим, так как на этапе построения переменную x уже выразили через переменную (параметр) a.

Рассмотрим еще один способ решения уравнений с параметрами с использованием понятия «неявно заданные функции». Вернемся к уравнению (3.7): $|x + 1 + a| = x$. Мы выяснили, что его левую часть можно представить как неявно заданную функцию двух переменных $F(x; a) = |x + 1 + a| - x = 0$, где параметр a рассматривается как вторая независимая переменная ($y = a$), которую можно явно выразить через переменную x. По условию в уравнении (3.7) переменная a – число, которое может принимать любые действительные значения. Поэтому можно считать, что в записи уравнения $F(x; a) = |x + 1 + a| - x = 0$ имеем только одну переменную x, а другая переменная y отсутствует.

Решением уравнения (3.8) является пара вида $(x; y)$ с одними и теми же значениями переменной x и произвольными значениями переменной y, графическое изображение которых в системе координат xOy можно представить в виде вертикальных прямых. Расположение этих вертикальных прямых будет определяться зависимостью $x = g(a)$, причем, как уже установлено ранее, сама переменная x принимает неотрицательные значения $x \geq 0$. Уравнение (3.8) можно представить как неявно заданную функцию двух переменных вида $F(x; a) = |x + 1 + a| - x = 0$, где переменная x выражается как функция от параметра a.

Поскольку при $x < 0$ уравнение $|x + 1 + a| = x$ не имеет смысла, логично рассмотреть его при условии, что $x = 0$. Имеем: $|1 + a| = 0$ или $a = -1$. Следовательно, при переходе параметра a через граничное значение $a = -1$ количество решений уравнения $|x + 1 + a| = x$ будет меняться.

Исследуем эти случаи и изобразим их на плоскости в системе координат xOy. При $a = -1$ имеем: $|x + 1 - 1| = x$, $|x| = x$. Так как $x \geq 0$, то в уравнении можно опустить модуль, или: $x = x$. Перенеся все переменные в одну сторону, получим верное числовое тождество $0 = 0$, независящее от значений переменной x.

В итоге будет: если $a = -1$, то переменная x – любая из промежутка $[0;\ \infty)$. Графически этот случай можно изобразить как часть плоскости, лежащей правее оси Oy, включая ось (рис. 3.11, *а*).

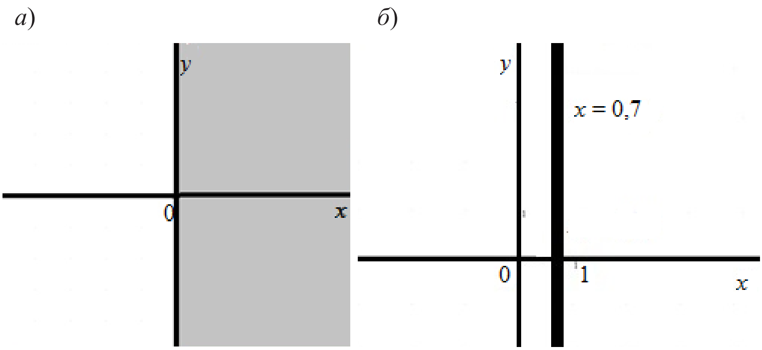


Рис. 3.11

Закрашенная часть плоскости рис. 3.11, *а* свидетельствует о том, что при $a = -1$ любая вертикальная прямая, лежащая правее оси Oy, будет решением уравнения $F(x;\ a) = |\,x + 1 + a\,| - x = 0$. При этом переменная x принимает значения из промежутка $[0;\ \infty)$. Например, прямая $x = 0{,}1$, $x = 1{,}2$, $x = 5{,}4$, $x = 0{,}1$ и т. д.

Рассмотрим случай $x > 0$. Решим уравнение $|\,x + 1 + a\,| = x$, используя определение модуля.

$$|x+1+a| = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1+a = x, \\ x+1+a = -x, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1, \\ x = -0{,}5a - 0{,}5. \end{array}\right.$$

Так как переменная x принимает положительные значения и при этом изменяется по закону $x = g(a) = -0{,}5a - 0{,}5$, что в системе координат xOy соответствует единственной вертикальной прямой (рис. 3.11, *б*). Для того чтобы выяснить, для каких значений параметра a это условие выполняется, необходимо в неравенство $x > 0$ вместо переменной x подставить выражение $x = -0{,}5a - 0{,}5$ и решить его относительно a: $-0{,}5a - 0{,}5 > 0,\ a < -1$.

Необычное графическое представление решений уравнения $F(x; y) = |x + 1 + a| - x = 0$ в виде части заштрихованной плоскости или вертикальной прямой, расположение которой определяется зависимостью $x = g(a) = -0{,}5a - 0{,}5$, где a – число, позволяет применить к уравнению с параметрами новый способ отыскания количества и вида решений. Преимуществом такого подхода является то, что каждый раз при переходе к графической интерпретации в системе координат xOy будут рассматриваться только вертикальные прямые, расположение которых задается зависимостью $x = g(a)$. Никаких других графиков зависимостей (простых, сложных) строить не нужно. Интересно, что данный способ можно применять и для отыскания решений нелинейных уравнений с параметром. При этом снова графиками решений в виде рассматриваемых зависимостей будут только вертикальные прямые.

Остановимся на графических методах решения уравнений с параметрами. Использование графических методов часто ускоряет процесс получения желаемого результата, особенно в сочетании с аналитическими. Как правило, графические методы привязывают к системе координат, в которой строят образ уравнения. Для графической интерпретации может быть взята система xOy или xOa (aOx). В. П. Моденов в [49] использование системы координат xOa для нахождения решений или количества решений, отвечающих определенным условиям, назвал координатно-параметрическим методом.

Кроме того, решение уравнений вида $f(x) = a$ подразумевает применение еще одного графического метода, так называемого метода сечений. Это название в методической литературе прижилось потому, что графическое решение такого уравнения в системе координат xOy подразумевает построение левой ($f(x)$) и правой части ($y = a$) уравнения. Особенно эффективно применение данного метода к уравнениям, у которых параметр содержится только в правой части. Тогда графиком $y = a$ является семейство прямых, которые как бы «рассекают» график функции $y = f(x)$. Более детально метод решения уравнений с параметрами в системе координат xOy будет рассмотрен в следующем параграфе.

Отметим, что при решении уравнений с параметрами графическими методами учитывают, что:

1) уравнение $f(x) = g(x)$ имеет столько решений, сколько общих точек будет на графиках функций $f(x)$, $g(x)$ (использование системы координат xOy);

2) уравнение $f(x) = a$ имеет столько решений, сколько раз горизонтальная прямая $y = a$ пересечет функцию $y = f(x)$, где $a \in (-\infty; \infty)$ (использование системы координат xOy, метод сечений);

3) уравнение $f(x; a) = 0$ (x – абсцисса, a – ордината) имеет столько решений, сколько раз горизонтальная прямая $y = a$ пересекает график линии $f(x; a) = 0$, где $a \in (-\infty; \infty)$ (использование системы координат xOa, координатно-параметрический метод, метод сечений прямой $y = a$);

4) уравнение $f(a; x) = 0$ (a – абсцисса, x – ордината) имеет столько решений, сколько раз вертикальная прямая $x = a$ пересекает график линии $f(x; a) = 0$, где $a \in (-\infty; \infty)$ (использование системы координат aOx, координатно-параметрический метод, метод сечений прямой $x = a$).

Рассмотрим более детально координатно-параметрический метод решения уравнений с параметрами в сочетании с методом сечений, так как в дальнейшем будем часто применять такую комбинацию методов.

3.3. Координатно-параметрический метод в сочетании с методом сечений при решении уравнений с параметром

Опишем идею метода, изложенную В. П. Моденовым в [49]. Отметим также, что данный метод подразумевает рассмотрение уравнений вида $F(x; a) = 0$, т. е. функцию двух переменных, заданную неявно. В основу положен координатный метод Декарта, используемый в аналитической геометрии. Решение уравнений с одним параметром таким методом приводит к необходимости рассмотрения на координатной плоскости однопараметрического семейства линий и связан с построением множеств и графиков функций на этой плоскости [49, с. 4].

По аналогии с плоскостью Декарта можно ввести понятие координатно-параметрической плоскости xOa или aOx, где x – переменная; a – параметр.

Пусть на плоскости даны две взаимно-перпендикулярные числовые оси с общим началом (точкой O). Одну из них Ox назовем координатной, другую aO – параметрической, плоскость aOx или xOa – координатно-параметрической (КП) плоскостью. Метод использования КП-плоскости назовем координатно-параметрическим методом. Он основан на нахождении множества всех точек КП-плоскости, значение координаты x и параметра a каждой из которых удовлетворяет заданному условию. Если указанное множество точек найдено, то можно каждому допустимому значению параметра $a = \text{const}$ поставить в соответствие координаты x точек этого множества, дающее искомое решение задачи, или указать те значения параметра, при которых задача не имеет решения [49, с. 6].

Рассмотрим уравнение

$$F\,(x;\,a) = 0, \tag{3.9}$$

где $F\,(x;\,a)$ – функция переменной x и параметра a. Пусть на КП-плоскости найдено множество всех точек, значение координаты x и параметра a каждой из которых удовлетворяет рассматриваемому уравнению. Возможны варианты решения: при некотором допустимом значении параметра a уравнение не имеет решений, имеет бесконечное множество или конечное множество решений. Записывая ответ, поставим в соответствие каждому допустимому значению параметра a значение искомой величины x – координаты соответствующих точек найденного множества [49, с. 7].

Возможны два частных случая.

1. Координата x является функцией от параметра a

$$x = f(a), \tag{3.10}$$

неявно заданная уравнением (3.9). На КП-плоскости xOa с горизонтальной параметрической осью Oa множество всех точек, значение координаты x и параметра a каждой из которых удовлетворяет уравнению $F(x; a) = 0$, представляет собой график функции $x = f(a)$. Роль аргумента играет параметр [49, с. 7]. От себя добавим, что уравнение $F(x; a) = 0$ имеет столько решений, столько раз вертикальная прямая $a = p$ пересечет графики линий $x = f(a)$. То есть окончательное решение уравнения нам помогает найти метод сечений.

2. Параметр a есть функция от переменной x:

$$a = g(x), \tag{3.11}$$

неявно заданная уравнением (3.9). На КП-плоскости aOx с вертикальной параметрической осью Oa это решение можно интерпретировать как множество всех точек, значение координаты x и параметра a каждой из которых удовлетворяет уравнению $F(a; x) = 0$, и представляет собой график функции $a = g(x)$. Роль аргумента играет координата x [49, с. 7]. От себя добавим, что уравнение $F(x; a) = 0$ имеет столько решений, столько раз горизонтальная прямая $a = p$ пересечет графики линий $a = g(x)$. Окончательное решение уравнения нам помогает найти метод сечений.

Также заметим, что при рассмотрении зависимостей вида $a = g(x)$ мы не всегда имеем дело с функциональными зависимостями, поэтому для координатно-параметрического метода, на наш взгляд, логичнее применение термина «зависимость», нежели «функция». В. П. Моденов также отмечает, что из курса аналитической геометрии известно, если функция $F(x; a)$ является многочленом не выше второй степени относительно координаты x или параметра a, то она на КП-плоскости однозначно определяет либо эллипс (окружность), либо параболу, либо пару прямых [49, с. 8]. Знание данного факта облегчает процесс построения нужных графиков полученных зависимостей, так как перечисленные зависимости относятся к простейшим элементарным, с графиками которых абитуриент хорошо знаком из школьного курса математики.

Как уже неоднократно подчеркивалось, уравнения с параметрами подразумевают целое семейство линий, графики которых нужно уметь представлять в динамике и затем исследовать в заданном направлении. Иными словами, уравнения с параметрами содержат в себе динамическую картинку (динамическую учебную ситуацию, динамическую модель), которая во многом затрудняет понимание, осознание заданий такого вида.

Аналитическое представление уравнений в виде равносильных более простых выражений, применение затем координатно-параметрического метода в сочетании с методом сечений помогают в решении в том числе простейших уравнений с параметрами. Приведем примеры.

Пример 3.7. Решить уравнение для всех значений параметра

$$\frac{x+2a}{x-a+1}=0. \tag{3.12}$$

Решение. Решим уравнение аналитически. Найдем область допустимых значений переменной x и параметра a: $x \neq a-1$.

Проведем равносильные преобразования уравнения (3.12):

$$\frac{x+2a}{x-a+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2a, \\ x \neq a-1. \end{cases}$$

Уравнение (3.12) имеет всегда одно решение $x=-2a$ для любого значения параметра a, кроме тех, которые обращают в нуль знаменатель дроби. Найдем эти контрольные значения параметра.

$$\begin{cases} x=-2a, \\ x \neq a-1, \end{cases} \Rightarrow a-1 \neq -2a,\ a \neq \frac{1}{3}.$$

Интерпретация полученного решения такова: если $a = \frac{1}{3}$, то уравнение (3.12) не имеет решений; если $a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$, то решение одно: $x = -2a$.

Проиллюстрируем полученное решение графически, используя систему координат aOx и метод сечений. Вернемся к записи:

$$\begin{cases} x = -2a, \\ x \neq a - 1. \end{cases}$$

В выбранной системе координат графическим образом уравнения является прямая $x = -2a$, координаты точек которой удовлетворяют уравнению (3.12) (на рисунке – сплошная линия), и точек прямой $x = -a - 1$, координаты точек которых не являются решением, поэтому будут изображены на рисунке пунктирной линией рис. 3.12, *а*.

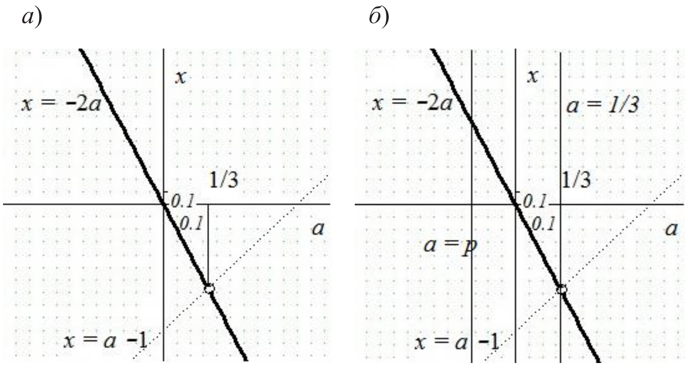


Рис. 3.12

Уравнение (3.12) имеет столько решений, сколько раз вертикальная прямая $a = p$ пересечет график прямой $x = -2a$. Очевидно, что прямая $a = p$ имеет всегда одну общую точку с прямой

$x = -2a$. Если прямая $a = p$ проходит через «выколотую» точку на прямой $x = -2a$ $\left(a = \frac{1}{3}\right)$, то общих точек нет. Значит, нет решений уравнения.

Ответ: если $a = \frac{1}{3}$, то уравнение (3.12) не имеет решений; если $a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$, то решение одно: $x = -2a$.

Пример 3.8. Решить уравнение (3.13) для всех значений параметра a:

$$(a - 3)\, x = a - 3. \qquad (3.13)$$

Решение. Решим уравнение (3.13) с использованием схемы. Данное уравнение определено для всех значений переменной x и параметра a. Обозначим левую и правую часть уравнения так: $A = a - 3$, $B = a - 3 = 0$, откуда $a = 3$. Тогда имеем: $0 \cdot x = 0$, откуда $x \in R$. При $A \neq 0, a \neq 3$ имеем единственное решение ($x = 1$). Решение уравнения в зависимости от значений параметра выглядит так: если $a = 3$, то решений бесконечное множество; если $a \in (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$, то решение одно: $x = 1$.

Проиллюстрируем полученное решение в системе координат aOx с использованием метода сечений. Проведем такие эквивалентные преобразования уравнения (3.13):

$$(a-3)x = a-3 \Leftrightarrow (a-3)x-(a-3) = 0 \Leftrightarrow (a-3)(x-1) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений $a = 3$ и $x = 1$.

В системе координат aOx графическим образом совокупности являются две прямые $a = 3$ и $x = 1$ (рис. 3.13).

Уравнение (3.13) имеет столько решений, сколько раз вертикальная прямая $a = p$ пересечет графики прямых $a = 3$ и $x = 1$. Очевидно, что для любого значения параметра a прямая $a = p$ всегда имеет одну общую точку с прямой $x = 1$, кроме значения параметра $a = 3$.

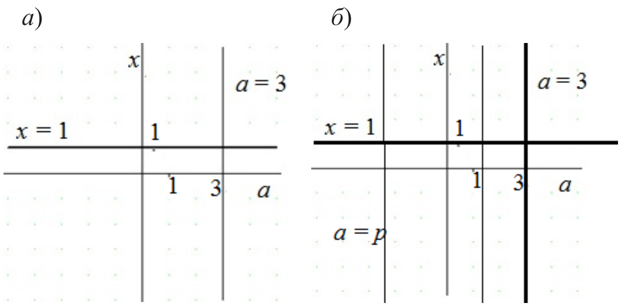


Рис. 3.13

При значении параметра $a = 3$ прямая $a = p$ совпадает с прямой $a = 3$. Это означает, что любая точка вертикальной прямой $a = 3$ является решением уравнения. Отсюда при $a = 3$ имеем бесконечное множество решений уравнения (3.13).

Ответ: если $a = 3$, то решений бесконечное множество; если $a \in (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$, то решение одно: $x = 1$.

Пример 3.9. Решить уравнение (3.14) для всех значений параметра a:

$$\frac{(x-3)(x+a)}{x-a} = 0. \qquad (3.14)$$

Решение. Решим уравнение аналитически. Найдем область допустимых значений параметра a и переменной x: $x \neq a$. Проведем равносильные преобразования:

$$\frac{(x-3)(x+a)}{x-a} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3,\ x = -a, \\ x \neq a. \end{cases}$$

Решение $x = 3$ уравнения (3.14) не зависит от значения параметра a, тогда это решение возможно при любом значении параметра a, кроме тех, которые не входят в область допустимых значений уравнения. Найдем эти контрольные значения. Если $x = -a$ и $x \neq a$, то $a = -a$, $2a = 0$, $a = 0$. Значит, уравнение имеет ровно одно решение $x = 3$ для любых значений параметра a, кроме $a = 0$.

Аналогично, решение $x = –a$ уравнения (3.14) возможно при любом значении параметра a, кроме тех, что не входят в область определения. Найдем эти контрольные значения параметра. Если $x = 3$ и $x \neq a$, то $a \neq 3$. Значит, уравнение (3.14) имеет ровно два решения: $x = 3$ и $x = – a$, при $a \neq 3$. Если $a = 3$, то уравнение (3.14) решений не имеет. Остается выяснить вопрос, при каком значении параметра a оба решения совпадают.

$$\begin{cases} x = -a, \\ x = 3, \end{cases} \Rightarrow a = -3.$$

Окончательно имеем: если $a = –3$, то одно решение: $x = 3$; если $a = 3$, то решений нет; если $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty)$, то два решения: $x = 3$ и $x = –a$. Проиллюстрируем полученное решение на координатно-параметрической плоскости aOx с применением метода сечений. Вернемся к записи:

$$\begin{cases} x = 3,\ x = -a, \\ x \neq a. \end{cases}$$

В системе координат aOx геометрическим образом уравнения (3.14) будут графики прямых $x = –a$ и $x = 3$ с особыми «пустыми» точками, «выколотыми» прямой $x = a$ рис. 3.14, *а*.

Уравнение (3.14) имеет столько решений, сколько раз вертикальная прямая $a = p$ пересечет графики прямых $x = 3$ и $x = –a$ (рис. 3.14, *б*). Очевидно, что для любого значения параметра a прямая $a = p$ всегда имеет одну общую точку с каждой из прямых $x = 3$ и $x = –a$, кроме значения параметра $a = –3$, при котором графики $x = 3$ и $x = –a$ пересекаются или же прямая $x = a$ «вырезает» из этих графиков «пустые» точки. При значении параметра $a = –3$, прямая $a = p$ проходит через общую точку прямых $x = 3$ и $x = –a$. Это соответствует единственному решению уравнения (3.14). При $a = 0$ прямая $x = a$ «вырезает» точку на прямой $x = –a$, остается единственное решение $x = 3$.

При $a = 3$ прямая $x = a$ «вырезает» точку на прямой $x = 3$. Остается единственное решение $x = -a$.

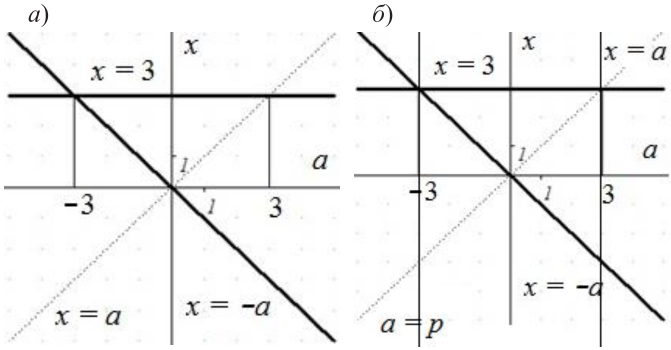


Рис. 3.14

Проведя исследование решений уравнения (3.14), можно сказать, что это уравнение имеет либо одно, либо два решения. Если $a = -3$, $a = 0$, имеем единственное решение: $x = 3$; если $a = 3$, имеем единственное решение: $x = -a$; если $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty)$, то два решения: $x = 3$ и $x = -a$.

Ответ: если $a = -3$, $a = 0$, то $x = 3$; если $a = 3$, то $x = -a$; если $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty)$, то $x = 3$ и $x = -a$.

Глава 4. НАХОЖДЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА КОРНЕЙ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

В предыдущем параграфе описаны различные методы решения задач на отыскание количества корней уравнений с одним параметром, содержащих модули. Однако, для того чтобы абитуриент гарантированно решал уравнения такого типа даже в части нахождения количества решений, он должен не только владеть методами решения, знаниями свойств функций, но и иметь возможность отработать полученные умения и навыки на достаточном количестве однотипных заданий. Найти же достаточное количество однотипных заданий достаточно сложно. Под однотипностью здесь подразумевается подборка заданий, содержащих уравнения одного вида. При этом рассматривается большое разнообразие вопросов, которые могут быть сформулированы к определенному виду уравнений. Тем самым абитуриента подводим к мысли, что сформулированный другой вопрос к известному уравнению не обязательно означает новое решение, а лишь взгляд на задание под другим углом зрения.

Найдем количество решений уравнения вида

$$|p_1 \cdot x - p_2| \pm |p_3 \cdot x - p_4| \pm |p_5 \cdot x - p_6| = a, \qquad (4.1)$$

где $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ – действительные фиксированные числа – коэффициенты при степенях переменной (x^1 и x^0); a – параметр.

Для удобства рассуждений обозначим левую и правую часть уравнения так:

$$f_1(x) = |p_1 \cdot x - p_2| \pm |p_3 \cdot x - p_4| \pm |p_5 \cdot x - p_6|, \quad f_2(x) = a.$$

Рассмотрим конкретные примеры. Пусть заданы уравнения, содержащие параметр и линейные выражения под знаком модуля:

1) $$|2\cdot x+1|-|x+3|-|x-1|=a; \qquad (4.2)$$
2) $$|x|+|2\cdot x-3|-|3\cdot x+1|=a; \qquad (4.3)$$
3) $$|x-3|+|2\cdot x-1|-|x-2|=a; \qquad (4.4)$$
4) $$|x-3|+|2\cdot x-2|-|2\cdot x-3|=a. \qquad (4.5)$$

Нахождение количества корней уравнения с параметрами и модулями обычно осуществляется графически. Для того чтобы сформулировать подходящий вопрос к тому или иному примеру, необходимо иметь представление о графиках функций, которые задаются этими уравнениями.

Несмотря на то что в предыдущих параграфах уже были решены два примера, содержащие похожие функции, интуитивно «угадать», какой именно вид ломаной линии будет иметь тот или иной график, заданный уравнениями (4.2–4.5), невозможно. Проиллюстрируем это утверждение.

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение (4.2)

$$|2\cdot x+1|-|x+3|-|x-1|=a.$$

Введем функции: $y=|2\cdot x+1|-|x+3|-|x-1|$, $y=a$. Раскроем подмодульные выражения на частичных областях. При значениях x = 3; x = 0,5; x = 1 одно из подмодульных выражений в левой части уравнения (4.2) принимает значение нуль. Составим такую таблицу (рис. 4.1).

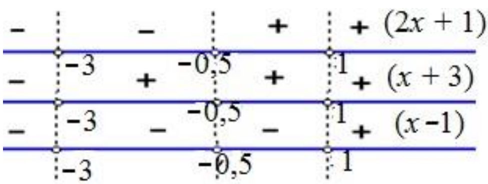


Рис. 4.1

Ориентируясь на таблицу, раскроем выражения, стоящие под знаками модулей, и упростим их. В результате функция, описываемая выражением $y = |2 \cdot x + 1| - |x + 3| - |x - 1|$, представляет ломаную линию, которую аналитически можно описать так:

$$y = |2x+1| - |x+3| - |x-1| = \begin{cases} 1, & \text{если } x < -3, \\ -2x-5, & \text{если } -3 \le x \le -0{,}5, \\ 2x-3, & \text{если } -0{,}5 < x < 1, \\ -1, & \text{если } x \ge 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Построим на координатной плоскости xOy график функции $y = |2 \cdot x + 1| - |x + 3| - |x - 1|$ (рис. 4.2, *а*) и $y = a$ (рис. 4.2, *б*).

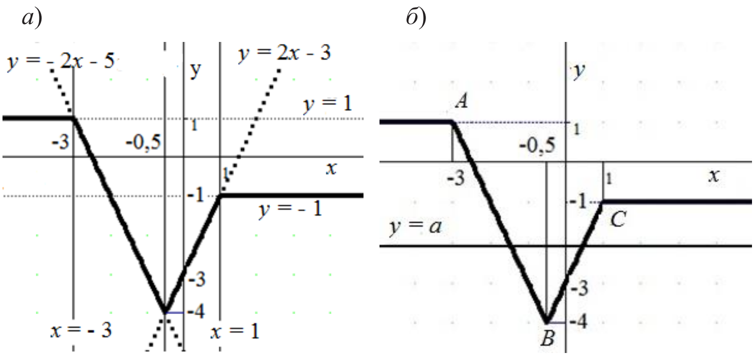


Рис. 4.2

На рис. 4.2, *б* показано одно из положений, которое может занимать прямая $y = a$ при конкретном значении параметра a.

Можно провести такое исследование количества решений уравнения:

1) изменяя положение горизонтальной прямой $y = a$ на плоскости, выяснить, при каких значениях параметра a график $y = a$ имеет общие точки с графиком ломаной линии;

2) существует ли такое значение параметра a, при котором уравнение будет иметь бесконечное множество решений? Сколько таких значений (если они существуют) можно насчитать?

Зная вид графика функции $y = |2 \cdot x + 1| - |x + 3| - |x - 1|$ и представляя динамическую модель, соответствующую уравнению (4.2), нетрудно сформулировать следующие вопросы, которые целесообразно рассмотреть при анализе данного примера:

1) при каком значении параметра a уравнение имеет один корень?

2) найти наибольшее (наименьшее) целое значение параметра a, при котором равнение имеет два корня;

3) найти сумму (произведение) тех значений параметра a, при которых уравнение имеет бесконечное множество решений;

4) найти количество решений уравнения в зависимости от значений параметра a.

Каждый из приведенных вопросов позволяет посмотреть на уравнение (4.2) с разных сторон.

Итак, для того чтобы сформулировать различные задания на нахождение количества корней уравнения вида $|p_1 \cdot x - p_2| + |p_3 \cdot x - p_4| - |p_5 \cdot x - p_6| = a$, необходимо иметь представление о графике функции, которая задается конкретным уравнением. Однако, если сравнить аналитическую запись только что рассмотренного уравнения (4.2) и ранее рассмотренного $|2 \cdot x + 4| - |x + 1| - |x| = a$, то, несмотря на похожий вид аналитического задания этих уравнений (имеется в виду, что в обоих уравнениях из первого модуля вычитаются два других и можно установить такую общую для обоих уравнений зависимость:

1) $p_1 = p_3 + p_5$;

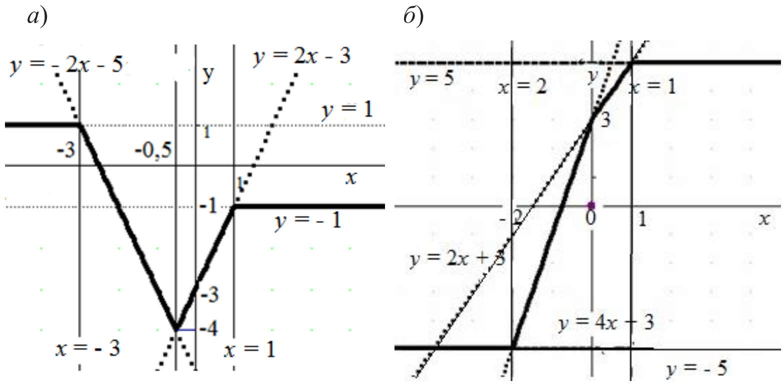
2) $p_1 = p_3$;

3) $p_1 = 2 \cdot p_3$;

4) p_2, p_4, p_6 – разные),

графики ломаных линий, которые соответствуют данным уравнения, являются разными (см. рис. 4.3, *а*, 4.3, *б*).

Рассмотрим различные графические интерпретации, которые могут встречаться при решении уравнений, содержащих три модуля в условии.



$|2\cdot x+1|-|x+3|-|x-1|=a$ $\qquad$ $|2\cdot x+4|-|x+1|-|x|=a$

Рис. 4.3

Для уравнения вида $|2\cdot p_1\cdot x-p_2|-|p_1\cdot x-p_4|-|p_1\cdot x-p_6|=$ $=a$ из всех возможных графических интерпретаций рассмотрим такие (рис. 4.4).

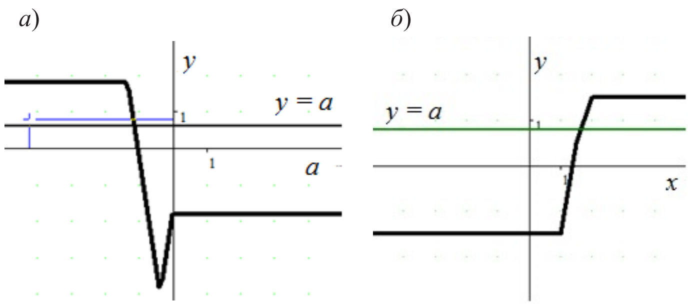


Рис. 4.4

График, размещенный на рис. 4.4, *а*, может задаваться такими уравнениями:

$$|6\cdot x+2|-|3\cdot x+4|-3|x|=a,$$
$$|2\cdot x+1|-|x+2|-|x-1|=a,$$
$$|4\cdot x-3|-|2\cdot x+1|-2|x-1|=a.$$

График, размещенный на рис. 4.4, *б*, может задаваться такими уравнениями:

$$|2\cdot x+1|-|1-x|-|x|=a,$$
$$|2x-5|-|x-4|-|x-6|=a,$$
$$|2x+1|-|x+3|-|x+2|=a.$$

Пример 4.2. Рассмотрим уравнение (4.3)

$$|x|+|2\cdot x-3|-|3\cdot x+1|=a.$$

Введем функции $y=|x|+|2\cdot x-3|-|3\cdot x+1|$ и y = a. Раскроем модули на частичных областях. При $x=0$, $x=1{,}5$, $x=-\dfrac{1}{3}$ одно из подмодульных выражений равно нулю. Составим таблицу (рис. 4.5).

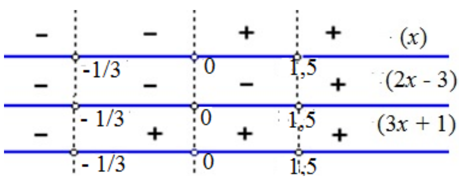


Рис. 4.5

Используя полученную таблицу, раскроем подмодульные выражения на частичных областях:

$$y = \left|x\right| + \left|2x-3\right| - \left|3x+1\right| = \begin{cases} 4, & \text{если } x < -\dfrac{1}{3}, \\ -6x+2, & \text{если } -\dfrac{1}{3} \le x \le 0, \\ -4x+2, & \text{если } 0 < x < 1{,}5, \\ -4, & \text{если } x \ge 1{,}5. \end{cases}$$

Построим в системе координат *xOy* графики функций $y = |x| + |2 \cdot x - 3| - |3 \cdot x + 1|$ (рис. 4.6, *а*) и $y = a$ (рис. 4.6, *б*).

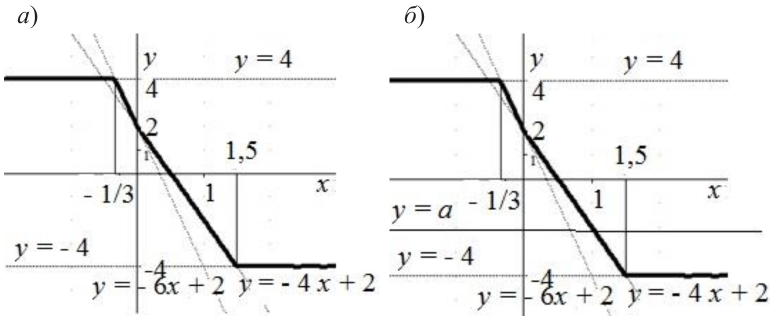


Рис. 4.6

Используя изображения как образную опору исследования, проведем такой эксперимент:

1) каково возможно взаимное расположение графиков функций в зависимости от значений параметра *a*?

2) определим, сколько общих точек может быть на графиках ломаной линии и прямой *y* = *a* в зависимости от значений параметра.

Зная вид ломаной, заданной функцией $y = |x| + |2 \cdot x - 3| - |3 \cdot x + 1|$, и имея представление о количестве общих точек пересечения графиков $y=|x|+|2\cdot x-3|-|3\cdot x+1|$ и $y = a$, несложно сформулировать следующие вопросы к данному примеру, например:

1) найти произведение тех значений параметра a, при которых в уравнении (4.3) будет бесконечное число решений;

2) найти сумму тех целых значений параметра a, при которых уравнение имеет единственный корень;

3) найти количество решений уравнения в зависимости от значений параметра a;

4) существует ли наибольшее (наименьшее) значение параметра a, при котором уравнение не имеет решений?

Для уравнения вида $|(p_3+p_5)\cdot x-p_2|-|p_3\cdot x-p_4|-$ $-|p_5\cdot x-p_6|=a$ из всех возможных графических интерпретаций рассмотрим такие, как изображены на рис. 4.7.

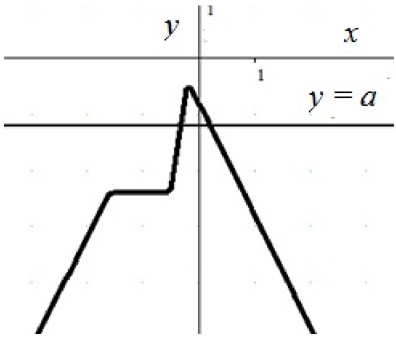


Рис. 4.7

График ломаной, изображенной на рис. 4.7, может задаваться такими уравнениями:

$$|3\cdot x+1{,}5|-|x+1|-|4\cdot x+1|=a,$$

$$|5\cdot x+4|-|x+3|-6|x|=a,$$

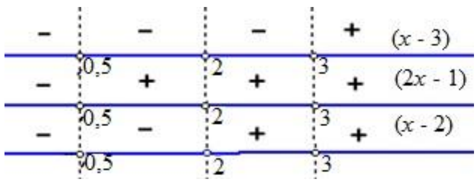
$$|x+0{,}5|-|x+2|-|2x-1|=a.$$

Решим похожий пример и сформулируем к нему задания.

Пример 4.3. Рассмотрим уравнение (4.4)

$$|x-3|+|2\cdot x-1|-|x-2|=a.$$

Пусть $y=|x-3|+|2\cdot x-1|-|x-2|$, $y = a$. Раскроем подмодульные выражения на частичных областях. При значениях $x = 3$; $x = 0,5$; $x = 2$ одно из подмодульных выражений уравнения (4.4) обращается в нуль. Составим таблицу для каждого из подмодульных выражений, раскрытых на частичных областях.



Опираясь на полученную таблицу, имеем:

$$y=\left|x-3\right|+\left|2x-1\right|-\left|x-2\right|=\begin{cases}-2x+2, & \text{если} \quad x<0,5,\\ 2x, & \text{если} \quad 0,5\le x\le 2,\\ 4, & \text{если} \quad 2<x<3,\\ 2x-2, & \text{если} \quad x\ge 3.\end{cases}$$

Построим в системе координат xOy графики функций $y=|x-3|+|2\cdot x-1|-|x-2|$ (рис. 4.8, *а*) и $y = a$ (рис. 4.8, *б*).

Используя графическое изображение как динамическую модель, проведем исследование:

1) каково возможно взаимное расположение ломаной линии, заданной уравнением $y=|x-3|+|2\cdot x-1|-|x-2|$ и горизонтальной прямой $y = a$?

2) сколько общих точек имеют эти графики?

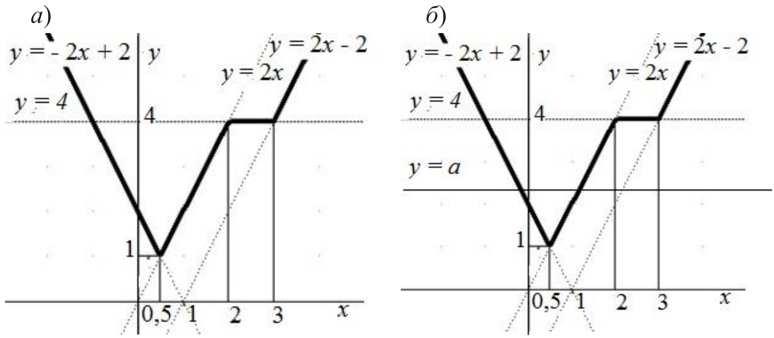


Рис. 4.8

Зная общий вид графика уравнения (4.4), можно сформулировать, например, такие целесообразные вопросы:

1) при каком значении параметра a уравнение имеет два корня?

2) при каком значении параметра a уравнение не имеет решений?

3) найти наименьшее значение параметра a, при котором уравнение имеет ровно два решения;

4) найти произведение (сумму) тех значений параметра из промежутка [1; 6], при которых уравнение имеет ровно два корня;

5) найти количество решений в зависимости от значений параметра a.

Для уравнения вида $|p_1 \cdot x - p_2| - |p_3 \cdot x - p_4| - |p_5 \cdot x - p_6| = a$ из всех возможных графических интерпретаций рассмотрим такие, которые изображены на рис. 4.9.

График ломаной, изображенный на рис. 4.9, может задаваться такими уравнениями:

$$|8 \cdot x + 1| - |1 - 7 \cdot x| - 2|x + 1| = a,$$

$$|7 \cdot x + 2| - |2 - 6 \cdot x| - |3 \cdot x + 2| = a,$$

$$|3x - 0{,}5| - |-2 \cdot x + 1| - |2 \cdot x + 1| = a.$$

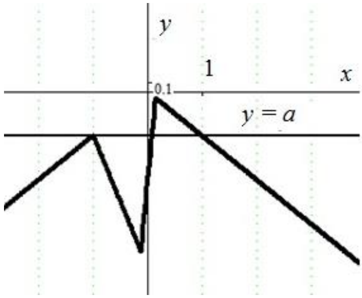


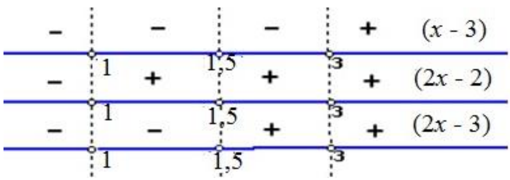
Рис. 4.9

Решим похожий пример и сформулируем к нему задания.

Пример 4.9. Рассмотрим уравнение (4.5)

$$|x-3|+|2\cdot x-2|-|2\cdot x-3|=a.$$

Введем функции $y=|x-3|+|2\cdot x-2|-|2\cdot x-3|$ и $y=a$. Раскроем подмодульные выражения на частичных областях. При значениях $x=3$, $x=1$, $x=1{,}5$ одно из подмодульных выражений уравнения (4.5) обращается в нуль. Составим таблицу для каждого из подмодульных выражений, раскрытых на частичных областях.



В соответствии с таблицей получим:

$$y=\left|x-3\right|+\left|2x-2\right|-\left|2x-3\right|=\begin{cases}-x+2, \text{ если } x<1,\\ 3x-2, \text{ если } 1\le x\le 1{,}5,\\ -x+4, \text{ если } 1{,}5<x<3,\\ x-2, \quad \text{если } x\ge 3.\end{cases}$$

Построим в системе координат xOy графики функций $y = |x - 3| + |2 \cdot x - 2| - |2 \cdot x - 3|$ (рис. 4.10, *а*) и $y = a$ (рис. 4.10, *б*).

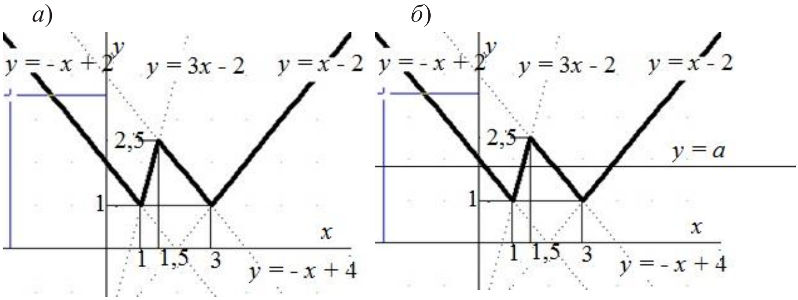


Рис. 4.10

Используя графическое изображение как динамическую модель, проведем исследование:

1) каково возможно взаимное расположение ломаной линии, заданной уравнением $y = |x - 3| + |2 \cdot x - 2| - |2 \cdot x - 3|$ и горизонтальной прямой $y = a$?

2) сколько общих точек имеют эти графики? Существует ли значение параметра a, при котором уравнение имеет бесконечное множество решений?

Зная общий вид графика, заданного уравнением (4.5), можно сформулировать, например, такие целесообразные вопросы:

1) найти те значения параметра a, при которых уравнение имеет ровно два корня;

2) при каких значениях параметра a уравнение имеет ровно три корня?

3) при каких значениях параметра a уравнение не имеет ни одного корня?

4) найти все целые значения параметра a, при которых уравнение имеет ровно четыре корня;

5) найти наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение имеет два решения;

6) существует ли наибольшее значение параметра a, при котором уравнение имеет решение?

7) найти количество решений уравнения в зависимости от значений параметра a.

Глава 5. ОБУЧЕНИЕ АБИТУРИЕНТОВ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВЕ РАССМОТРЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нахождение вида решений уравнения в зависимости от значений параметра требует глубокого анализа условия задачи, знания различных методов решения и творческого подхода к выбору того или иного метода, при котором можно получить желаемый результат.

Данный раздел посвящен методам решения уравнений с одним параметром, содержащих под знаком модуля многочлены первой степени. В процессе решения уравнений с параметрами используются аналитические методы в сочетании с графическими. В зависимости от того, явно или неявно представлена функция, заданная уравнением, будет зависеть способ решения конкретного примера.

5.1. Разные способы решения линейных уравнений с параметрами, содержащих модули

Для удобства оценки целесообразности применения того или иного метода решения уравнений с параметрами мы использовали метод решения одного и того же задания различными способами.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 5.1. В зависимости от действительных значений параметра a:

1) найти количество решений уравнения

$$|x-3|+|2x-3|-|x-2|=2a; \tag{5.1}$$

2) решить уравнение.

Первый способ решения. Данное уравнение определено на всей числовой оси для переменной x и параметра a. Сначала ответим на вопрос: *сколько решений имеет уравнение в зависимости от значений параметра a*? Для выяснения этого вопроса воспользуемся графическим методом. Построим в системе координат xOy графики явно заданных однозначных функций: $f_1(x)=|x-3|+|2x-3|-|x-2|$, $f_2(x)=2a$, где $a\in R$. Чтобы построить график зависимости $y=f_1(x)$, раскроем выражения, стоящие под знаками модулей на частичных областях. Приравняем к нулю каждое из подмодульных выражений: $x-3=0$, $2x-3=0$, $x-2=0$. Откуда $x=3$, $x=1{,}5$, $x=2$. Полученными числами 1,5, 2, 3 вся числовая ось Ox разбивается на четыре частичные области. Определим знаки подмодульных выражений на этих областях, результат запишем в виде схемы (рис. 5.1).

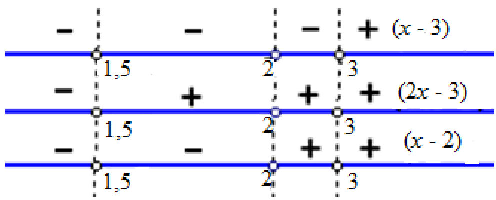


Рис. 5.1

Используя схему, имеем:

если $x<1{,}5$, то $f_1(x)=-x+3-2x+3+x-2=-2x+4$;

если $1{,}5\le x\le 2$, то $f_1(x)=-x+3+2x-3+x-2=2x-2$;

если $2<x\le 3$, то $f_1(x)=-x+3+2x-3-x+2=2$;

если $x>3$, то $f_1(x)=x-3+2x-3-x+2=2x-4$.

В результате получим другую запись функции $y=f_1(x)$:

$$f_1(x)=|x-3|+|2x-3|-|x-2|=\left[\begin{array}{ll}-2x+4, & \text{если } x<1{,}5,\\ 2x-2, & \text{если } 1{,}5\le x\le 2,\\ 2, & \text{если } 2<x\le 3,\\ 2x-4, & \text{если } x>3.\end{array}\right.$$

Построим график полученной функции в системе координат xOy (рис. 5.2, *а*).

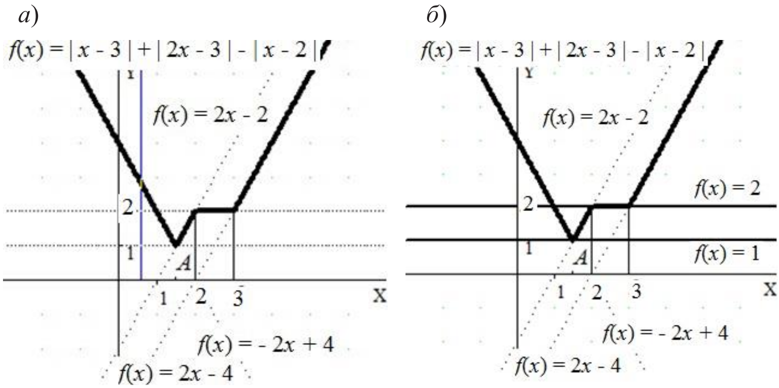


Рис. 5.2

Графиком функции $f_2(x) = 2a$ является семейство горизонтальных прямых, параллельных оси Ox (рис. 5.2, *б*). Используя метод сечений, имеем: уравнение (5.1) имеет столько решений, сколько общих точек будет на графиках ломаной линии $f_1(x) = |x-3| + |2x-3| - |x-2|$ и прямой $y = 2a$. Используя графический образ, изображенный на рис. 5.2, как модель уравнения, можно провести такое исследование. Установить:

1) при каком значении параметра a уравнение имеет одно решение, два решения, не имеет решения?

2) могут ли точки графика ломаной линии совпадать на некотором промежутке с точками графика прямой $y = 2a$?

3) сколько решений может иметь исходное уравнение в зависимости от значений параметра a?

Проще всего установить, при каких значениях параметра a уравнение (5.1) будет иметь одно решение. Для этого найдем координаты точки A, которая является точкой пересечения графиков функций $f_1(x) = |x-3| + |2x-3| - |x-2|$ и $y = 2a$ (см. рис. 5.2). Откуда $A(1{,}5; 1)$. Подставим координаты полученной точки в уравнение $f(x) = 2x - 2$, получим $a = 0{,}5$. То есть если $a = 0{,}5$, то уравнение (5.1) имеет единственное решение: $x = 1{,}5$.

Используя рис. 5.2 как графический образ модели уравнения, можно установить, что если $a < 0{,}5$, то уравнение (5.1) решений не имеет. Следующим шагом выясним, при каком значении параметра a исходное уравнение имеет бесконечное множество решений. Это возможно, если точки графика функции $y = 2a$ совпадают в некоторой своей части с точками графика функции $y = |x-3| + |2x-3| - |x-2|$, т. е. когда $2a = 2$, $a = 1$. Итак, если $a = 1$, то уравнение имеет бесконечное множество решений.

Анализ графического образа уравнения на рис. 5.2, *б* также может привести к предположению, что если значение параметра a изменяется в пределах от 0,5 до 1 или превышает 1, то уравнение (5.1) может иметь два решения. Если рассмотреть все действительные значения параметра a от $-\infty$ до $+\infty$, то придем к выводу: если $a \in (-\infty; 0{,}5)$, то уравнение решений не имеет; если $a = 0{,}5$, то уравнение имеет одно решение; если $a \in (0{,}5; 1) \cup (1; \infty)$, то уравнение имеет два решения; если $a = 1$, то уравнение имеет бесконечное множество решений.

Рассмотренный метод решения позволил получить ответ на вопрос о количестве решений уравнения (5.1), однако для установления аналитического вида этих решений проведенных рассуждений недостаточно. Поэтому рассмотрим другой способ решения, а именно координатно-параметрический метод с использованием метода сечений. Графический образ уравнения (5.1) построим в системе координат aOx, где Oa – ось абсцисс; Ox – ось ординат.

Второй способ решения. Перенесем все выражения уравнения (5.1) в левую сторону:

$$|x-3| + |2x-3| - |x-2| - 2a = 0. \tag{5.2}$$

Решить уравнение (5.2) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(a),\ x_2 = f_2(a),\ \ldots,\ x_k = f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a. Для этого используем ранее проведенные рассуждения:

если $x < 1{,}5$, то $-x+3-2x+3+x-2=2a,\ x=-a+2$;

если $1{,}5 \le x \le 2$, то $-x+3+2x-3+x-2=2a,\ x=a+1$;

если $2 < x \le 3$, то $-x+3+2x-3-x+2=2a,\ x=1$;

если $x > 3$, то $f_1(x)=x-3+2x-3-x+2=2a,\ x=a+2$.

Перепишем уравнение (5.2) так:

$$F(a;x)=\left|x-3\right|+\left|2x-3\right|-\left|x-2\right|-2a=$$

$$=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x=f(a)=-a+2, & \text{если } x\le 1{,}5; \\ x=f(a)=a+1, & \text{если } 1{,}5<x<2; \\ a=1, & \text{если } 2\le x\le 3; \\ x=f(a)=a+2, & \text{если } x>3. \end{array}\right.$$

В результате получили аналитический вид решений уравнения $\left|x-3\right|+\left|2x-3\right|-\left|x-2\right|-2a=0$. Осталось выяснить, каким значениям параметра a они соответствуют, т. е. необходимо найти для каждой зависимости вида $x = f(a)$ область изменения параметра a. Сделать это можно так: при $x \le 1{,}5$ имеем: $x = -a + 2$, поэтому $-a+2\le 1{,}5$ или $a \le 0{,}5$ и т. д.

Такой подход к нахождению соответствующих значений параметра a достаточно неудобен хотя бы потому, что некоторые неравенства, представляющие функцию двух переменных $F(a;x)$, являются двойными (например, второе $1{,}5 < x < 2$), а следовательно, после подстановки придется решать систему неравенств: $\begin{cases} x>1{,}5, \\ x<2, \end{cases}$ или $\begin{cases} a+1>1{,}5, \\ a+1<2, \end{cases}$ поэтому $\begin{cases} a>0{,}5, \\ a<1, \end{cases}$ что соответствует двойному неравенству $0{,}5<a<1$. Окончательно имеем: если $0{,}5<a<1$, то $x = a+1$.

Также возникает вопрос, как интерпретировать смешанную систему: $2 \le x < 3$, $a = 1$? В теории функций двух переменных это означает, что рассматриваются точки вида $(a; x)$, где переменная x принимает значения из промежутка $[2; 3)$; переменная a принимает значение $a = 1$, например пары вида: $(1; 2)$, $(1; 2{,}3)$, $(1; 2{,}91)$ и т. п. Для уравнения (5.2) это означает, что при $a = 1$ решением является любое значение переменной x из промежутка $[2; 3)$. При этом возникает новый вопрос: входит ли число 3 в промежуток для переменной x, т. е. этот промежуток «полуоткрытый» или «закрытый», и т. д.? (В рассматриваемом случае промежуток является «закрытым».)

Сочетание аналитических и графических методов решения уравнений с параметрами позволяет абитуриентам значительно глубже осознать сущность изучения данного учебного материала. При этом полезно организовать проведение учебных экспериментов с использованием графического образа уравнения вида (5.2) как опоры для рассуждений.

В рассматриваемом примере перейдем к построению функции двух переменных, заданных неявно уравнением $F(a; x) = |x-3| + |2x-3| - |x-2| - 2a$ в системе координат aOx, где Oa – ось абсцисс; Ox – ординат (рис. 5.3, *а*). Такое представление функции $F(a; x)$ позволяет найти как количество решений, так и их аналитический вид в зависимости от значений параметра a. Используя метод сечений, можно установить, что уравнение (5.2) имеет столько решений, сколько общих точек у вертикальной прямой $a = p$, где $p \in (-\infty; \infty)$, и семейства зависимостей вида $x = f(a)$, заданных неявно уравнением $F(a; x) = |x-3| + |2x-3| - |x-2| - 2a$ (на рис. 5.3, *б* показаны отдельные представители вертикальных прямых для конкретных значений параметра a).

Используя рис. 5, *б* как опору для рассуждений, можно провести учебное исследование:

1) сколько общих точек может иметь вертикальная прямая $a = p$ и график ломаной линии?

2) выяснить количество решений уравнения (5.2) в зависимости от значений параметра a.

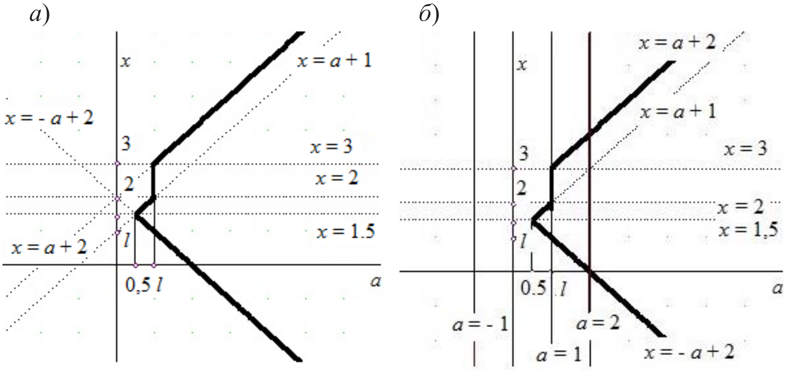


Рис. 5.3

Используя графическое изображение в качестве динамической модели уравнения (5.2), можно установить следующее. Если $a < 0{,}5$, то график вертикальной прямой $a = p$ не пересекает график ломаной линии, заданной уравнением $F(a;\ x) = |x-3| + |2x-3| - |x-2| - 2a$. Если a = 0,5, то график вертикальной прямой $a = p$ пересекает график ломаной линии, заданной уравнением $F(a; x) = |x-3| + |2x-3| - |x-2| - 2a$ только в одной точке, значит, исходное уравнение имеет единственное решение x = 1,5. Если $0{,}5 < a < 1$, то график вертикальной прямой $a = p$ пересекает график ломаной линии, заданной уравнением $F(a;x) = |x-3| + |2x-3| - |x-2| - 2a$ в двух точках, значит, исходное уравнение имеет два решения: $x = a + 2$, $x = -a + 2$. Если a = 1, то график вертикальной прямой $a = p$ совпадает на некоторой области с точками графика ломаной линии, заданной уравнением $F(a; x) = |x-3| + |2x-3| - |x-2| - 2a$, значит, исходное уравнение имеет бесконечное множество решений, $x \in [2;\ 3]$.

Ответ: если $a \in (-\infty;\ 0{,}5)$, то уравнение решений не имеет; если a = 0,5, то имеем одно решение: x = 1,5; если $a \in (0{,}5;\ 1)$, то решений два: $x = a + 2$, $x = a + 1$; если $a \in (1;\ \infty)$, то имеем два других решения: $x = -a + 2$, $x = a + 2$; если $a = 1$, то решений бесконечное множество $x \in [2;\ 3]$.

Рассмотрим другой пример уравнения, у которого параметр находится под знаком модуля.

Пример 5.2. В зависимости от значений параметра a найти количество решений и решить уравнение

$$|2x + 3a| = x + 1. \tag{5.3}$$

Первый способ решения. Найдем область допустимых значений уравнения. Параметр a может принимать любые действительные значения, в то время как переменная x имеет ограничения. Так как правая часть уравнения (5.3) равна выражению под знаком модуля, то $x + 1 \geq 0$, $x \geq -1$.

Найдем количество решений уравнения графическим методом с использованием системы координат xOy. Обозначим левую и правую часть уравнения так: $y = |2x + 3a|$, $y = x + 1$. Графиком функции $y = x + 1$ является прямая с угловым коэффициентом $k = 1$, проходящая через точку с координатами $(0; 1)$. Графиком другой функции $y = |2x + 3a|$ при конкретном значении параметра a является ломаная линия, состоящая из двух звеньев (лучей). Например, при $a = 0$ имеем функцию $y = |2x|$, точка минимума которой находится в начале координат (на рис. 5.4, *а* график функции обозначен римской цифрой II).

Если изменять значения параметра, то график функции $y = |2x + 3a|$ будет «скользить» вдоль оси Ox. На рис. 5.4, *а* показаны отдельные положения графика функции $y = |2x + 3a|$. Например, при $a = \dfrac{2}{3}$ имеем $y = |2x + 2|$ (на рис. 5.4 график обозначен цифрой I); при $a = \dfrac{4}{3}$ имеем график, обозначенный цифрой III.

Можно провести такой учебный эксперимент:

1) при каком значении параметра a график функции $y = |2x + 3a|$ имеет общие точки с графиком $y = |2x + 3a|$?

2) может ли уравнение (5.3) иметь одно, два, три решения? По результатам исследования сделать выводы.

а) *б*)

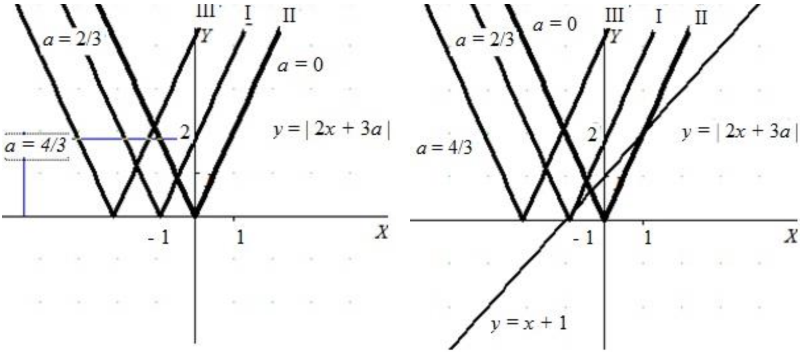


Рис. 5.4

Работа с графическим образом уравнения (5.3) подсказывает, что данное уравнение может иметь одно, два или ни одного решения.

Нахождение количества решений исходного уравнения лучше всего начинать с рассуждения, при каком значении параметра a «неподвижная» прямая $y = x + 1$ имеет одну общую точку с «подвижным» графиком $y = |2x + 3a|$? Этот случай возможен, если оба графика проходят через точку с координатами $(-1;\ 0)$ (см. рис. 5.4, *б*). Подставим найденные координаты в уравнение $y = |2x + 3a|$, тогда $0 = |-2 + 3a|$ или $a = \frac{2}{3}$. Значит, при $a = \frac{2}{3}$ имеем единственное решение $x = -1$.

Исследуя динамическую модель уравнения (5.3), изображенную на рис. 5.4, *б*, логично предположить, что если параметр a будет принимать значения из промежутков $a < \frac{2}{3}$ или $a > \frac{2}{3}$, то уравнение имеет или два решения, или не имеет решений. Выяснить это можно, например, таким способом. Один из графиков на рис. 5.4, *б* $y=|2x|$ имеет две общие точки с прямой $y=x+1$. График $y=|2x|$ проходит через начало координат, следовательно, точка (0; 0) удовлетворяет уравнению $y=|2x+3a|$, значит, $0=|0+3a|$, откуда $a = 0$. Так как на числовой оси число $a = 0$ лежит левее числа $a=\frac{2}{3}$, то при $a<\frac{2}{3}$ график зависимости $y=|2x+3a|$ будет иметь две общие точки с прямой $y = x + 1$. Иначе при $a>\frac{2}{3}$ график зависимости $y=|2x+3a|$ не имеет общих точек с прямой $y = x + 1$. Уравнение (5.3) при $a<\frac{2}{3}$ имеет два решения, при $a>\frac{2}{3}$ – не имеет решений. Найдем аналиический вид решений уравнения при $a<\frac{2}{3}$. По определению модуля

$$y_2=|2x+3|=\begin{cases}2x+3a, & \text{если } x\geq\dfrac{2}{3}\cdot a,\\ -2x-3a, & \text{если } x<\dfrac{2}{3}\cdot a.\end{cases}$$

Графически это означает, что прямые $y=2x+3a$ и $y=-2x-3a$ одновременно пересекаются с прямой $y = x + 1$. Поэтому $2x+3a=x+1$, $x=-3a+1$ или $-2x-3a=x+1$, откуда $x=-a-\frac{1}{3}$.

Второй способ решения. Перенесем все выражения уравнения (5.3) влево: $|2x+3a|-x-1=0$. Рассмотрим функцию двух переменных, заданную неявно уравнением

$$F(x;a)=|2x+3a|-x-1=0. \tag{5.4}$$

Решить уравнение (5.4) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $a_1=g_1(x)$, $a_2=g_2(x)$, …, $a_k=g_k(x)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a. Проведем равносильные преобразования, для чего раскроем по определению модуль и учтем, что правая часть уравнения $|2x+3a|=x+1$ имеет ограничения. Решим совокупность двух смешанных систем:

$$\begin{cases} x+1\ge 0, \\ 2x+3a=x+1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+1\ge 0, \\ 2x+3a=-x-1. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} x\ge -1, \\ a=-\dfrac{1}{3}\cdot x+\dfrac{1}{3} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\ge -1, \\ a=-x-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Для нахождения решений уравнения (5.4) используем координатно-параметрический метод в сочетании с методом сечений. Построим в системе координат xOa, где Ox – ось абсцисс; Oa – ось ординат; графики функций $a=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$ и $a=-x-\dfrac{1}{3}$. Также учтем, что все линии должны удовлетворять неравенству $x\ge -1$, т. е. лежать правее вертикальной прямой $x = -1$ (рис. 5.5, *а*).

Уравнение (5.4) имеет столько решений, сколько общих точек у горизонтальной прямой $a = p$, где $p\in(-\infty;\ \infty)$, и семейства зависимостей вида $a=f(x)$, заданных неявно уравнением (на рис. 5.3, *б* показаны отдельные представители горизонтальных прямых $a = p$ для конкретных значений параметра a).

Преимуществом такого решения по сравнению с предыдущим является то, что на рис. 5.5 сложные графики являются «статичными», «двигается» горизонтальная прямая, график которой можно мысленно представить, также визуализируется количество общих точек прямой $a = p$ и ломаной линии. Значит, облегчается нахождение количества решений исходного уравнения.

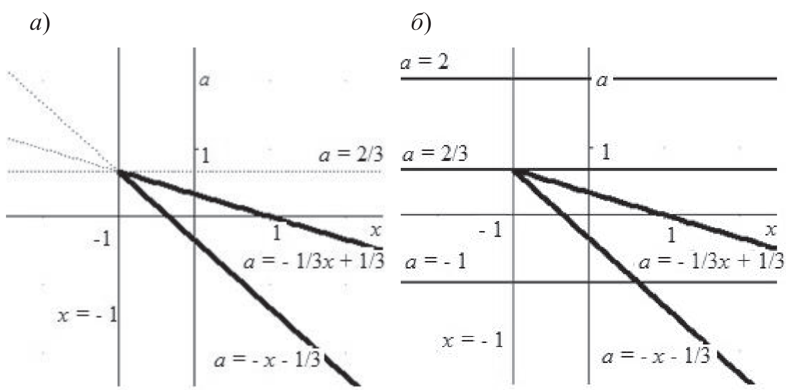


Рис. 5.5

Можно провести учебный эксперимент:

1) при каких значениях параметра a на графиках зависимостей $a = p$ и $F(x; a) = |2x + 3a| - x - 1$ имеется одна, две, ни одной общей точки?

2) выяснить количество и аналитический вид решений исходного уравнения в зависимости от значений параметра a.

По результатам проведенного исследования можно установить, что если $a = \frac{2}{3}$, то имеем единственное решение $x = -1$; если $a > \frac{2}{3}$, то решений нет; если $a < \frac{2}{3}$, то имеем два решения: $a = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, $a = -x - \frac{1}{3}$. Однако решения уравнений принято выражать через параметр a. Поэтому выразим величину x через a: $x = -3a + 1$, $x = -a - \frac{1}{3}$. Данный способ требует дополнительного шага – выражения аналитического вида решения уравнения через параметр a.

Третий способ решения. Перенесем все выражения уравнения (5.3) влево: $|2x + 3a| - x - 1 = 0$.

Рассмотрим функцию двух переменных, заданную неявно уравнением

$$F(a;x)=\left|2x+3a\right|-x-1=0. \qquad (5.5)$$

Решить уравнение (5.5) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1=f_1(a)$, $x_2=f_2(a)$, …, $x_k=f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a.

Проведем равносильные преобразования и воспользуемся выполненными ранее выкладками. При этом выразим переменную x через переменную a.

$$\begin{cases} x+1\ge 0, \\ 2x+3a=x+1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+1\ge 0, \\ 2x+3a=-x-1. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} x\ge -1, \\ x=-3a+1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\ge -1, \\ x=-a-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Построим в системе координат aOx, где Oa – ось абсцисс, Ox – ось ординат, графики зависимостей $x=-3a+1$, $x=-a-\frac{1}{3}$ с учетом области допустимых значений переменной x ($x\ge -1$). В результате такого построения все графики зависимостей $x=f(a)$, заданных уравнением $F(a;x)=\left|2x+3a\right|-x-1=0$, являются «неподвижными». «Двигается» график вертикальной прямой $a = p$. Так как оба однозначных графика $x=f(a)$ должны отвечать условию $x\ge -1$, то решениями уравнения (5.5) являются те части прямых $x=-3a+1$, $x=-a-\frac{1}{3}$, которые лежат выше горизонтальной прямой $x = -1$ (рис. 5.6, a). Найдем точки пересечения графиков функций $x=-3a+1$, $x=-a-\frac{1}{3}$, для чего приравняем их правые части. Откуда имеем $a=\frac{2}{3}$.

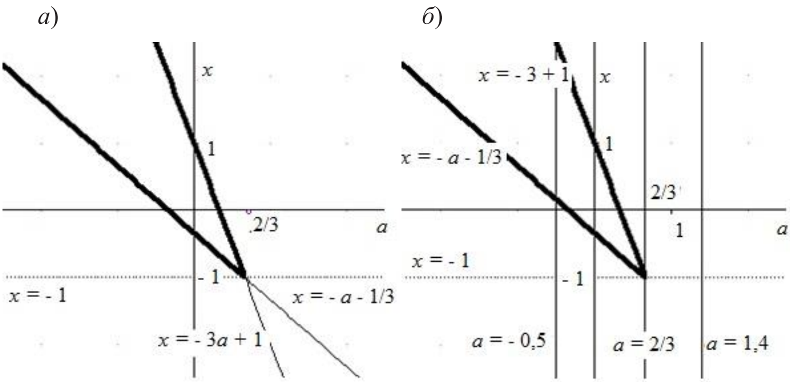


Рис. 5.6

Уравнение (5.5) имеет столько решений, сколько общих точек у вертикальной прямой $a = p$, где $p \in (-\infty;\ \infty)$, и семейства зависимостей вида $x = f(a)$, заданных неявно уравнением $F(a; x) = |2x + 3a| - x - 1 = 0$ (на рис. 5.6, *б* показаны отдельные представители вертикальных прямых $a = p$ для конкретных значений параметра a).

Преимуществом третьего способа по сравнению со вторым является то, что:

1) графики зависимостей, соответствующие исходному уравнению, «неподвижны», а значит, сразу можно понять общий вид графического образа уравнения;

2) из рисунка однозначно следует количество решений в зависимости от значений параметра;

3) можно однозначно установить аналитическое представление самих решений, выраженных через параметр;

4) используя рисунок, легко установить пределы изменения параметра a, соответствующие тому или иному решению.

Четвертый способ решения. В уравнении $|2x + 3a| = x + 1$ перенесем все выражения влево: $|2x + 3a| - x - 1 = 0$.

Рассмотрим функцию двух переменных:

$$F(x;\, y) = |2x + 3a| - x - 1 = 0, \tag{5.6}$$

где переменная x есть функция от параметра a: $x = f(a)$; переменная y – любое действительное число. Тогда решениями уравнения (5.6) являются пары точек вида $(x;\ y)$, графиками которых будут вертикальные прямые.

Так как при $x < -1$ уравнение $|2x + 3a| = x + 1$ не имеет смысла, то логично рассмотреть его при $x = -1$. Имеем: $|-2 + 3a| = 0$, $a = \dfrac{2}{3}$.

Значит, при $a = \dfrac{2}{3}$ уравнение (5.6) имеет единственное решение $x = -1$, а при переходе значения параметра a через величину $a = \dfrac{2}{3}$ количество решений исходного уравнения изменяется. В системе координат xOy единственное решение соответствует единственной вертикальной прямой $x = -1$ (рис. 5.7, a).

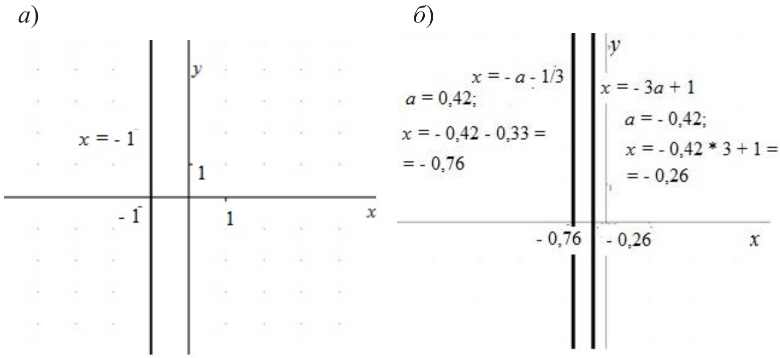


Рис. 5.7

По определению модуля и с учетом условия, что $x \geq -1$, имеем два решения: $x = -3a + 1$, $x = -a - \dfrac{1}{3}$. В системе координат

xOy эти решения соответствуют двум вертикальным прямым (рис. 5.7, *б*), которые располагаются правее прямой $x = -1$. Чтобы выяснить, каким значением параметра a найденные решения отвечают, можно в неравенство $x \geq -1$, подставить выражения $x = -3a + 1$ или $x = -a - \dfrac{1}{3}$. В результате получим значение параметра $a < \dfrac{2}{3}$. Очевидно также то, что при $a > \dfrac{2}{3}$ уравнение не имеет решений.

При решении уравнений с модулем и параметром иногда полезно возводить левую и правую часть в квадрат, так как $|x|^2 = x^2$. Проиллюстрируем этот способ решения уравнений с параметром, содержащих модуль.

Пятый способ решения. Возведем в квадрат левую и правую часть уравнения $|2x + 3a| = x + 1$. При этом учтем, что правая часть уравнения должна быть неотрицательной:

$$|2x + 3a| = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ (2x + 3a)^2 = (x + 1)^2. \end{cases}$$

После упрощений получим:

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ 3x^2 + 2x(6a - 1) + 9a^2 - 1 = 0. \end{cases} \qquad (5.7)$$

В системе (5.7) второе уравнение квадратное. Найдем его дискриминант.

$$\frac{D}{4} = (6a - 1)^2 - 3(9a^2 - 1) = (3a - 2)^2.$$

Найдем корни квадратного уравнения.

$$x_{1,2} = \frac{-(6a - 1) \pm (3a - 2)}{3} \text{ или } x_1 = -a - \frac{1}{3},\ x_2 = -3a + 1.$$

Вернемся к системе (5.7) и перепишем ее так:

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x = -a - \dfrac{1}{3};\ x = -3a + 1. \end{cases}$$

Значит, при $x \geq -1$ уравнение $|2x + 3a| = x + 1$ имеет два решения: $x = -a - \dfrac{1}{3}$, $x = -3a + 1.$. Выясним, каким значениям параметра a соответствуют такие решения. Для этого в неравенство $x \geq -1$ подставим вместо переменной x выражение $x = -a - \dfrac{1}{3}$:

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ -a - \dfrac{1}{3} \geq -1, \end{cases} \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}.$$

При $E = -1$ и $x = -a - \dfrac{1}{3}$ имеем: $a = \dfrac{2}{3}$.

Ответ: при $a \in \left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right)$ уравнение имеет два решения: $x = -a - \dfrac{1}{3}$, $x = -3a + 1$; при $a = \dfrac{2}{3}$ имеет единственное решение: $x = -1$; при $a \in \left(\dfrac{2}{3}; \infty\right)$ уравнение не имеет решений.

Пример 5.3. Решить уравнение и установить количество решений в зависимости от значений параметра a:

$$|x + a - 3| + 1 = |x - 2|. \tag{5.8}$$

Первый способ решения. Область допустимых значений переменной x и переменной (параметра) a все числа. Решим уравнение графически в системе координат xOy. Обозначим левую и правую часть уравнения так: $y = |x + a - 3| + 1$, $y = |x - 2|$. Графиком функции $y = \left| x - 2 \right|$ является ломаная линия, состоящая из двух звеньев (лучей), точка «излома» которой имеет координаты (2; 0) (рис. 5.8). Графиком другой функции $y = \left| x + a - 3 \right| + 1$ является ломаная линия, состоящая тоже из двух звеньев (лучей), точка «излома» которой $(x; 1)$ скользит вдоль горизонтальной прямой $y = 1$ (см. рис. 5.8).

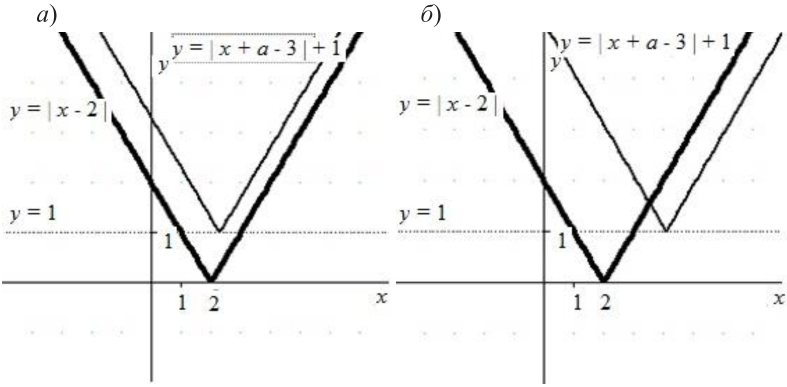


Рис. 5.8

Используя рис. 5.8 как опору для рассуждений, можно провести такое учебное исследование:

1) сколько общих точек могут иметь графики функций $y = \left| x + a - 3 \right| + 1$, $y = \left| x - 2 \right|$ в зависимости от значений параметра a?

2) сколько решений может иметь исходное уравнение в зависимости от значений параметра?

В результате проведенного эксперимента можно выдвинуть гипотезу. Лучи ломаной линии, заданной уравнением $y = \left| x - 2 \right|$, параллельны лучам ломаной, заданной уравнением $y = \left| x + a - 3 \right| + 1$. Это означает, что среди всех возможных подвижных графиков функции $y = \left| x + a - 3 \right| + 1$ могут найтись и такие, у которых некоторые точки графика совпадают с точками графика функции $y = |x - 2|$. Например, могут совпадать точки графика I и $y = |x - 2|$ (рис. 5.9, *а*).

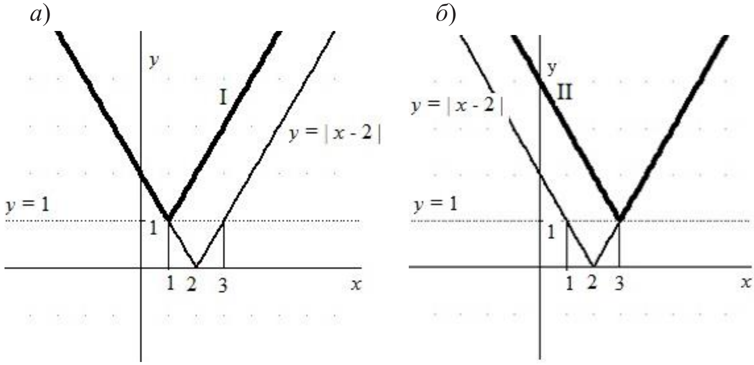


Рис. 5.9

В этом случае точка с координатами (1; 1) принадлежит графику $y = |x + a - 3| + 1$. Поэтому $|1 + a - 3| + 1 = 1$, $a = 2$. Если совпадают точки графика II и $y = |x - 2|$ (см. рис. 5.9, *б*), то тогда точка с координатами $(3; 1)$ принадлежит графику функции $y = |x + a - 3| + 1$. Поэтому $|3 + a - 3| + 1 = 1$, $a = 0$. Итак, если $a = 2$, $a = 0$, то уравнение (5.8) имеет бесконечное множество решений.

Проведенное исследование также может навести на мысль, что при определенном значении параметра *а* «подвижный» график функции $y = |x + a - 3| + 1$ и «статический» график функции $y = |x - 2|$ могут не иметь общих точек (рис. 5.9, *а*), а значит, и уравнение (5.8) не иметь решений, либо иметь только одну общую точку, а значит, и уравнение имеет единственное решение.

Найденными ранее значениями параметра $a = 2$, $a = 0$ вся числовая ось делится на три частичных промежутка: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; \infty)$. Выясним, на каких из этих промежутков уравнение имеет единственное решение, а на каких решений нет. Для данного уравнения ответ очевиден: если $a \in (0; 2)$, то уравнение не имеет решений; если $a \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$, то уравнение имеет одно решение. Для установления аналитического выражения этих решений перейдем к другому способу.

Второй способ решения. Решим уравнение координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. Проведем эквивалентные преобразования. Перенесем все выражения влево и приравняем уравнение к нулю: $\left|x+a-3\right|+1-\left|x-2\right|=0.$ Рассмотрим функцию двух переменных, заданную неявно уравнением

$$F(a; x) = \left|x+a-3\right|+1-\left|x-2\right|=0. \qquad (5.9)$$

Решить уравнение (5.8) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(a),\ x_2 = f_2(a),\ \ldots,\ x_k = f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a.

Проведем равносильные преобразования. Правая часть уравнения (5.8) положительна, поэтому по определению модуля имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x-2=|x+a-3|+1, \\ x-2=-|x+a-3|-1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x+a-3|=x-3, \\ |x+a-3|=-x+1. \end{array}\right.$$

Раскроем второе подмодульное выражение $\left|x+a-3\right|$:

$$\begin{cases} x-3\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+a-3=x-3, \\ x+a-3=-x+3 \end{array}\right. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -x+1\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+a-3=-x+1, \\ x+a-3=x-1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Имеем совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x\ge 3, \\ \left[\begin{array}{l} a=0, \\ x=-0,5a+3 \end{array}\right. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\le 1, \\ \left[\begin{array}{l} a=2, \\ x=-0,5a+2. \end{array}\right. \end{cases} \qquad (5.10)$$

Построим в системе координат aOx, где Oa – ось абсцисс, Ox – ось ординат, графики функций $a = 0$ и $x = -0{,}5a + 3$ на области изменения переменной x ($x \geq 3$) и две другие зависимости $a = 2$ и $x = -0{,}5a + 2$ на области изменения переменной x ($x \leq 1$) (рис. 5.10). Область изменения параметра a можно найти, используя рисунок.

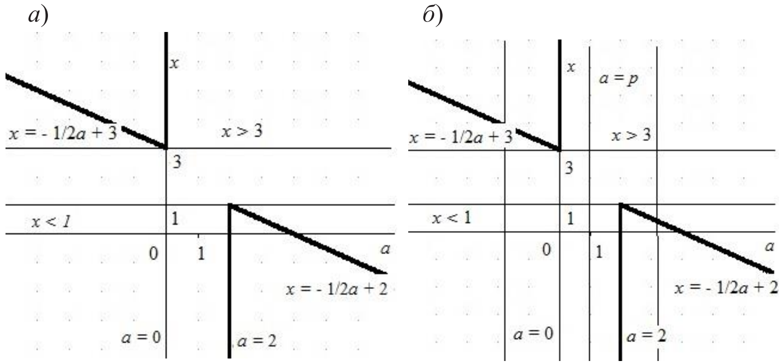


Рис. 5.10

Уравнение $F(a; x) = \left| x + a - 3 \right| + 1 - \left| x - 2 \right| = 0$ будет иметь столько решений, сколько раз вертикальная прямая $a = p$ пересечет графики зависимостей, заданных совокупностью (5.10). На рис. 5.10, *б* показаны отдельные положения прямой $a = p$ для различных значений параметра a.

Используя рис. 5.10, *б*, можно выяснить, что уравнение может иметь одно, два решения либо не иметь решений. Также легко установить аналитическое выражение решений уравнения (5.9).

Имеем: если $a = 0$, то уравнение (5.9) имеет бесконечное множество решений: $x \in [3; \infty)$; если $a = 2$, то имеем бесконечное множество решений: $x \in (-\infty; 1]$; если $a \in (0; 2)$, то решений нет; если $a \in (-\infty; 0)$, то имеем единственное решение: $x = -0{,}5a + 3$; если $a \in (2; \infty)$, то имеем единственное решение: $x = -0{,}5a + 2$.

Третий способ решения. Решим уравнение $|x+a-3|+1=|x-2|$ аналитически. Вернемся к записи (5.10):

$$\begin{cases} x \ge 3, \\ \left[\begin{array}{l} a=0, \\ x=-0,5a+3 \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \le 1, \\ \left[\begin{array}{l} a=2, \\ x=-0,5a+2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Данную совокупность систем можно трактовать так. Для области изменения переменной x $(x \ge 3)$ имеем два независимых решения: $a=0$ и $x=-0,5a+3$. Значит, при $a=0$ имеем бесконечное множество решений $x \in [3;\infty)$. Выясним, при каком значении параметра a возможно решение $x=-0,5a+3$. Для этого решим систему

$$\begin{cases} x>3, \\ x=-0,5a+3, \end{cases} \Rightarrow -0,5a+3>3,\ a<0.$$

Значит, при $a<0$ имеем единственное решение $x=-0,5a+3$.

Для области изменения переменной x $(x \le 1)$ имеем два независимых решения: $a=2$ и $x=-0,5a+2$. Значит, при $a=2$ имеем бесконечное множество решений $x \in (-\infty;1]$. Выясним, при каком значении параметра a возможно решение $x=-0,5a+2$. Для этого решим систему

$$\begin{cases} x<1, \\ x=-0,5a+2, \end{cases} \Rightarrow -0,5a+2<1,\ a>2.$$

Ответ: если $a=0$, то уравнение (5.9) имеет бесконечное множество решений: $x \in [3;\infty)$; если $a = 2$, то имеем бесконечное множество решений: $x \in (-\infty;1]$; если $a \in (0;2)$, то решений нет; если $a \in (-\infty;0)$, то имеем единственное решение: $x=-0,5a+3$; если $a \in (2;\infty)$, то имеем единственное решение: $x=-0,5a+2$.

Пример 5.4. Решить уравнение

$$\big|2-|x|\big| = x+a. \tag{5.11}$$

Найти количество решений в зависимости от значений параметра a.

Первый способ решения. В системе координат xOy построим графики явно заданных однозначных функций $y = \left|2 - |x|\right|$, $y = x + a$. График первой функции построим, используя такую цепочку элементарных преобразований: $y = |x|$, $y = -|x|$, $y = 2 - |x|$, $y = \left|2 - |x|\right|$, рис. 5.11.

а) *б*)

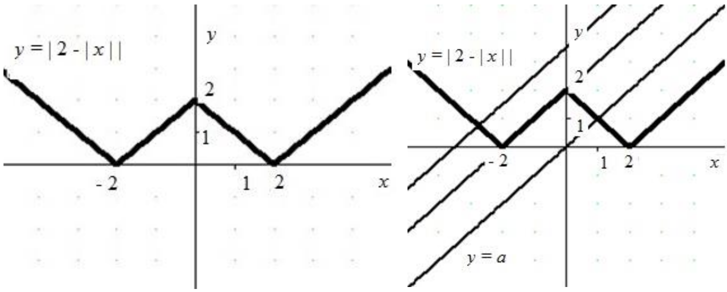


Рис. 5.11

Зависимость $y = x + a$ описывает семейство прямых, параллельных прямой $y = x$. Используя рис. 5.11 как графическую опору для рассуждений, можно провести учебное исследование:

1) сколько общих точек может быть на графиках функций $y = \left|2 - |x|\right|$ и $y = x + a$ в зависимости от значений параметра a?

2) сколько решений может иметь уравнение в зависимости от значений параметра?

В результате эксперимента можно установить, что если $a = 2$ или $a = -2$, то имеем бесконечное множество решений, так как точки части графиков $y = \left|2 - |x|\right|$ и $y = x + a$ совпадают (рис. 5.11, *б*); если $a \in (-2; 2) \cup (2; \infty)$, то уравнение имеет единственное решение, так как на графиках $y = \left|2 - |x|\right|$ и $y = x + a$ будет единственная общая точка; если $a \in (-\infty; -2)$, то решений нет, так как на графиках функций $y = \left|2 - |x|\right|$ и $y = x + a$ нет общих точек. Выяснение аналитического вида решений требует дополнительного исследования.

Второй способ решения. Решим уравнение координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. Проведем эквивалентные преобразования. Перенесем все выражения влево и приравняем уравнение к нулю: $\left|2 - |x|\right| - x - a = 0$. Рассмотрим функцию двух переменных, заданную неявно уравнением

$$F(a; x) = \left|2 - |x|\right| - x - a = 0. \qquad (5.12)$$

Решить уравнение (5.12) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(a),\ x_2 = f_2(a),\ \ldots,\ x_k = f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a. По определению модуля имеем:

$$|2 - |x|| = a + x \Rightarrow \begin{cases} x < 0, \\ |2 + x| = a + x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \ge 0, \\ |2 - x| = a + x. \end{cases}$$

Раскроем «внешний» модуль уравнения:

$$\text{если } \begin{cases} x < 0, \\ a + x \ge 0, \end{cases} \text{ то } \left[\begin{array}{l} 2 + x = a + x, \\ 2 + x = -a - x, \end{array}\right.$$

$$\text{если } \begin{cases} x \ge 0, \\ a + x \ge 0, \end{cases} \text{ то } \left[\begin{array}{l} 2 - x = a + x, \\ 2 - x = -a - x. \end{array}\right.$$

Перепишем каждую из четырех систем так:

$$\begin{cases} x < 0, \\ x \ge -a, \\ a = 2, \end{cases} \ldots \begin{cases} x < 0, \\ x \ge -a, \\ x = -0{,}5 \cdot a - 1. \end{cases} \ldots \begin{cases} x \ge 0, \\ x \ge -a, \\ a = -2, \end{cases} \ldots \begin{cases} x \ge 0, \\ x \ge -a, \\ x = -0{,}5 \cdot a + 1. \end{cases} \qquad (5.13)$$

Рассмотрим первую систему совокупности (5.13): подставим $a = 2$ во второе неравенство $x > -a$, тогда $x > -2.$. Итак, если $-2 < x < 0$, то $a = 2$. Аналогично в каждой из четырех систем необходимо подставить в неравенство значения параметра a (предварительно выразив его для второй и четвертой системы, например $x = -0{,}5 \cdot a - 1$, тогда $a = -2x - 1$). Окончательно получим совокупность таких выражений:

$$\left[\begin{array}{ll} x = -0{,}5a - 1, & \text{если } \ x < -2, \\ a = 2, & \text{если } \ -2 \le x < 0, \\ x = -0{,}5a + 1, & \text{если } \ 0 < x < 2, \\ a = -2, & \text{если } \ x \ge 2. \end{array}\right.$$

Изобразим в системе координат aOx (рис. 5.12, a) графики семейства зависимостей $x = f(a)$, заданных уравнением $F(a; x) = \left| 2 - |x| \right| - x - a = 0$, с учетом области изменения переменной x.

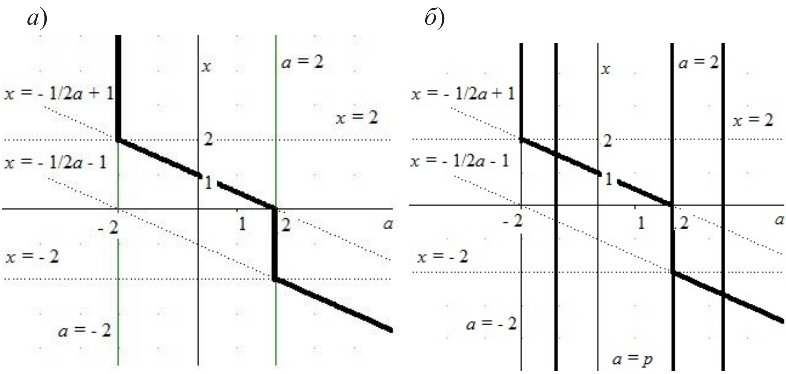


Рис. 5.12

Уравнение $F(a; x) = \left| 2 - |E| \right| - E - 0 = 0$ будет иметь столько решений, сколько раз вертикальная прямая $a = p$ пересечет графики зависимостей, заданных совокупностью (5.13). На рис. 5.12, *б* показаны отдельные положения прямой $a = p$ для различных значений параметра a. Можно провести исследование количества решений уравнения:

1) выясним, при каком значении параметра a график вертикальной прямой $a = p$ пересекает, частично совпадает, не пересекает графики семейства зависимостей вида $x = f(a)$, заданных уравнением (5.13);

2) сколько решений (и какого аналитического выражения) может иметь уравнение в зависимости от значений параметра a?

Используя графический образ уравнения (рис. 5.12) как опору для рассуждений, можно выяснить, что уравнение может иметь одно, бесконечное множество решений либо не иметь их вовсе. Также легко установить аналитическое выражение решений уравнения (5.12).

Окончательно имеем: если $a \in (-\infty; -2)$, то уравнение не имеет решений; если $a = -2$, то решений бесконечное множество: $x \in \big(2; \infty\big)$; если $a \in (-2; 2)$, то уравнение имеет единственное решение: $x = -\frac{1}{2}a + 1$, если $a = 2$, то имеем бесконечное множество решений: $x \in \big(-2; 0\big)$; если $a \in (2; \infty)$, то уравнение имеет единственное решение: $x = -0{,}5a - 1$.

Третий способ решения. Рассмотрим уравнение $\big|2 - |x|\big| = x + a$. Перепишем его так:

$$\left[\begin{array}{ll} x = -0{,}5a - 1, & \text{если } \ x < -2, \\ a = 2, & \text{если } \ -2 \le x < 0, \\ x = -0{,}5a + 1, & \text{если } \ 0 \le x < 2, \\ a = -2, & \text{если } \ x \ge 2. \end{array}\right.$$

Рассмотрим первую строчку совокупности: $x = -0{,}5a - 1$, если $x < -2$. Чтобы найти, при каком значении параметра a возможно решение $x = -0{,}5a - 1$, необходимо в неравенство $x < -2$ вместо переменной x подставить выражение $x = -0{,}5a - 1$ и решить полученное неравенство относительно параметра a. В результате описанных действий получим область изменений параметра a: $a \in (2;\, \infty)$, при этом уравнение $\left|2 - |x|\right| = x + a$ имеет единственное решение.

Рассмотрим вторую строчку совокупности: $a = 2$, тогда двойное неравенство $-2 \le x \le 0$ можно трактовать так: если $a = 2$, то переменная x принимает значения из промежутка [–2; 0], исходное уравнение имеет множество решений.

Чтобы найти, при каком значении параметра a возможно решение $x = 0{,}5a + 1$ (см. третью строчку совокупности), необходимо в двойное неравенство $0 < x < 2$ вместо переменной x подставить выражение $x = 0{,}5a + 1$ и решить его относительно переменной (параметра) a. В результате получим: $a \in (-2;\, 2)$, а уравнение имеет единственное решение.

Если $a = -2$, переменная x принимает значения из промежутка $(2;\, \infty)$, уравнение имеет множество решений.

Ответ: если $a \in (-\infty;\, -2)$, то уравнение не имеет решений; если $a = -2$, то решений бесконечное множество: $x \in [2;\, \infty)$; если $a \in (-2;\, 2)$, то уравнение имеет единственное решение: $x = -\dfrac{1}{2}a + 1$; если $a = 2$, то имеем бесконечное множество решений: $x \in [-2;\, 0]$; если $a \in (2;\, \infty)$, то уравнение имеет единственное решение: $x = -0{,}5a - 1$.

Пример 5.5. Решить уравнение

$$\left|\,|x - 3| + a\,\right| = 1. \tag{5.14}$$

Первый способ решения. В системе координат xOy построим графики явно заданных однозначных функций $y = \left|\,|x-3| + a\,\right|$, $y = 1$. Для построения графика функции $y = \left|\,|x-3| + a\,\right|$ используем такую цепочку преобразований:

$$y = |x| \to y = |x - 3| \to y = |x - 3| + a \to y = \left|\,|x - 3| + a\,\right|.$$

Сложность построения функции $y = \left| |x-3| + a \right|$ заключается в том, что ее график является не только «подвижным», но и таким, что изменяет свой графический образ при разных значениях параметра *a*. Так, при *a* = 0 имеем график функции $y = |x-3|$, минимум которого находится в точке (3; 0) (рис. 5.13, *а*). При отрицательном значении параметра *a*, например *a* = –2, графический образ функции $y = \left| |x-3| + a \right|$ напоминает латинскую букву *W* (рис. 5.13, *б*) и т. д.

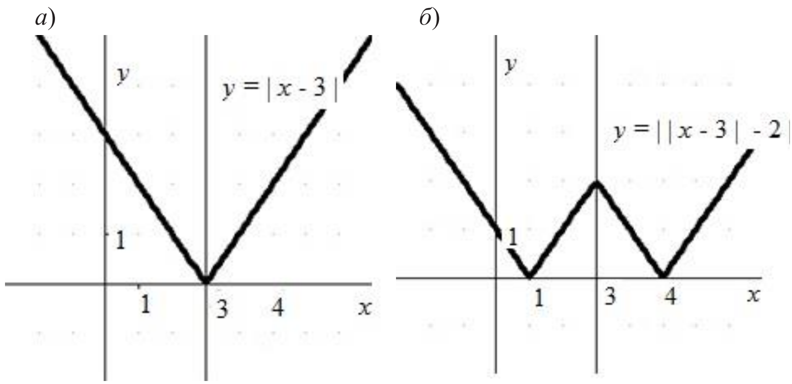


Рис. 5.13

При положительном значении параметра *a*, например $a = 3$, график функции $y = \left| |x-3| + 3 \right|$ представляет «угол», точка минимума которого расположена выше оси *Ox* и имеет координаты (3;3) (рис. 5.14, *а*).

Общим для графиков вида $y = \left| |x-3| + a \right|$ является то, что все они имеют общую ось симметрии *x* = 3. Из приведенных рассуждений крайне затруднительно установить, сколько общих точек может иметь график функции $y = \left| |x-3| + a \right|$ и прямая $y = 1$. А ведь еще нужно найти значение параметра для каждого конкретного решения. Очевидно, что такое графическое представление уравнения $\left| |x-3| + a \right| = 1$ является не очень удачным.

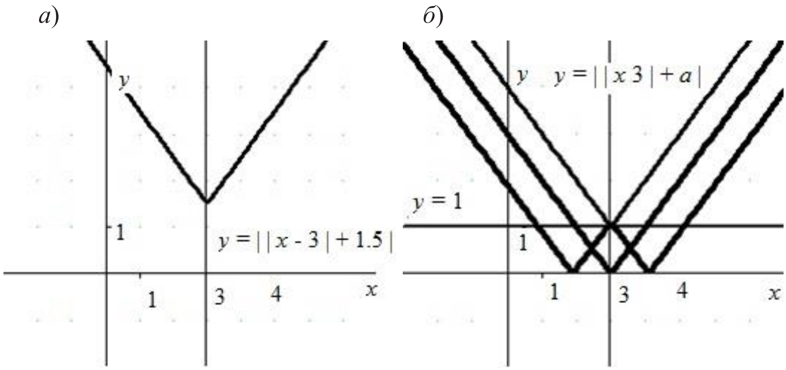


Рис. 5.14

Попробуем подойти к построению графического образа уравнения $\left|\left|x-3\right|+a\right|=1$ в системе координат xOy иначе.

Второй способ решения. По определению модуля имеем:

$$\left|\left|x-3\right|+a\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x-3\right|+a=1, \\ \left|x-3\right|+a=-1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\left|x-3\right|+1, \\ a=-\left|x-3\right|-1. \end{array}\right.$$

Так как левая часть обоих уравнений одинакова, то введем функции $y=a$, $y=-\left|x-3\right|+1$, $y=-\left|x-3\right|-1$ и построим их в системе координат xOy. Функцию $y=-\left|x-3\right|+1$ можно получить из $y=\left|x-3\right|$ путем таких элементарных преобразований: $y=\left|x-3\right| \rightarrow y=-\left|x-3\right| \rightarrow y=-\left|x-3\right|+1$. Ее график – это «угол», максимум которого находится в точке $(3;\, 1)$. Другую функцию можно получить путем аналогичных преобразований: $y=\left|x-3\right| \rightarrow y=-\left|x-3\right|-1$. Графиком этой функции тоже является «угол», максимум которого находится в точке $(3;\, -1)$.

В результате общий геометрический образ уравнения $\left|\left|x-3\right|+a\right|=1$ будет таким, как показано на рис. 5.15, *а*.

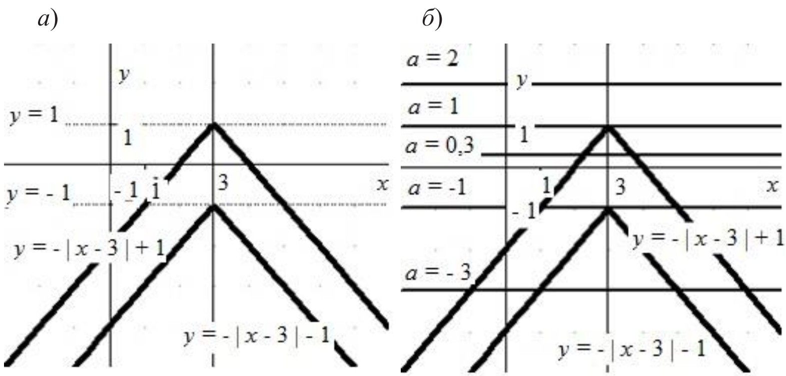


Рис. 5.15

В отличие от предыдущего способа решения в данном случае графики функций $y = f(x)$ являются уже «статическими», а «подвижной» будет прямая $y = a$ (отдельные представители семейства прямых показаны на рис. 5.15, *б*). Только теперь будем учитывать общее количество точек обоих графиков функций $y = -|x-3|+1$, $y = -|x-3|-1$ и прямой $y = a$.

Данной графической опоры достаточно, чтобы провести учебный эксперимент:

1) сколько общих точек может быть у графиков функций $y = -|x-3|+1$, $y = -|x-3|-1$ и прямой $y = a$?

2) сколько решений имеет исходное уравнение в зависимости от значений параметра a?

Опираясь на проведенное исследование, можно установить, что: если $a \in (-\infty;\ -1)$, то будет четыре решения; если $a \in (-1; 1)$, то решений два; если $a = -1$, то решений три; если $a = -1$, то решение одно; если $a \in (1; \infty)$, то решений нет. Выяснение же аналитического вида решений требует дополнительных рассуждений.

Третий способ решения. Решим уравнение координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. Проведем эквивалентные преобразования. Перенесем все выражения влево и приравняем уравнение к нулю: $\left| \left| x-3 \right| + a \right| = 1$. Рассмотрим функцию двух переменных, заданную неявно уравнением

$$F(a;\, x) = \left| \left| x-3 \right| + a \right| - 1 = 0. \tag{5.15}$$

Решить уравнение (5.15) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(a)$, $x_2 = f_2(a)$, …, $x_k = f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a. По определению модуля имеем:

$$\left| \left| x-3 \right| + a \right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left| x-3 \right| + a = 1, \\ \left| x-3 \right| + a = -1, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left| x-3 \right| = 1-a, \\ \left| x-3 \right| = -1-a. \end{array} \right.$$

Раскроем подмодульное выражение $\left| x-3 \right|$ для каждого из уравнений совокупности:

$$\left| x-3 \right| = 1-a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 3, \\ x = a+2, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3, \\ x = -a+4 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{или } \left| x-3 \right| = -1-a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 3, \\ x = a+4, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3, \\ x = -a+2. \end{cases} \end{array} \right. \tag{5.16}$$

Изобразим в системе координат aOx (рис. 5.16, *а*) графики семейства зависимостей $x = f(a)$, неявно заданных уравнением (5.15), с учетом каждой из областей существования переменной x. Область изменения переменной (параметра) a можно установить, используя рисунки.

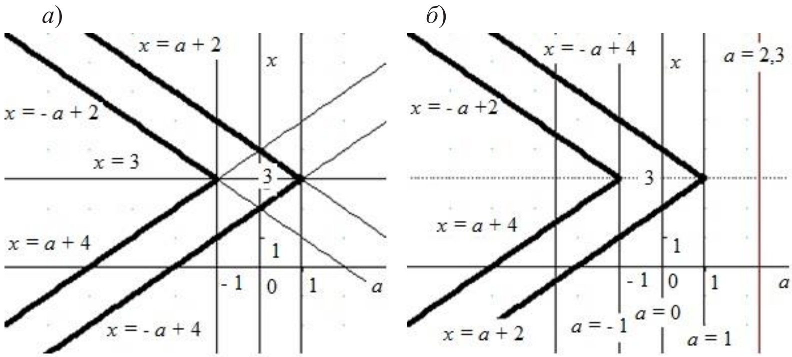


Рис. 5.16

Уравнение $F(a;x) = \left|\left|x-3\right|+a\right|-1=0$ имеет столько решений, сколько раз вертикальная прямая $a = p$ пересечет графики зависимостей, заданных совокупностью (5.16). На рис. 5.16, *б* показаны отдельные положения прямой $a = p$ для различных значений параметра *a*. Можно провести исследование количества решений уравнения:

1) выясним, при каком значении параметра *a* график вертикальной прямой $a = p$ пересекает обе ломаные в одной, двух, трех, четырех точках, не пересекает их;

2) сколько решений и какого аналитического вида может иметь уравнение (5.15) в зависимости от значений параметра *a*?

Используя графический образ уравнения (см. рис. 5.16, *б*) как опору для рассуждений, можно выяснить, что уравнение может иметь одно, бесконечное множество решений либо не иметь их вовсе. Также легко установить аналитическое выражение решений уравнения (5.15).

Если $a \in (-\infty; -1)$, то имеем четыре решения: $x = -a+4$, $x = -a+2$, $x = a+2$, $x = a+4$; если $a \in (-1;\ 1)$, то решений два: $x = -a+4$, $x = a+2$; если $a = -1$, то решений три: $x = -a+4$, $x = a+2$, $x = 3$; если $a = 1$, то решение одно: $x = 3$; если $a \in (1;\ \infty)$, то решений нет.

Четвертый способ решения. Для нахождения количества решений уравнения в зависимости от значений параметра a применим аналитический метод, а именно метод оценки левой и правой части уравнения. Вновь рассмотрим уравнение

$$\left| |x-3| + a \right| = 1.$$

Раскроем «внешний» модуль по определению и перенесем параметр a вправо:

$$\left| |x-3| + a \right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-3| = 1-a, \\ |x-3| = -1-a. \end{array} \right. \qquad (5.17)$$

Левая часть каждого из уравнений совокупности (5.17) содержит выражение $|x-3|$, поэтому правая часть каждого из уравнений ограничена. Уравнения совокупности (5.17) не имеют смысла (а значит, решений), если правая часть отрицательна; имеют по одному решению, если правая часть равна нулю; имеют по два решения, если правая часть положительна.

Рассмотрим случай, когда правая часть уравнений обращается в нуль. Для первого уравнения $|x-3| = 1-a$ имеем: $1-a=0,\ a=1$. Значит, при $a=-1$ уравнение $|x-3| = 1-a$ имеет единственное решение. Для второго уравнения $|x-3| = -a-1$ имеем: $-1-a=0,\ a=-1$. Значит, при $a=-1$ уравнение $|x-3| = -a-1$ имеет единственное решение.

Рассмотрим случай, когда каждое из уравнений совокупности (5.17) имеет по два решения. Уравнение $|x-3| = 1-a$ будет иметь два решения, если $1-a>0,\ a<1$. Уравнение $|x-3| = -1-a$ будет иметь два решения, если $-1-a>0,\ a<-1$.

Числами $a=-1$ и $a=1$ вся параметрическая прямая a разбивается на три частичные области, на каждой из которых уравнения совокупности (5.17) имеют разное количество решений. Так как нам необходимо рассматривать решения этих уравнений одновременно, то для удобства рассуждений обратимся к такой схеме (см. таблицу ниже).

Уравнение	Количество решений на частичных областях				
	$a \in (-\infty; -1)$	$a = -1$	$a \in (-1; 1)$	$a = 1$	$a \in (1; \infty)$
$\lvert x-3 \rvert = 1-a$	2 решения	2 решения	2 решения	1 решение	Нет решений
$\lvert x-3 \rvert = -1-a$	2 решения	1 решение	Нет решений	Нет решений	Нет решений
$\lvert \lvert x-3 \rvert + a \rvert = 1$	4 решения	3 решения	2 решения	1 решение	Нет решений

В результате получим: если $a \in (-\infty; -1)$, то уравнение $\lvert \lvert x-3 \rvert + a \rvert = 1$ имеет четыре решения; если $a = -1$, то имеем три решения; если $a \in (-1; 1)$, то два решения; если $a = 1$, то одно решение; если $a \in (1; \infty)$, то решений нет.

Пятый способ решения. Рассмотрим уравнение $\lvert \lvert x-3 \rvert + a \rvert = 1$ и преобразуем его так:

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 3, \\ x = 0 + 2, \end{cases} \begin{cases} x \geq 3 \\ x = -a + 4, \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 3 \\ x = a + 4, \end{cases} \begin{cases} x \geq 3, \\ x = -a + 4. \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Рассмотрим каждую систему совокупности отдельно. Найдем, для каких значений параметра a выполняется условие $\begin{cases} x < 3, \\ x = a + 2. \end{cases}$

$$\begin{cases} x < 3, \\ x = a + 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x = a + 2, \\ a + 2 < 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x = a + 2, \\ a < 1. \end{cases}$$

Значит, если $a<1$, то уравнение (5.15) имеет решение $x=a+2$.

Аналогично найдем, для каких значений параметра a выполняется условие $\begin{cases} x<3, \\ x=a+4. \end{cases}$

$$\begin{cases} x<3, \\ x=a+4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3, \\ x=a+4, \\ a+4<3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3, \\ x=a+4, \\ a<-1. \end{cases}$$

Значит, если $a<-1$, то уравнение (5.15) имеет решение $x=a+4$.

Найдем, для каких значений параметра a выполняется условие $\begin{cases} x\geq 3, \\ x=-a+2. \end{cases}$

$$\begin{cases} x\geq 3, \\ x=-a+2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 3, \\ x=-a+2, \\ -a+2\geq 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 3, \\ x=-a+2, \\ a\leq -1. \end{cases}$$

Значит, если $a\leq -1$, то уравнение (5.15) имеет решение $x=-a+2$.

Найдем, для каких значений параметра a выполняется условие

$$\begin{cases} x\geq 3, \\ x=-a+4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 3, \\ x=-a+4, \\ -a+4\geq 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 3, \\ x=-a+4, \\ a\leq 1. \end{cases}$$

Значит, если $a\leq 1$, то уравнение (5.15) имеет решение $x=-a+4$.

Чтобы определить количество решений исходного уравнения в зависимости от значений параметра a, возьмем параметрическую ось Oa, на которой расположим в порядке возрастания граничные значения параметра $a=-1, a=1$. Этими значениями вся числовая ось делится на частичные промежутки $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; \infty)$. Туда также внесем количество и сами решения для каждого из промежутков (рис. 5.17).

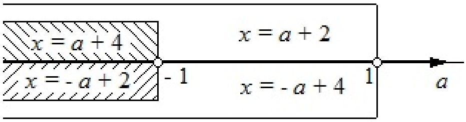


Рис. 5.17

Используя схему рис. 5.17, можно получить окончательный ответ.

Ответ: если $a \in (-\infty; -1)$, то имеем четыре решения: $x = -a + 4$, $x = -a + 2$, $x = a + 2$, $x = a + 4$; если $a \in (-1; 1)$, то решений два: $x = -a + 4$, $x = a + 2$; если $a = -1$, то решений три: $x = -a + 4$, $x = a + 2$, $x = 3$; если $a = 1$, то решение одно: $x = 3$; если $a \in (1; \infty)$, то решений нет.

5.2. Упражнения для самостоятельного решения

Задания. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от действительных значений параметра a.

1.а. $|x-3| + |2x-1| - |x-2| = a$.

Ответ: если $a \in (-\infty; 1)$, то решений нет; если $a = 1$, то единственное решение: $x = 0{,}5$; если $a \in (1; 4)$, то решений два: $x = -0{,}5a + 1$ и $x = 0{,}5a$; если $a = 4$, то решений бесконечное множество: $x \in [2; 3]$; если $a \in (4; \infty)$, то решений два: $x = -0{,}5a + 1$ и $x = 0{,}5a + 1$.

1.б. $|2x+2| - |x-1| - |x| = 2a$.

Ответ: если $a \in (-\infty; -1{,}5)$, то решений нет; если $a = -1{,}5$, то решений бесконечное множество: $x \in (-\infty; -1]$; если $a \in (-1{,}5; 0{,}5]$, то уравнение имеет единственное решение: $x = 0{,}5a - 0{,}25$; если $a \in [0{,}5; 1{,}5)$, то уравнение имеет единственное решение: $x = a - 0,5$; если $a = 1,5$, то имеем бесконечное множество решений: $x \in [1; \infty)$; если $a \in (1,5; \infty)$, то решений нет.

1.в. $|x| + |2x-5| - |2x-4| = 3a.$

Ответ: если $a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$, то решений нет; если $a \in \left(\dfrac{1}{3}; 0,5\right)$ то решений два: $x = -3a+1$ и $x = 3a-1$; если $a = \dfrac{1}{3}$, то решение единственное: x = 0; если $a = 0,5$, то решений три: $x = -3a+1$, $x = 2,5$, $x = 3a+1$; если $a \in (0,5; 1)$, то решений четыре: $x = -3a+1$, $x = 3a-1$, $x = 3a+1$; $x = -a+3$; если a = 1, то решений три: $x = 2$, $x = 3a+1$; $x > 3$,; если $a \in (1; \infty)$, то решений два: $x = -3a+1$, $|x-3| + |2x-3| - |x-2| - 2a = 0.$

2.а. $|2x+a| = x+2.$

Ответ: если $a \in (-\infty; 4)$, то решений два: $x = -a+2$ и $x = -\dfrac{1}{3}a - \dfrac{2}{3}$; если $a = 4$, то решение одно: x = –2; если $a \in (4; \infty)$, то решений нет.

2.б. $|a - 1,5x| = 1,5x+1.$

Ответ: если $a \in (-\infty; -1)$, то решений нет; если $a = -1$, то решений бесконечное множество: $x \in \left(-\dfrac{2}{3}; \infty\right)$; если $a \in (-1; \infty)$, то решение единственное: $x = \dfrac{1}{3} \cdot a - \dfrac{1}{3}$.

2.в. $|x-a| = 2x-1.$

Ответ: если $a \in (-\infty; 0,5]$, то решение единственное: $x = -a+1$; если $a \in [0,5; \infty)$, то единственное решение: $x = \dfrac{1}{3} \cdot a + \dfrac{1}{3}$.

3.а. $|2x-a| = |x+3| - 1.$

Ответ: если $a \in (-\infty; -8)$, то решений два: $x = \frac{1}{3} \cdot a - \frac{4}{3}$, $x = a + 4$; если $a = -8$, то решение одно: $x = -4$; если $a \in (-8; -4)$, то решений нет; если $a = -4$, то решение единственное: $x = -2$; если $a \in (-4; \infty)$, то решений два: $x = a + 2$, $x = \frac{1}{3} \cdot a - \frac{2}{3}$.

3.б. $|1{,}5 - x| = |a - x + 2| + 1.$

Ответ: если $a \in (-\infty; -1{,}5)$, то решение одно: $x = 0{,}5a + 1{,}25$; если $a = -1{,}5$, то решений бесконечное множество: $x \in (-\infty; 0{,}5]$; если $a \in (-1{,}5; 0{,}5)$, то решений нет; если $a = 0{,}5$, то решений бесконечное множество: $x \in [2{,}5; \infty]$; если $a \in (0{,}5; \infty)$, то решение единственное: $x = 0{,}5a + 2{,}25$.

4.а. $||x| - 1| = x - a.$

Ответ: если $a \in (-\infty; -1)$, то решение одно: $x = 0{,}5a - 0{,}5$; если $a = -1$, то решений бесконечное множество: $x \in [-1; 0]$; если $a \in (-1; 1)$, то решение единственное: $x = 0{,}5a + 0{,}5$; если $a = 1$, то решений бесконечное множество: $x \in [1; \infty)$; если $a \in (1; \infty)$, то решений нет.

4.б. $||2x| - 3| = a - x.$

Ответ: если $a \in (-\infty; -1{,}5)$, то решений нет; если $a = -1{,}5$, то решение единственное: $x = -1{,}5$; если $a \in (-1{,}5; 1{,}5)$, то решений два: $x = -a - 3$ и $x = \frac{1}{3} \cdot a - 1$; если $a = 1{,}5$, то решений три: $x = -a - 3$, $x = \frac{1}{3} \cdot a - 1$, $x = 1{,}5$; если $a \in (1{,}5; 3)$, то решений четыре: $x = -a - 3$, $x = \frac{1}{3} \cdot a - 1$, $x = -a + 3$, $x = \frac{1}{3} \cdot a + 1$; если $a \in (3; \infty)$, то решений два: $x = \frac{1}{3} \cdot a + 1$, $x = -a - 3$.

4.в. $||3x| + 1| = 3x + a.$

Ответ: если $a \in (-\infty; 1)$, то решений нет; если $a = 1$, то решений бесконечное множество: $x \in [1; \infty)$; если $a \in (1; \infty)$, то решение одно: $x = -\frac{1}{6} \cdot a + \frac{1}{6}$.

5.а. $\left| |x-2| + a \right| = 3$.

Ответ: если $a \in (-\infty; -3)$, то решений два: $x = a + 5$, $x = -a - 1$; если $a = -3$, то решений три: $x = -a + 5$, $x = a - 1$, $x = 2$; если $a \in (-3; 3)$, то решений два: $x = -a + 5$, $x = a - 1$; если $a = 3$, то решение одно: $x = 2$; если $a \in (3; \infty)$, то решений нет.

5.б. $\left| |2x+1| - 3a \right| = 2x + a$.

Ответ: если $a \in (-\infty; 0{,}25)$, то решений нет; если $a = 0{,}25$, то решений бесконечное множество: $x \in (-\frac{1}{8}; \infty)$; если $a \in (0{,}25; \infty)$, то решение единственное: $x = 0{,}5\, a - 0{,}25$.

Глава 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ МОДУЛЯМИ, СОДЕРЖАЩЕГО ПАРАМЕТР В ПРАВОЙ ЧАСТИ

6.1. Общий вид графика функции, содержащего два модуля

Как уже отмечалось, задачи, связанные с решением уравнений с параметрами, можно условно разделить на два вида: установить количество решений и найти сами решения в зависимости от значений параметра a.

Остановимся сначала на задачах, в которых необходимо найти количество решений уравнения, записанного в общем виде так:

$$|ax+b|+|ax-b|=f(x), \tag{6.1}$$

где a, b – действительные числа и $a \neq 0$, $b \neq 0$; параметр входит в выражение $f(x)$, стоящее в правой части уравнения.

Пусть $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = f(x)$. Рассмотрим левую часть уравнения (6.1). Для конкретности будем считать, что числа a, b положительные. Тогда при $x=\frac{b}{a}$ и $x=-\frac{b}{a}$ подмодульные выражения исходного уравнения принимают значения, равные нулю. При этом они делят числовую прямую на три частичных промежутка: если $x<-\frac{b}{a}$, то $y=-ax-b-ax+b=-2ax$; если $-\frac{b}{a}\le x\le\frac{b}{a}$, то $y=ax+b-ax+b=2b$; если $x>\frac{b}{a}$, то $y=-ax-b-ax+b=-2ax$.

Графиком функции $y=|ax+b|+|ax-b|$ в системе координат xOy является ломаная линия (рис. 6.1).

Коэффициенты a, b в записи функции $y=|ax+b|+|ax-b|$ могут, вообще говоря, принимать как положительные, так и отрицательные значения, при этом общий вид самого графика изменяться не будет, так как данная функция может принимать только положительные значения. Частными случаями этого графика могут быть: график функции $y = 2|ax|$, если $b = 0$, или прямая линия $y = 2|b|$, если $a = 0$.

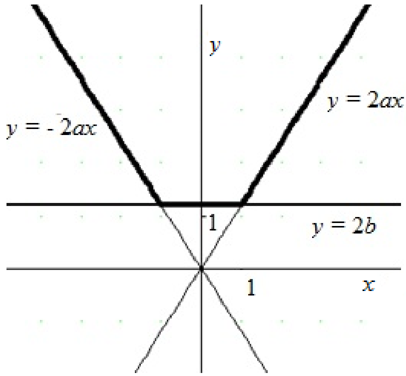


Рис. 6.1

Рассмотрим правую часть уравнения $|ax+b|+|ax-b| = f(x)$. Пусть $f(x)$ является многочленом первой степени или $f(x) = mx + n$, где m, n – произвольные действительные числа. Тогда уравнение (6.1) примет вид

$$|ax+b|+|ax-b| = mx+n. \tag{6.2}$$

Рассмотрим случаи взаимного расположения графиков $y = |ax+b|+|ax-b|$ и $f(x) = mx + n$ в системе координат xOy.

6.2. Первый случай

Пусть в уравнении (6.2) $m = 0$, тогда $y = f(x) = n$ является семейством прямых, параллельных оси Ox. Уравнение (6.2) примет вид

$$|ax+b|+|ax-b| = n, \tag{6.3}$$

где a, b – действительные фиксированные числа. Пусть для определенности $a > 0$, $b > 0$, n – параметр.

График функции $y = |ax + b| + |ax - b|$ показан на рис. 6.2, *а*. Графическим образом функции $y = n$ является семейство прямых, параллельных оси Ox (отдельные прямые этого семейства представлены на рис. 6.2, *б* для фиксированных значений параметра n).

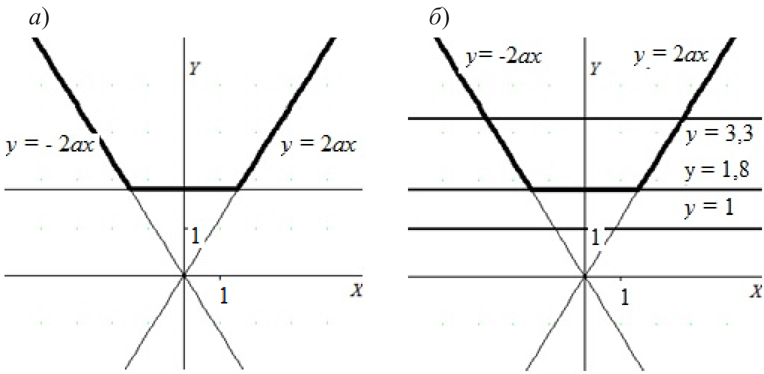


Рис. 6.2

Уравнение $|ax + b| + |ax - b| = n$ будет иметь столько решений, сколько общих точек на графиках функций $y = |ax + b| + |ax - b|$ и $y = n$. Используя рис. 6.2, *б* как графическую опору для рассуждений, проведем учебный эксперимент:

1) сколько общих точек может быть на графиках функций $y = |ax + b| + |ax - b|$ и $y = n$ в зависимости от значений параметра n?

2) может ли уравнение (6.3) иметь одно или два решения в зависимости от значений параметра n?

3) при каком значении параметра n уравнение имеет бесконечное множество решений?

4) имеет ли уравнение (6.3) решения, если параметр принимает значения из промежутка $n \in (-\infty;\ 2b)$, $n \in (2b;\ \infty)$?

5) сделать обобщение о количестве решений уравнения в зависимости от значения параметра n.

В процессе такого исследования абитуриент может установить, что при определенных значениях параметра n на графиках функций $y = |ax + b| + |ax - b|$ и $y = n$ может не быть общих точек (случай, когда $n < 2b$), может быть бесконечное множество общих точек ($n = 2b$), могут быть только две общие точки ($n > 2b$) (рис. 6.2, *б*). Соответственно, уравнение $|ax + b| + |ax - b| = n$ может иметь два решения, бесконечное множество решений или не иметь решений.

Итак, ключевым значением параметра n для данного вида уравнений является граничное значение параметра ($n = 2b$), которым параметрическая ось делится на две частичные области $(-\infty;\ 2b)$, $(2b;\ \infty)$, а уравнение может иметь только два решения, бесконечное множество решений или не иметь решений.

Вывод. Количество решений уравнения $|ax + b| + |ax - b| = n$, где a, b – действительные положительные числа, в зависимости от значений параметра n можно описать так: если $n \in (-\infty;\ 2b)$, то уравнение решений не имеет; если $n = 2b$, то уравнение имеет бесконечное множество решений; если $n \in (2b;\ \infty)$, то уравнение имеет два решения.

Для любого линейного уравнения вида $|ax + b| + |ax - b| = n$ количество решений в зависимости от значений параметра можно установить следующим образом.

Эвристическое правило-ориентир 1

Если в уравнении $|ax + b| + |ax - b| = n$, где n – параметр, a, b – действительные числа, то для нахождения количества решений уравнения необходимо:

• вычислить граничное значение параметра $(n = 2b)$, при котором уравнение имеет бесконечное множество решений;

• при значениях параметра n из промежутка $n \in (-\infty;\ 2b)$ уравнение решений не имеет;

• при значениях параметра n из промежутка $n \in (2b;\ \infty)$ уравнение имеет ровно два решения.

Опираясь на правило-ориентир 1, можно найти количество решений уравнения вида (6.3), не обращаясь к графической интерпретации образа уравнения. Приведем пример.

Пример 6.1. Установить количество решений уравнения в зависимости от значений параметра k:

$$|x+3| + |x-3| = 2k+1. \tag{6.4}$$

Решение. Введем функции: $y = |x+3| + |x-3|$, $y = 2k+1$. Сравним уравнения (6.4) с шаблонным уравнением (6.3) (т. е. с уравнением $|ax+b| + |ax-b| = n$). Имеем: $a = 1$, $b = 3$, $n = 2k+1$. График функции $y = |x+3| + |x-3|$ состоит из частей графика $y = 2a\,|\,x\,| = 2\,|\,x\,|$ и $y = 2b = 2 \cdot 3 = 6$ (рис. 6.3, *а*).

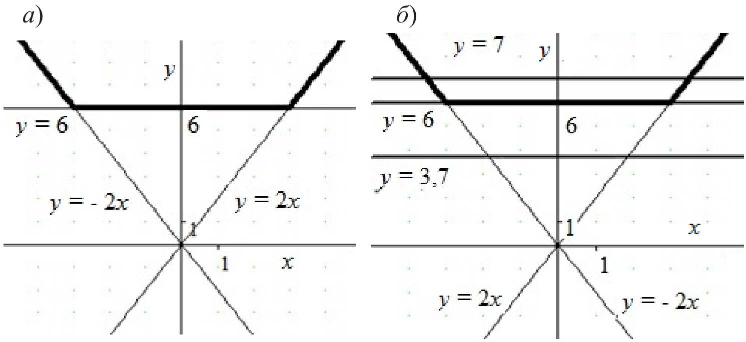


Рис. 6.3

Правой части уравнения (6.4) соответствует семейство прямых $y = n$, параллельных оси Ox. На рис. 6.3, *б* показаны отдельные представители семейства для конкретных значений параметра n, например $n = 3{,}7$; $n = 6$; $n = 7$.

Используя эвристическое правило-ориентир 1, найдем количество решений уравнения (6.4) в зависимости от значений параметра n:

1) вычислим значение $n = 2b$. При $n = 6$, $6 = 2k + 1$, $k = 2{,}5$ уравнение $|x+3|+|x-3| = 2k+1$ имеет бесконечное множество решений;

2) числом $k = 2{,}5$ вся параметрическая ось делится на два частичных промежутка: при $k < 2{,}5$ уравнение не имеет решений; при $k > 2{,}5$ уравнение имеет два решения.

Ответ: если $k \in (-\infty;\ 2{,}5)$, то уравнение решений не имеет; если $k = 2{,}5$, то имеем бесконечное множество решений; если $k \in (2{,}5;\ \infty)$, то уравнение имеет ровно два решения.

Для того чтобы решить уравнение вида $|ax+b|+|ax-b| = n$ в зависимости от значений параметра, приведенного эвристического правила недостаточно. Вместе с тем его использование может помочь абитуриенту установить количество решений уравнения аналитически, без использования графической интерпретации. Такой подход поможет контролировать ход решения уравнения с параметром. Наглядная иллюстрация результатов решения чрезвычайно важна для выяснения сущности полученных аналитических выкладок. Рассмотрим пример.

Пример 6.2. Установить количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра k:

$$|2x+3|+|2x-3| = 5k+1. \tag{6.5}$$

Решение. Введем функции: $y = |2x+3|+|2x-3|$, $y = 5k+1$. Сравним уравнения (6.5) с шаблонным уравнением (6.3) (т. е. с уравнением $|ax+b|+|ax-b| = n$). Имеем: $n = 2b$, $2\cdot 3 = 5k+1$ или $k = 1$. Значит, если граничное значение параметра $k = 1$, то уравнение (6.5) имеет бесконечное множество решений; если $k < 1$, то решений нет; если $k > 1$, то имеем два решения. Других вариантов не существует.

Решим уравнение (6.5) координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. Проведем равносильные преобразования. В уравнении $|2x+3|+|2x-3| = 5k+1$ перенесем все выражения влево: $|2x+3|+|2x-3|-(5k+1) = 0$. Рассмотрим зависимость между переменной x и параметром k, заданную неявно функцией

$$F(k;x)=\left|2x+3\right|+\left|2x-3\right|-(5k+1)=0. \qquad (6.6)$$

Тогда решить уравнение (6.6) – значит найти на координатно-параметрической плоскости kOx множество упорядоченных пар (k; x) (точек), координаты k и x которых удовлетворяют рассматриваемому уравнению.

Вернемся к уравнению вида (6.5) и раскроем выражения, стоящие под знаком модуля на частичных областях. Числа $x=-1{,}5,\ x=1{,}5$ обращают подмодульные выражения в нуль. Найденные числа разбивают числовую ось на три частичные области:

$$\left|2x+3\right|+\left|2x-3\right|=5k+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-1{,}5, \\ x=-1{,}25k-0{,}25, \end{cases} \\ \begin{cases} -1{,}5\le x\le 1{,}5, \\ k=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x>1{,}5, \\ x=1{,}25+0{,}25. \end{cases} \end{array}\right.$$

Изобразим в системе координат kOx, где Ok – ось абсцисс; Ox – ось ординат; графики однозначных функций $x=f(x)$, заданных неявно функцией двух переменных $F(k;x)=\left|2x+3\right|+\left|2x-3\right|-(5k+1)=0$ с учетом области допустимых значений переменной x. Сначала построим прямые $x = 1{,}5$ и $x = –1{,}5$, параллельные оси абсцисс. Эти прямые разбивают всю плоскость на три частичные области. Далее в частичной области, лежащей ниже горизонтальной прямой $x = –1{,}5$, построим прямую $x=-1{,}25k+0{,}25$. Затем в «полосе» между горизонтальными прямыми $x = 1{,}5$ и $x = –1{,}5$ строим вертикальную прямую $k = 1$. Далее в части плоскости, лежащей выше горизонтальной прямой $x = 1{,}5$, строим прямую $x=1{,}25k+0{,}25$. Окончательно графический образ уравнения $\left|2x+3\right|+\left|2x-3\right|=5k+1$ будет таким, как показано на рис. 6.4, *а*.

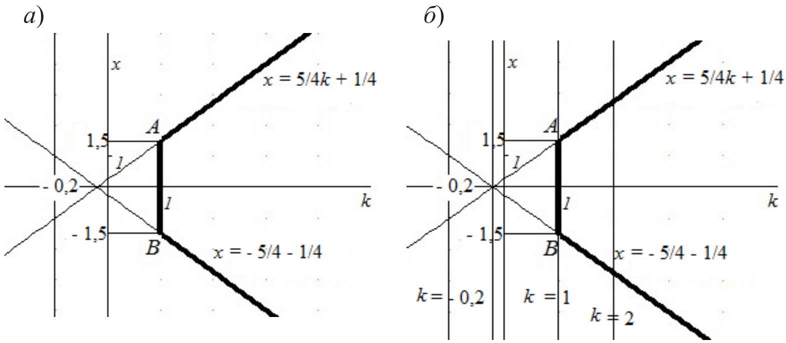


Рис. 6.4

Уравнение (6.6) будет иметь столько решений, сколько раз вертикальная прямая $k = p$, где $p \in (-\infty;\ \infty)$, пересечет графики зависимостей $x = f(k)$ (рис. 6.4, *б*). Для конкретности на рис. 6.4, *б* показаны изображения вертикальных прямых при определенном значении параметра k, например $k = 1$, $k = 2$, $k = -0{,}2$. Используя рис. 6.4 как опору для рассуждений, можно установить, что сначала целесообразно найти координаты точек A и B, являющихся общими для зависимостей $x = 1{,}25k + 0{,}25$ и $k = 1$, $x = -1{,}25k + 0{,}25$ и $k = 1$. Очевидно, что $A(1;\ 1{,}5)$, $B(1;\ -1{,}5)$.

Ответ: если $k \in (-\infty; 1)$, то уравнение (6.5) решений не имеет; если $k = 1$, то решений бесконечное множество: $x \in [-1{,}5; 1{,}5]$; если $k \in (1; \infty)$, то решений два: $x = 1{,}25k + 0{,}25$ и $x = -1{,}25k + 0{,}25$.

6.3. Второй случай

Пусть в уравнении $|ax + b| + |ax - b| = mx + n$ число $n = 0$, тогда правая часть уравнения примет вид $f(x) = mx$ (где m – параметр). Образом уравнения $f(x) = mx$ является семейство прямых, проходящих через начало координат, угловой коэффициент которых изменяется в зависимости от значений параметра m. На рис. 6.5 показаны разные положения прямой $f(x) = mx$ при конкретных значениях параметра m.

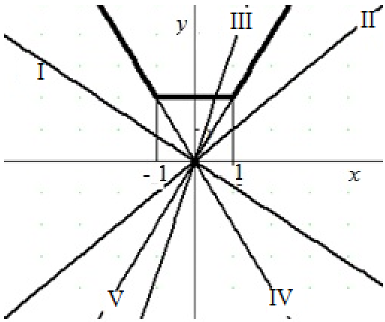


Рис. 6.5

Имеем уравнение

$$|ax+b|+|ax-b|=mx, \tag{6.7}$$

где a, b – действительные положительные числа; m – параметр.

Используя рис. 6.5 как опору для рассуждений, проведем исследование:

1) сколько общих точек может быть на графиках функций $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = mx$?

2) может ли уравнение (6.7) иметь одно, два, три, бесконечное множество решений, не иметь решений?

Ответы обоснуйте. По результатам проведенного исследования сделать обобщение о количестве решений уравнения (6.7) в зависимости от значений параметра m.

В результате проведенного эксперимента можно установить, что на графиках функций $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = mx$ может не быть общих точек (на рис. 6.5 положения I и II прямых семейства $y = mx$), могут совпадать точки (на рис. 2.2.5 положения IV и V прямых семейства $y = mx$), может быть одна общая точка (на рис. 6.5 положение III прямых семейства $y = mx$). Соответственно, уравнение (6.7) может не иметь решений, иметь бесконечное множество решений, может иметь одно решение.

Проще всего выяснить, при каком значении параметра m уравнение (6.7) имеет бесконечное множество решений, а прямые $y = mx$ и $y = -2ax$ или $y = mx$ и $y = 2ax$ совпадают. Это возможно при условии равенства их угловых коэффициентов: $m = 2a$ или $m = -2a$ (см. рис. 6.6, *а*). Поэтому если $m = 2a$ или $m = -2a$, то уравнение (6.7) имеет бесконечное множество решений. Значит, имеем три частичных промежутка: $m < -2a$, $-2a \le m \le 2a$, $m > 2a$ (рис. 6.6, *б*).

Чтобы выяснить, при каком значении параметра m уравнение (6.7) либо не имеет решений, либо имеет единственное решение, рассмотрим такие случаи. При $m = 0$ уравнение $y = mx$ примет вид: $y = 0$, что графически соответствует оси Ox, соответственно, график прямой $y = 0$ не имеет общих точек с графиком функции $y = |ax + b| + |ax - b|$.

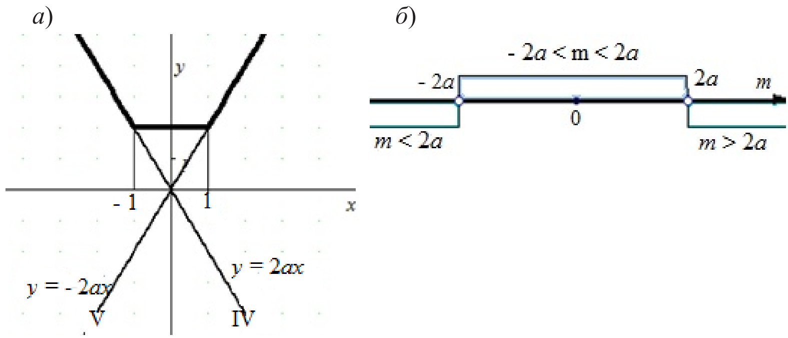


Рис. 6.6

Если в уравнении $0 < m < 2a$ параметр m принимает значение $0 < m < 2a$, то угловой коэффициент прямой $y = mx$ будет меньше, чем у прямой $y = 2ax$, поэтому $y = mx$ не имеет общих точек с графиком функции $y = |ax + b| + |ax - b|$ (на рис. 6.7, *а* положения II для прямых вида $y = mx$).

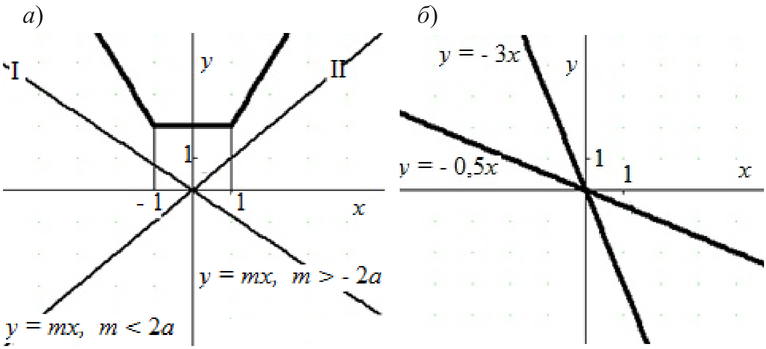


Рис. 6.7

Если в уравнении $y = mx$ параметр m принимает значение $-2a < m < 0$, то угловой коэффициент прямой $y = mx$ будет больше, чем у прямой $y = -2a$ (см. рис. 6.7, *б*), поэтому $y = mx$ не имеет общих точек с графиком функции $y = |ax+b| + |ax-b|$ (на рис. 6.7, *а* положение I для прямых семейства $y = mx$). Окончательно получим: при $m \in (-2a;\, 2a)$ уравнение решений не имеет; при $m \in (-\infty; -2a)$ и $m \in (2a;\, \infty)$ имеем единственное решение; при $m = 2a$, $m = -2a$ решений бесконечное множество.

Значит, ключевым значением параметра m для данного вида уравнений являются значения параметра $m = 2a$ и $m = -2a$, которыми вся числовая ось делится на три частичных промежутка: $(-\infty; -2a)$, $(-2a; 2a)$ и $(2a; \infty)$, а данное уравнение может иметь единственное решение, если $m \in (-\infty; -2a)$ и $m \in (2a;\, \infty)$; может иметь бесконечное множество решений, если $m = 2a$ и $m = -2a$; не иметь решений, если $m \in (-2a;\, 2a)$.

Вывод. Количество решений уравнения $|ax+b| + |ax-b| = mx$, где a, b – действительные положительные числа, в зависимости от значений параметра m можно описать так: если $m \in (-\infty; -2a) \cup (2a; \infty)$, то уравнение имеет единственное решение; если $m = 2a$ и $m = -2a$, то решений бесконечное множество; если $(-2a; 2a)$, то уравнение решений не имеет.

Итак, для любого уравнения вида (6.7) количество решений можно установить так.

Эвристическое правило-ориентир 2

Если в уравнении $\left|ax+b\right|+\left|ax-b\right|=mx+n$ n = 0, m – параметр, a, b – действительные положительные числа, то для нахождения количества решений в зависимости от значений параметра нужно:

1) вычислить граничные значения параметра $m = 2a$ и $m = -2a$, при которых уравнение вида (6.7) имеет бесконечное множество решений;

2) при $m\in(-\infty;-2a)\cup(2a;\infty)$ уравнение имеет единственное решение;

3) при $(-2a;2a)$ уравнение решений не имеет.

Пример 6.3. Найти количество решений уравнения в зависимости от значений параметра k:

$$\left|3x+1\right|+\left|3x-1\right|=kx. \tag{6.8}$$

Решение. Сравним уравнение (6.8) с шаблонным уравнением (6.7) $\left|ax+b\right|+\left|ax-b\right|=mx$. Имеем: $a=3$, $b=1$, $m=k$. Используя правило-ориентир 2, вычислим величину $m=2a$; $k=2\cdot3=6$ или $k = 6$. Аналогично найдем $m = -2a$, $k = -6$. Запишем окончательный ответ.

Ответ: если $k = 6$ или $k = -6$, то уравнение имеет бесконечное множество решений; если $k\in(-6;6)$, то решений нет; если $k\in(-\infty;-6)\cup(6;\infty)$, то уравнение имеет единственное решение.

Пример 6.4. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра k:

$$|\,2x + 0{,}5\,| + |\,2x - 0{,}5\,| = kx. \tag{6.9}$$

Решение. Сравним уравнение (6.9) с шаблонным уравнением (6.7) $\left|ax+b\right|+\left|ax-b\right|=mx$. Имеем: $a=2$, $b=0{,}5$, $m=k$. Используя эвристическое правило-ориентир, вычислим величину

$m = 2a$, $m = -2a$ или $k = 4$, $k = -4$. Числами $k = 4$, $k = -4$ числовая прямая разбивается на три частичные области $(-\infty; -4)$, $(-4; 4)$, $(4; \infty)$. Если $k \in (-4; 4)$, то уравнение не имеет решений; если $k \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$, то решение единственное; если $k = 4$ или $k = -4$, то решений бесконечное множество.

Правило-ориентир помогло быстро получить ответ на вопрос, сколько решений имеет уравнение в зависимости от значений параметра. Решим данный пример другим способом без использования эвристического правила.

Решим уравнение $|\,2x + 0{,}5\,| + |\,2x - 0{,}5\,| = kx$ координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. Данный подход позволит найти не только количество решений, но и их аналитическое выражение.

Пусть задано уравнение $|\,2x + 0{,}5\,| + |\,2x - 0{,}5\,| = kx$. Перенесем все выражения влево и рассмотрим функцию двух переменных

$$F(k; x) = |\,2x + 0{,}5\,| + |\,2x - 0{,}5\,| - kx = 0. \qquad (6.10)$$

Решить уравнение (6.10) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(k)$, $x_2 = f_2(k)$, …, $x_k = f_k(k)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) k.

Проведем равносильные преобразования, решим совокупность трех смешанных систем:

$$|\,2x + 0{,}5\,| + |\,2x - 0{,}5\,| = kx \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -0{,}25, \\ -2x - 0{,}5 - 2x + 0{,}5 = kx, \end{cases} \\ \begin{cases} -0{,}25 \le x \le 0{,}25, \\ 2x + 0{,}5 - 2x + 0{,}5 = kx, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0{,}25, \\ 2x + 0{,}5 + 2x - 0{,}5 = kx. \end{cases} \end{array}\right.$$

После упрощения получим совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -0{,}25, \\ x = 0,\ k = -4, \end{cases} \\ \begin{cases} -0{,}25 \le x \le 0{,}25, \\ x = \dfrac{1}{k}, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0{,}25, \\ x = 0,\ k = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Построим в системе координат kOx графики полученных зависимостей с учетом области изменения переменной x. В части координатной плоскости, лежащей ниже горизонтальной прямой $x = -0{,}25$, построим вертикальную прямую $k = -4$. В «полосе» между горизонтальными прямыми $x = -0{,}25$ и $x = 0{,}25$ построим гиперболу $x = \dfrac{1}{k}$. В части плоскости, расположенной выше горизонтальной прямой $x = 0{,}25$, построим прямую $k = 4$ (рис. 6.8, *а*).

а) *б*)

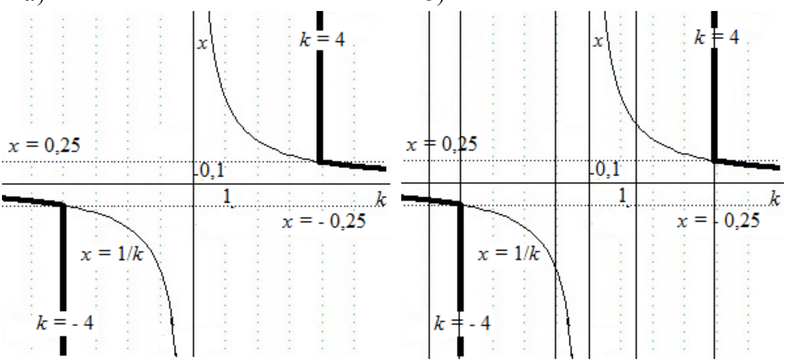


Рис. 6.8

Графики зависимостей $x=\frac{1}{k}$ и $k = -4$ пересекаются в точке $A(-4;-0{,}25)$, графики зависимостей $x=\frac{1}{k}$ и $k = 4$ пересекаются в точке $B(4;0{,}25)$ (см. рис. 6.8, *б*).

Уравнение (6.10) имеет столько решений, сколько общих точек у вертикальной прямой $k = p$, где $p\in(-\infty;\infty)$, и семейства зависимостей вида $x = f(k)$, заданных неявно уравнением (6.10) (на рис. 6.8, *б* показаны отдельные представители вертикальных прямых $k = p$ для конкретных значений параметра k).

Используя рис. 6.8 как графическую опору для рассуждений, можно сделать вывод о количестве и аналитическом выражении решений уравнения (6.10) в зависимости от значений параметра.

Ответ: если $k\in(-\infty;-4)\cup(4;\infty)$, то уравнение имеет единственное решение: $x=\frac{1}{k}$; если $k = -4$, то решений бесконечное множество: $x\in(-\infty;-0{,}25]$; если $k = 4$, то решений бесконечное множество: $x\in[0{,}25;\infty)$; если $k\in(-4;4)$, то решений нет. Данный ответ полностью совпадает с решением, полученным с использованием эвристического правила-ориентира.

6.4. Третий случай

Пусть в уравнении $|ax+b|+|ax-b|=mx+n$ $m=2a$, $m=-2a$, n – параметр, тогда правая часть уравнения примет вид $f(x)=-2ax+n$ или $f(x)=2ax+n$ (где n – параметр). Образом уравнения $y=-2ax+n$ или $y=2ax+n$ является семейство прямых, параллельных либо прямой $y=-2ax$, либо прямой $y=2ax$ соответственно. На рис. 6.9, *а* показаны отдельные положения прямой $y=2ax$ при конкретных значениях параметра n. На рис. 6.9, *б* показаны отдельные положения прямой $y=-2ax$ при конкретных значениях параметра n.

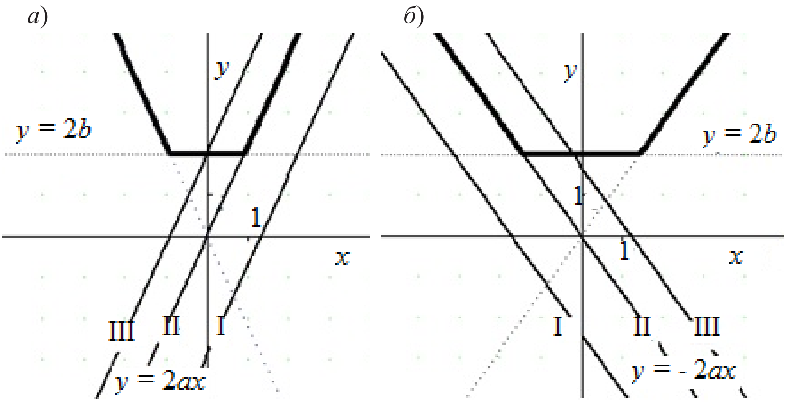


Рис. 6.9

Тогда уравнение $|ax+b|+|ax-b|=mx+n$ примет вид

$$|ax+b|+|ax-b|=-2ax+n \text{ или } |ax+b|+|ax-b|=+2ax+n, \quad (6.11)$$

где a, b – действительные положительные числа, $a, b \neq 0$; n – параметр.

Используя рис. рис. 6.9 как графическую опору для рассуждений, проведем исследование:

1) сколько общих точек может быть на графиках функций $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = 2ax + n$ или на графиках функций $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = -2ax + n$?

2) может ли уравнение (6.11) иметь одно, два, три решения, не иметь решений в зависимости от значений параметра?

3) при каком значении параметра уравнение имеет бесконечное множество решений?

4) будет ли уравнение иметь решения, если параметр принимает значения из промежутка $(-\infty; 0)$?

5) по результатам исследования сделать обобщения относительно количества решений уравнения (6.11) в зависимости от значений параметра n.

В результате учебного эксперимента можно установить, что на графиках функций $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y=-2ax+n$ ($y=2ax+n$) может не быть общих точек (положение I как для прямой $y = 2ax + n$ на рис. 6.9, *а*, так и для прямой $y = -2ax + n$ на рис. 6.9, *б*), графики могут частично совпадать (положение II для прямых $y = 2ax + n$ и $y = -2ax + n$ на рис. 6.9, *а*, *б*), на графиках $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = 2ax + n$ ($y = -2ax + n$) может быть только одна общая точка (рис. 6.9, *а*, *б*). Соответственно, уравнение (6.11) может не иметь решений, может иметь множество решений или одно решение. Значит, если $n = 0$, то совпадут графики функций $y = 2ax$ и $y = 2ax + n$ или $y = -2ax$ и $y = -2ax + n$, а уравнение (6.11) будет иметь бесконечное множество решений. Если $n > 0$ или $n < 0$, уравнение либо имеет единственное решение, либо решений не имеет.

Используя рис. 6.9 как опору для рассуждений, можно установить, что если $n < 0$, то ни одна из прямых $y = 2ax + n$ и $y = -2ax + n$ не пересекает график ломаной линии $y=|ax+b|+|ax-b|$, поэтому при $n < 0$ исходное уравнение не имеет решений. При $n > 0$ исходное уравнение имеет единственное решение.

Значит, ключевым значением параметра n для данного вида уравнений является число $n = 0$, которым числовая ось делится на два частичных промежутка $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$, а у данного вида уравнений может быть единственное решение, бесконечное множество или не быть решений.

Вывод. Количество решений уравнения вида $|ax+b|+|ax-b|=2ax+n$, где *a, b* – действительные положительные числа, в зависимости от значений параметра n можно описать так: если $n < 0$, то уравнение решений не имеет; если $n = 0$, то имеем бесконечное множество решений; если $n > 0$, то решение одно.

Итак, для любого уравнения типа (6.11) количество решений можно установить так.

Эвристическое правило-ориентир 3

Если в уравнении $|ax+b|+|ax-b|=2ax+n$, где n – параметр; a, b –действительные положительные числа, то для нахождения количества корней в зависимости от значений параметра n необходимо:

1) рассчитать граничное значение параметра $n = 0$, при котором уравнение имеет бесконечное множество решений;

2) при n из промежутка $(-\infty; 0)$ уравнение решений не имеет;

3) при n из промежутка $(0; \infty)$ уравнение имеет одно решение.

Покажем применение эвристического правила на примере.

Пример 6.5. Найти количество решений уравнения в зависимости от значений параметра k:

$$\left|0{,}4x+3{,}7\right|+\left|0{,}4x-3{,}7\right|=0{,}8x+k+1. \qquad (6.12)$$

Решение. Имеем: $a = 0$, $b = 3{,}7$, $m = 0{,}8$, $n = k + 1$. Левой части уравнения (6.12) соответствует график функции, который состоит из части графиков $y=2a|x|=0{,}8|x|$ и $y=2b=2\cdot 3{,}7=7{,}4$. В соответствии с эвристическим правилом имеем: $n=0,\ k+1=0, k=-1$.

Ответ: если $k<-1$, уравнение (6.12) не имеет решений; если $k=-1$, то решений бесконечное множество; если $k>-1$, то имеем единственное решение.

Пример 6.6. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра k:

$$\left|5x+3\right|+\left|5x-3\right|=-10x+4k-1. \qquad (6.13)$$

Решение. Имеем: $a = 5$, $b = 3$, $m = -10$, $n = 4k - 1$. В соответствии с эвристическим правилом положим: $n=0,\ 4k-1=0, k=0{,}25$.

Ответ: если $k\in(-\infty;\ 0{,}25)$, то уравнение (6.13) не имеет решений; если $k=0{,}25$, то решений бесконечное множество; если $k\in(0{,}25;\ \infty)$, то имеем единственное решение.

Решим уравнение (6.13) координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. Перепишем исходное уравнение $\left|5x+3\right|+\left|5x-3\right|=-10x+4k-1$ так:

$$F(k;\ x)=\left|5x+3\right|+\left|5x-3\right|-(-10x+4k-1)=0. \qquad (6.14)$$

Решить уравнение (6.14) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(k),\ x_2 = f_2(k),\ \ldots,\ x_k = f_k(k)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) k.

Проведем равносильные преобразования, для чего раскроем выражения, стоящие под знаком модуля. Приравняем к нулю подмодульные выражения: $5x+3=0,\ 5x-3=0.$ Откуда $x=0{,}6,\ x=-0{,}6$. Полученными числами вся числовая ось разбивается на три частичные области, на каждой из которых определим знаки подмодульных выражений. В результате получим совокупность трех смешанных систем:

$$|5x+3|+|5x-3|=-10x+4k-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-0{,}6, \\ -5x-3-5x+3=-10x+4k-1, \end{cases} \\ \begin{cases} -0{,}6 \le x \le 0{,}6, \\ 5x+3-5x+3=-10x+4k-1, \end{cases} \\ \begin{cases} x>0{,}6, \\ 5x+3=5x-3=-10x+4r-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

После упрощений получим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-0{,}6, \\ k=0{,}25, \end{cases} \\ \begin{cases} -0{,}6 \le x \le 0{,}6, \\ x=0{,}4k-0{,}7, \end{cases} \\ \begin{cases} x>0{,}6, \\ x=0{,}2k-0{,}05. \end{cases} \end{array}\right.$$

Построим в системе координат kOx, где Ok – ось абсцисс; Ox – ось ординат; горизонтальные прямые $x = 0{,}6$ и $x = -0{,}6$. Эти прямые разбивают всю плоскость на три частичные области, на каждой из которых построим графики однозначных функций: k = 0,25 (в области $x < -0{,}6$), $x = 0{,}4k - 0{,}7$ (в области $-0{,}6 \le x \le 0{,}6$), $x = 0{,}2k - 0{,}005$ (в области $x > 0{,}6$) (рис. 6.10, *а*).

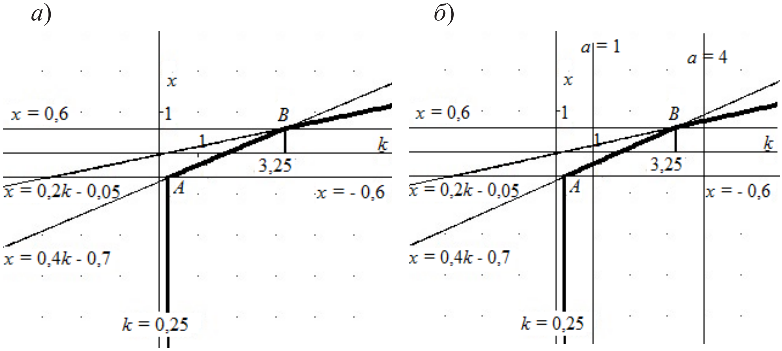


Рис. 6.10

Прямые k = 0,25, $x = 0{,}4k - 0{,}7$ и $x = -0{,}6$ пересекаются в точке A с координатами $A(0{,}25;\, -0{,}6)$ (см. рис. 6.10, *а*). Прямые x = 0,6, $x = 0{,}4k - 0{,}7$ и $x = 0{,}2k - 0{,}005$ пересекаются в точке $B(3{,}25;\, 0{,}6)$.

Уравнение (6.14) имеет столько решений, сколько общих точек у вертикальной прямой $k = p$, где $p \in (-\infty;\, \infty)$ и семейства зависимостей вида $x = f(k)$, заданных неявно уравнением (на рис. 6.10, *б* показаны отдельные представители вертикальных прямых $k = p$ для конкретных значений параметра k).

Используя рис. 6.10 как графическую опору для рассуждений, можно сделать вывод о количестве и аналитическом выражении решений уравнения (6.14) в зависимости от значений параметра.

Ответ: если $k \in (-\infty; 0{,}25)$, то уравнение решений не имеет; если значение параметра k = 0,25, то решений бесконечное множество: $x \in (-\infty; -0{,}6]$; если $k \in (0{,}25;\, 3{,}25)$, то имеем единственное решение: $x = 0{,}4k - 0{,}7$; если k = 3,25, то единственное решение: x = 0,6; если $k \in (3{,}25; \infty)$, то решение одно: $x = 0{,}2k - 0{,}05$.

Пример 6.7. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра a:

$$|0{,}5x+1|+|0{,}5x-1|=x-a. \tag{6.15}$$

Решение. Имеем: $a=0{,}55,\ b=1,\ m=1,\ n=-a.$ В соответствии с эвристическим правилом вычислим: $n=0,\ -a=0,\ a=0.$

Значит, если $a < 0$, то уравнение (6.15) не имеет решений; если $a = 0$, то решений бесконечное множество; если $a > 0$, то имеем единственное решение.

Решим уравнение координатно-параметрическим методом с применением метода сечений. Перенесем все выражения влево и рассмотрим функцию двух переменных

$$F(a;x)=|0{,}5x+1|+|0{,}5x-1|-(x-a)=0. \tag{6.16}$$

Решить уравнение (6.16) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(a),\ x_2 = f_2(a),\ \ldots,\ x_k = f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей записать область изменения переменной (параметра) a.

Проведем равносильные преобразования, для чего раскроем выражения, стоящие под знаком модуля. Приравняем к нулю подмодульные выражения и решим их относительно переменной x, тогда $x = –2$, $x = 2$. Полученными числами вся числовая ось разбивается на три частичные области, на каждой из которых определим знаки подмодульных выражений. В результате получим совокупность трех смешанных систем:

$$|0{,}5x+1|+|0{,}5x-1|=x-a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2, \\ -0{,}5x-1-0{,}5x+1=x-a, \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x\le 2, \\ 0{,}5x+1-0{,}5x+1=x-a, \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ 0{,}5x+1+0{,}5x-1=x-a. \end{cases} \end{array}\right.$$

После упрощений получим:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\x=0{,}5a,\end{cases}\\\begin{cases}-2\le x\le 2,\\x=a+2,\end{cases}\\\begin{cases}x>2,\\a=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Построим в системе координат aOx, где Oa – ось абсцисс; Ox – ось ординат; однозначные функции с учетом области допустимых значений переменной x. Строим горизонтальные прямые $x = -2$, $x = 2$. В частичной области, лежащей ниже прямой $x = -2$, построим прямую $x = 0{,}5a$, в «полосе» между прямыми $x = -2$, $x = 2$ построим график функции $x = a + 2$, в частичной области, лежащей выше прямой $x = 2$, построим график функции $a = 0$ (рис. 6.11, *а*).

Прямые $x = a + 2$, $x = 0{,}5a$ пересекаются в точке A с координатами $A(-4; -2)$ (см. рис. 6.11, *а*). Прямые $a = 0$ и $x = 2$ пересекаются в точке $B(0; 2)$ рис. 6.11, *а*.

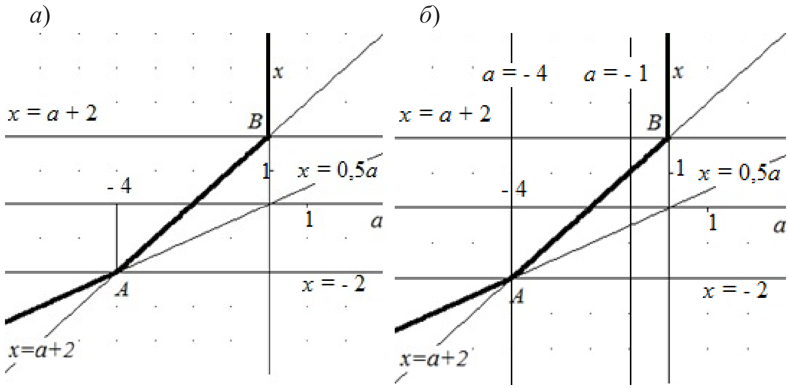


Рис. 6.11

Уравнение (6.16) имеет столько решений, сколько общих точек у вертикальной прямой $a = p$, где $a \in (-\infty; \infty)$ и семейства зависимостей вида $x = f(a)$, заданных неявно уравнением (на рис. 6.11, *б* показаны отдельные представители вертикальных прямых $a = p$ для конкретных значений параметра a).

Используя рис. 6.11 как графическую опору для рассуждений, можно сделать вывод о количестве и аналитическом выражении решений исходного уравнения.

Ответ: если $a \in (-\infty; -4)$, то имеем единственное решение: $x = 0{,}5a$; если $a \in [-4; 0)$, то решение одно: $x = a + 2$; если $a = 0$, то решений бесконечное множество: $x \in [2; \infty)$; если $a \in (0; \infty)$, то решений нет.

6.5. Четвертый случай

Пусть задано уравнение

$$|ax + b| + |ax - b| = mx + n, \tag{6.17}$$

где m – произвольное фиксированное число и $m \neq -2a$, $m \neq 2a$, $m \neq 0$; n – параметр. Тогда графическим образом правой части уравнения будет семейство параллельных прямых, произвольным образом расположенных в системе координат (на рис. 6.12, *а* показаны отдельные прямые семейства).

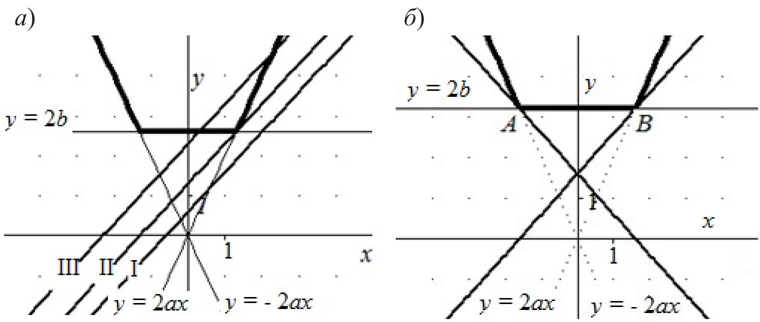


Рис. 6.12

Используя рис. 6.12 как графическую опору для рассуждений, проведем исследование:

1) сколько общих точек может быть на графиках функций $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = 2mx + n$?

2) сколько решений может иметь уравнение (6.17) в зависимости от значений параметра n?

Ответы обоснуйте. По результатам проведенного исследования сделать обобщение о количестве решений уравнения (6.17) в зависимости от значений параметра m.

В результате проведенного исследования можно установить, что на графиках функций $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = 2mx + n$ может не быть общих точек (положение I прямой $y = 2mx + n$ на рис. 6.12, *а*), может быть одна общая точка (положение II прямой $y = 2mx + n$ на рис. 6.12, *а*), могут быть две общие точки (положение III прямой $y = 2mx + n$ на рис. 6.12, *а*).

Соответственно, уравнение (6.17) может не иметь решений, иметь единственное решение, иметь два решения. Установим, при каком значении параметра n имеем единственное решение. Это возможно, если прямая $y = 2mx + n$ проходит или через точку A, или через точку B (рис. 6.12, *б*). Найдем координаты этих точек. Точка A лежит на пересечении графиков функций $y = 2b$ и $y = -2ax$, поэтому ее координаты: $x=-\frac{b}{a}$, $y = 2b$. Аналогично для точки B: $x=\frac{b}{a}$, $y = 2b$.

Подставим полученные координаты, например точки B, в уравнение $y=2mx+n$. Имеем: $\frac{b}{a}\cdot m+n=2b$, откуда $n=-\frac{b\cdot m}{a}+2b$ или $n=\frac{b(2a-m)}{a}$. Значит, если $n=\frac{b(2a-m)}{a}$, то уравнение (6.17) имеет единственное решение. Числом $n=\frac{b(2a-m)}{a}$ параметрическая ось On делится на две частичные области $n<\frac{b(2a-m)}{a}$

и $n > \frac{b(2a-m)}{a}$, на каждой из которых уравнение (6.17) имеет либо два решения, либо не имеет решений.

Как уже отмечалось, функция $y = 2mx + n$ описывает семейство параллельных прямых. Графически это означает, что в системе координат xOy параллельные прямые вида $y = 2mx + n$ отсекают на числовом луче Oy разные отрезки (длины которых вычисляются по формуле $n = \frac{b(2a-m)}{a}$). Те из прямых $y = 2mx + n$, для которых $n < \frac{b(2a-m)}{a}$ (например, положение II прямой $y = 2mx + n$ на рис. 6.12, *а*), будут расположены ниже прямой, проходящей через точку B.

Значит, если $n \in \left(-\infty; \frac{b(2a-m)}{a}\right)$, то уравнение (6.17) решений не имеет; если $n = \frac{b(2a-m)}{a}$, то уравнение имеет единственное решение; если $n \in \left(\frac{b(2a-m)}{a}; \infty\right)$, то решений два. Аналогично если прямая $y = 2mx + n$ проходит через точку $A\left(-\frac{b}{a}; 2b\right)$, тогда: $-\frac{b}{a} \cdot m + n = 2b$ или $n = \frac{b(2a+m)}{a}$.

Значит, ключевым значением параметра n для данного вида уравнений является число $n = \frac{b(2a-m)}{a}$, которым вся параметрическая ось разбивается на два частичных промежутка: $\left(-\infty; \frac{b(2a-m)}{a}\right)$ и $\left(\frac{b(2a-m)}{a}; \infty\right)$, а данный вид уравнений может иметь одно решение, бесконечное множество или не иметь решений.

Замечание. Число $n = \dfrac{b(2a-m)}{a}$ вычисляется в случае, когда функция $y = 2mx + n$ является возрастающей, т. е. проходит через точку B (см. рис. 6.12, *б*). В случае, когда функция $y = 2mx + n$ проходит через точку A, коэффициент m при неизвестной величине будет отрицательной величиной.

Вывод. Количество решений уравнения $|ax+b|+|ax-b| = mx+n$, где a, b – действительные положительные числа; m – произвольное фиксированное число и $m \neq -2a$, $m \neq 2a$, в зависимости от значений параметра n можно описать так: если $n \in \left(-\infty; \dfrac{b(2a-m)}{a}\right)$, то решений нет; если $n = \dfrac{b(2a-m)}{a}$, то единственное решение; если $n \in \left(\dfrac{b(2a-m)}{a}; \infty\right)$, то имеем два решения.

Для любого уравнения вида (6.17) количество решений можно определить так.

Эвристическое правило-ориентир 4

Если в уравнении $|ax+b|+|ax-b| = mx+n$, где n – параметр; a, b – действительные положительные числа; m – действительное число и $m \neq -2a$, $m \neq 2a$, $m \neq 0$, то для нахождения количества решений в зависимости от значений параметра необходимо:

1) вычислить величину $n = \dfrac{b(2a-m)}{a}$ – граничное значение параметра, при котором уравнение имеет единственное решение;

2) при значениях параметра из промежутка $\left(-\infty; \dfrac{b(2a-m)}{a}\right)$ уравнение решений не имеет;

3) при значениях параметра из промежутка $\left(\dfrac{b(2a-m)}{a}; \infty\right)$ уравнение имеет два решения.

Пример 6.8. Найти количество решений в зависимости от значений параметра k:

$$\left|1{,}6x+4{,}8\right|+\left|1{,}6x+4{,}8\right|=2x+k. \qquad (6.18)$$

Решение. Имеем: $a=1{,}6,\ b=4{,}8,\ m=2,\ n=k$. Проверим выполнение условия $m\neq 2|a|, 2|a|=2|1{,}6|=|3{,}2|\neq m$. Обозначим правую часть уравнения $y=2x+k$ и левую $y=\left|1{,}6x+4{,}8\right|+\left|1{,}6x+4{,}8\right|$. Левой части уравнения (6.18) соответствует часть графиков функций $y = 2a\,|\,x\,| = 3{,}2\,|\,x\,|$ и $y = 2b = 9{,}6$, правой части соответствует семейство прямых, параллельных прямым $y=3{,}2|x|$.

Согласно эвристическому правилу уравнение (6.18) может иметь одно, два решения либо не иметь решений. Вычислим величину $n=\dfrac{b(2a-m)}{a}=\dfrac{4{,}8\cdot(2\cdot 1{,}6-2)}{1{,}6}=3{,}6$.

Ответ: если $n\in(-\infty;3{,}6)$, то решений нет; если n = 3,6, то решение одно; если $n\in(3{,}6;\infty)$, то решений два.

Пример 6.9. Найти количество решений в зависимости от значений параметра a:

$$|\,2x + 1\,| + |\,2x - 1\,| = x + 2a. \qquad (6.19)$$

Решение. Имеем: $a=2,\ b=1,\ m=1,\ n=2a$. Правой части уравнения соответствует семейство параллельных прямых, произвольно размещенных в системе координат xOy. Проверим выполнение условия: $m\neq 2|a|,\ 2\cdot 2=4\neq 1$. Значит, график функции $y=x+2a$ не параллелен ни одному из графиков функций $y = 4x$ или $y = -4x$.

Согласно эвристическому правилу вычислим величину $n=\dfrac{b(2a-m)}{a}$ или $n=\dfrac{1\cdot(2\cdot 2-1)}{2}=\dfrac{3}{2}=2a$. Откуда $a=\dfrac{3}{4}$. Окончательно имеем: если $a\in\left(-\infty;\dfrac{3}{4}\right)$, то уравнение решений не имеет; если $a=\dfrac{3}{4}$, то решение одно; если $a\in\left(\dfrac{3}{4};\infty\right)$, то решений два.

Решим данное уравнение координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. Перепишем уравнение (6.19) так: $|2x+1|+|2x-1|-(x+2a)=0$. Рассмотрим функцию двух переменных:

$$F(a;x)=|2x+1|+|2x-1|-(x+2a)=0. \qquad (6.20)$$

Решить уравнение (6.20) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1=f_1(a),\ x_2=f_2(a),\ \ldots,\ x_k=f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a.

Приравняем к нулю подмодульные выражения, в результате получим: $x=-0{,}5,\ x=0{,}5$. Числа $x=-0{,}5,\ x=0{,}5$ разбивают всю числовую ось на три частичных промежутка, на каждом из которых подмодульные выражения сохраняют знак. Получим совокупность трех смешанных систем:

$$|2x+1|+|2x-1|=x+2a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-0{,}5, \\ -2x-1-2x+1=x+2a, \end{cases} \\ \begin{cases} -0{,}5\le x\le 0{,}5, \\ 2x+1-2x+1=x+2a, \end{cases} \\ \begin{cases} x>0{,}5, \\ 2x+1+2x-1=x+2a. \end{cases} \end{array}\right.$$

После упрощений имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-0{,}5, \\ x=-0{,}4a, \end{cases} \\ \begin{cases} -0{,}5\le x\le 0{,}5, \\ x=-2a+2, \end{cases} \\ \begin{cases} x>0{,}5, \\ x=\dfrac{2}{3}a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Построим в системе координат aOx, где Oa – ось абсцисс; Ox – ось ординат; однозначные функции $x = f(a)$ с учетом области допустимых значений переменной x. Строим горизонтальные прямые $x = -0{,}5$, $x = 0{,}5$. В частичной области, лежащей ниже прямой $x = -0{,}5$, построим прямую $x = -0{,}4a$, в полосе между прямыми $x = -0{,}5$, $x = 0{,}5$ построим график функции $x = -2a + 2$, в частичной области, лежащей выше прямой $x = 0{,}5$ построим график функции $x = \frac{2}{3}a$ (рис. 6.13, а). Прямые $x = \frac{2}{3}a$, $x = 0{,}5$ пересекаются в точке A с ординатой $x = 0{,}5$. Чтобы вычислить абсциссу этой точки, приравняем правые части уравнений $x = \frac{2}{3}a$, $x = 0{,}5$. Получим $\frac{2}{3}a = 0{,}5$, поэтому $a = \frac{3}{4}$.

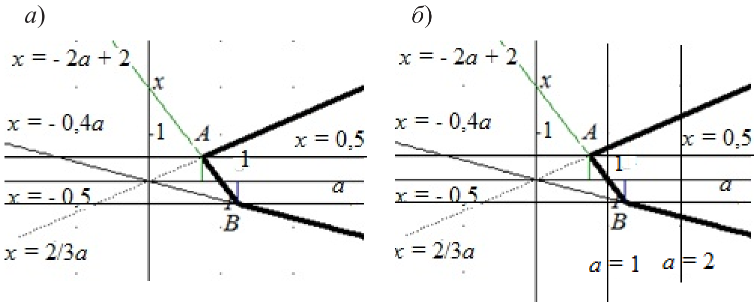


Рис. 6.13

Найдем координаты точки B пересечения зависимостей $x = -\frac{2}{5}a$ и $x = -\frac{1}{2}$. Получим, $x = -0{,}5$, $-\frac{2}{5}a = -\frac{1}{2}$, или $a = 1{,}75$.

Уравнение (6.20) имеет столько решений, сколько общих точек у вертикальной прямой $a = p$, где $a \in (-\infty; \infty)$, и семейства зависимостей вида $x = f(a)$, заданных неявно уравнением (на рис. 6.13, *б* показаны отдельные представители прямых $a = p$ для конкретных значений параметра a).

Используя рис. 6.13 как графическую опору для рассуждений, можно установить: число $a = 1{,}25$ делит промежуток $(0{,}75; \infty)$ на два: первый $(0{,}75; 1{,}25)$, на котором уравнение имеет два решения: $x = \frac{2}{3}a$, $x = -2a + 2$, и второй – $(0{,}25; \infty)$, на котором уравнение имеет два других решения: $x = \frac{2}{3}a$, $x = -\frac{2}{5}a$.

Ответ: если $a \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$, то решений нет; если $a = \frac{3}{4}$, то решение одно: $x = 0{,}5$; если $a \in \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$, то решений два: $x = \frac{2}{3}a$ и $x = -2a + 2$; если $a \in \left(\frac{5}{4}; \infty\right)$, то два других решения: $x = \frac{2}{3}a$ и $x = -\frac{2}{5}a$.

6.6. Пятый случай

Пусть дано уравнение

$$|ax + b| + |ax - b| = mx + n, \tag{6.21}$$

где m – параметр; n – фиксированное число и $0 < n < 2b$. Введем функции $y = |ax + b| + |ax - b|$ и $y = mx + n$, где $0 < n < 2b$. Тогда графическим образом правой части уравнения будет пучок прямых, проходящих через точку с координатами $(0; n)$ (на рис. 6.14, *а* показаны отдельные прямые семейства).

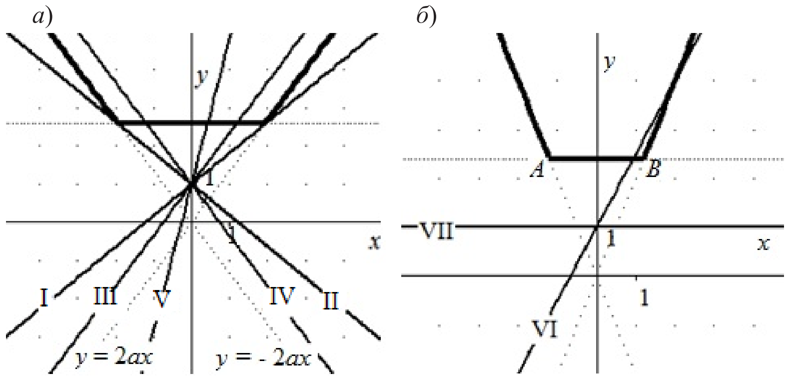


Рис. 6.14

Используя рис. 6.14 как графическую опору для рассуждений, проведем исследование:

1) может ли график прямой $y = mx + n$, $0 < n < 2b$ одновременно иметь общие точки с графиками функций $y = 2b$, $y = 2ax$, являющихся частями графика $y = |ax + b| + |ax - b|$? Ответ объяснить;

2) сколько общих точек может быть на графиках функций $y = |ax + b| + |ax - b|$ и $y = mx + n$, $0 < n < 2b$ в зависимости от значений параметра m?

3) при каком значении параметра m уравнение имеет ровно одно решение?

4) при каком значении параметра уравнение (6.21) не имеет решений? Ответы обоснуйте.

По результатам проведенного исследования сделать обобщение о количестве решений уравнения (6.21) в зависимости от значений параметра m.

Можно установить, что на графиках функций $y = |ax + b| + |ax - b|$ и $y = mx + n$, $0 < n < 2b$ может не быть общих точек (см. положение VII прямой $y = mx + n$ на рис. 6.14, *б*), может быть только одна общая точка (см. положение I, II, III, IV, V прямой $y = mx + n$ на рис. 6.14, *а*), могут быть две общие точки (см. положение VI прямой $y = mx + n$ на рис. 6.14, *б*). Соответственно, уравнение (6.21) может не иметь решений, иметь одно либо два решения.

Выясним, при каком значении параметра m уравнение (6.21) имеет единственное решение. Это возможно, если графики функций $y = |ax + b| + |ax - b|$ и $y = mx + n$ пересекаются в одной точке. Возможны случаи:

1) прямая $y = mx + n$ параллельна либо прямой $y = 2a$, либо прямой $y = -2ax$ (см. положение III и IV прямой $y = mx + n$ на рис. 6.14, *а*). То есть имеем равенство угловых коэффициентов прямых $y = 2ax$ и $y = mx + n$ либо $y = -2ax$ и $y = mx + n$. В результате получим: $m = -2a$, $m = 2a$;

2) на графиках функций $y = |ax + b| + |ax - b|$ и $y = mx + n$ может быть одна общая точка, если одна из прямых семейства $y = mx + n$ попадет в область, находящуюся между прямыми $y = 2ax$ и $y = -2ax$ (см. положение V прямой $y = mx + n$ на рис. 6.14, *а*), и одновременно будет пересекаться с прямой $y = 2b$;

3) графики функций $y = |ax + b| + |ax - b|$ и $y = mx + n$ могут пересекаться в одной точке, а уравнение (6.21) иметь единственное решение, если прямая $y = mx + n$ проходит через точку A или B (см. рис. 6.14, *а*). Найдем это значение параметра m. Точка A лежит на пересечении графиков функций $y = 2b$ и $y = -2ax$, поэтому ее координаты: $y = 2b$, $x = -\frac{b}{a}$. Аналогично можно найти координаты точки B: $x = \frac{b}{a}$, $y = 2b$. Прямая $y = mx + n$ при соответствующих значеннях параметра m может проходить как через точку A, так и через точку B. Поэтому $-\frac{b}{a} \cdot m + n = 2b$ или $\frac{b}{a} \cdot m + n = 2b$. Откуда $m_3 = \frac{-2ab + an}{b} = \frac{a(n - 2b)}{b}$ или $m_4 = \frac{2ab - an}{b} = \frac{a(2b - n)}{b}$.

Имеем четыре граничных значения параметра m, при которых на графиках функций $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = mx + n$ будет одна общая точка: $m_1 = -2a, m_2 = 2a$, $m_3 = \dfrac{a(n-2b)}{b}$, $m_4 = \dfrac{a(2b-n)}{b}$. Эти числа разбивают всю параметрическую ось на пять частичных промежутков. Нанесем эти значения параметра m в порядке возрастания на ось Om (см. рис. 6.15, a).

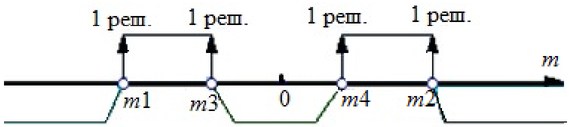


Рис. 6.15

У прямой $y = m_4 x + n$, где $m_4 = \dfrac{2ab-an}{b}$ (см. положение I прямой $y = mx + n$ на рис. 6.14, a) угловой коэффициент меньше, чем у прямой $y = 2a \cdot x + n$ (см. положение III прямой $y = mx + n$), поэтому можно утверждать, что $\dfrac{2ab-an}{b} < 2a$.

Аналогично можно доказать, что $-2a < \dfrac{-2ab+an}{b}$, поэтому на параметрической оси Om числа $m_1 = -2a$, $m_2 = 2a$, $m_3 = \dfrac{-2ab+an}{b}$, $m_4 = \dfrac{2ab-an}{b}$ будут размещены в таком порядке, как показано на рис. 6.15.

Этими числами вся параметрическая ось делится на частичные промежутки: $(-\infty; -2a)$, $\left(-2a; \dfrac{-2ab+an}{b}\right)$, $\left(\dfrac{-2ab+an}{b}; \dfrac{2ab-an}{b}\right)$,

$\left(\dfrac{2ab-an}{b};2a\right)$, $(2a;\infty)$ на каждом из которых уравнение (6.21) имеет либо одно, либо два решения, либо не имеет решений.

Например, рассмотрим открытый промежуток $\left(\dfrac{-2ab+an}{b};\dfrac{2ab-an}{b}\right)$. Очевидно, что в него входит число нуль. Положим, что $m = 0$, подставим данное значение в уравнение (6.21): $|ax+b|+|ax-b|=0\cdot x+n$ или $|ax+b|+|ax-b|=n$. Так как по условию $n < 2b$, то графики функций $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = n$ не будут пересекаться, значит, уравнение (6.21) не имеет решений, если $m\in\left(\dfrac{-2ab+an}{b};\dfrac{2ab-an}{b}\right)$.

Аналогично возьмем значение параметра m из промежутков $(-\infty;-2a)\cup(2a;\infty)$. Например, пусть $m = 3a$, принадлежащее промежутку $(2a;\infty)$, и рассмотрим прямые $y=2ax+n$ и $y=3ax+n$, $a > 0$ (рис. 6.16, *а*).

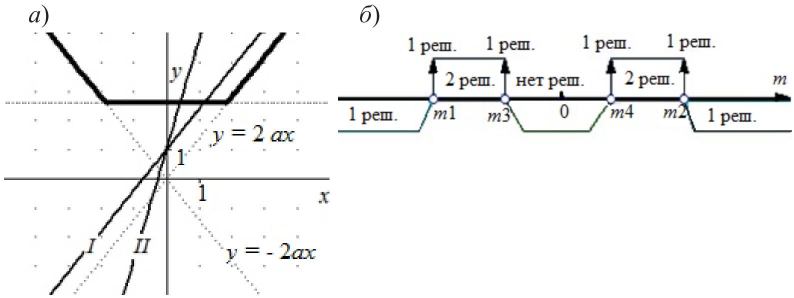


Рис. 6.16

Используя рис. 6.16, *а*, можно установить, что угловой коэффициент прямой $y=3a\cdot x+n$ (см. положение II прямой на рис. 6.16, *а*) больше, чем у графика функции $y=2ax+n$ (см. положение I прямой на рис. 6.16, *а*), поэтому для любого значения параметра $m\in(2a;\infty)$ прямая $y = mx + n$ пересечет график функции

$y = |ax+b| + |ax-b|$ в одной точке. Значит, если $m \in (2a;\infty)$, то уравнение (6.21) имеет единственное решение.

Аналогично можно показать, что если $m \in (-\infty;-2a)$, то уравнение (6.21) тоже будет иметь единственное решение. Окончательно: если $m \in (-\infty;-2a) \cup (2a;\infty)$, то уравнение имеет единственное решение.

Исходное уравнение может иметь два решения, если

$$m \in \left(-2a;\frac{-2ab+an}{b}\right) \cup \left(\frac{2ab-an}{b};2a\right).$$

Значит, ключевыми значениями параметра m для данного вида уравнений являются числа $m_1 = -2a$, $m_2 = 2a$, $m_3 = \dfrac{-2ab+an}{b}$, $m_4 = \dfrac{2ab-an}{b}$, которыми вся числовая ось делится на пять частичных промежутков $(-\infty;-2a)$, $\left(-2a;\dfrac{a(n-2b)}{b}\right)$, $\left(\dfrac{a(n-2b)}{b};\dfrac{a(2b-n)}{b}\right)$, $\left(\dfrac{a(2b-n)}{b};2a\right)$, $(2a;\infty)$, а уравнение может иметь одно, два решения или не иметь решений (рис. 6.16, *б*).

Вывод. Количество решений уравнения $|ax+b| + |ax-b| = mx+n$, где a, b – действительные положительные числа; n – произвольное фиксированное число и $0 < n < 2b$, в зависимости от значений параметра m можно описать так: если

$$m \in (-\infty;-2a] \cup [2a;\infty) \cup \left\{\frac{a(n-2b)}{b};\frac{a(2b-n}{b}\right\},$$

то уравнение имеет единственное решение; если $m \in \left(-2a;\dfrac{a(n-2b)}{b}\right) \cup \left(\dfrac{a(2b-n)}{b};2a\right)$, имеем два решения; если $m \in \left(\dfrac{a(n-2b)}{b};\dfrac{a(2b-n)}{b}\right)$, то решений нет. Значит, для любого уравнения вида (6.21) количество решений можно установить по такому правилу.

Эвристическое правило-ориентир 5

Если в уравнении $|ax+b|+|ax-b|=mx+n$, где m – параметр; a, b – действительные положительные числа; n – произвольное фиксированное число из промежутка $0 < n < 2b$, то количество решений можно установить так:

1) вычислить $m_1=-2a, m_2=2a$, $m_3=\dfrac{-2ab+an}{b}$, $m_4=\dfrac{2ab-an}{b}$ – граничные значения параметра, при которых исходное уравнение имеет единственное решение;

2) на параметрической прямой Om разместить m_1, m_2, m_3 и m_4 в порядке возрастания;

3) при $m\in(-\infty;-2a]\cup[2a;\infty)\cup\left\{\dfrac{a(n-2b)}{b};\dfrac{a(2b-n}{b}\right\}$ уравнение имеет единственное решение;

4) при значениях m из промежутков $\left(-2a;\dfrac{a(n-2b)}{b}\right)\cup$ $\cup\left(\dfrac{a(2b-n)}{b};2a\right)$ уравнение имеет два решения;

5) при значениях m из промежутка $\left(\dfrac{a(n-2b)}{b};\dfrac{a(2b-n)}{b}\right)$ уравнение решений не имеет.

Рассмотрим примеры.

Пример 6.10. Найти количество решений в зависимости от значений параметра k:

$$|4x+1|+|4x-1|=kx+0{,}5. \qquad (6.22)$$

Решение. Имеем: $a=4$, $b=1$, $m=k$, $n=0{,}5$. Проверим выполнение условия $0<n<2b$: $0<0{,}5<2\cdot1$ или $0<0{,}5<2$, которое является правильным числовым неравенством. В соответствии с эвристическим правилом необходимо вычислить: $m_1=-2a$, $m_2=2a$, $m_3=\dfrac{-2ab+an}{b}$, $m_4=\dfrac{2ab-an}{b}$. Или: $m_1=-8=k_1$; $m_2=8=k_2$; $m_3=\dfrac{-2\cdot4\cdot1+4\cdot0{,}5}{1}=-6=k_3$;

$m_4 = \dfrac{2ab - an}{b} = 6 = k_4$. На параметрической прямой Ok расположим числа k_1, k_2, k_3 и k_4 в порядке возрастания (рис. 6.17).

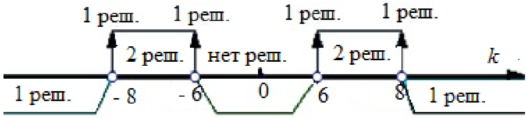


Рис. 6.17

Ответ: если $k \in (-\infty; -8] \cup [8; \infty)$ или $k \in \{-6; 6\}$, то уравнение имеет единственное решение; если $k \in (-8; -6) \cup (6; 8)$, то имеем два решения; если $k \in \{-6; 6\}$, то решений нет.

Пример 6.11. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра a:

$$|2x - 4| + |2x - 4| = ax + 1. \qquad (6.23)$$

Решение. Имеем: $a = 2, b = 4, m = a, n = 1$. Проверим выполнение условия $0 < n < 2b$: $2b = 2 \cdot 4 = 8$. Числовое неравенство $0 < 1 < 8$ является правильным. Поэтому опираясь на эвристическое правило вычислим: $m_1 = -2a = -4$, $m_2 = 2a = 4$,
$m_3 = \dfrac{a(n - 2b)}{b} = \dfrac{2(1 - 2 \cdot 4)}{4} = -3{,}5$, $\quad m_4 = \dfrac{a(2b - n)}{b} = \dfrac{2(2 \cdot 4 - 1)}{4} = 3{,}5$.
Нанесем полученные значения на параметрическую ось Oa (рис. 6.18).

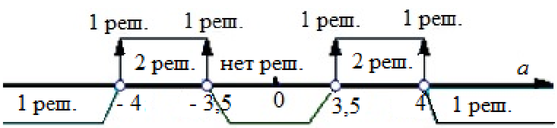


Рис. 6.18

Количество решений в зависимости от значений параметра можно записать так: если $a \in (-\infty; -4] \cup [4; \infty)$ или $a \in \{-3{,}5; 3{,}5\}$, то решение одно; если $a \in (-4;-3{,}5) \cup (4;\, 3{,}5)$, то два решения; если $a \in \{-3{,}5; 3{,}5\}$, то решений нет. Проверим полученные результаты.

Решим уравнение (6.23) координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. Перенесем все выражения влево и рассмотрим функцию двух переменных:

$$F(a;x) = |2x-4| + |2x+4| - (ax+1) = 0. \qquad (6.24)$$

Решить уравнение (6.24) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(a)$, $x_2 = f_2(a)$, …, $x_k = f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a.

Приравняем к нулю подмодульные выражения, в результате получим: $x = -2$, $x = 2$. Числа $x = -2$, $x = 2$ разбивают всю числовую ось на три частичных промежутка, на каждом из которых подмодульные выражения сохраняют знак. После упрощений и выражения переменной x через параметр a получим совокупность трех смешанных систем:

$$\begin{cases} x < -2, \\ x = -\dfrac{1}{a+4} \\ a \neq -4, \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ x = \dfrac{7}{a}, \\ a \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x = -\dfrac{1}{a-4} \\ a \neq 4. \end{cases}$$

Построим в системе координат aOx графики прямых: $x = -2$, $x = 2$. Эти прямые разбивают всю плоскость на три частичные области. В области, расположенной ниже прямой $x = -2$, построим график гиперболы $x = -\dfrac{1}{a+4}$ с асимптотой $a = -4$. В частичной области (полосе), расположенной между прямыми $x = -2$, $x = 2$, построим график гиперболы $x = \dfrac{7}{a}$ с асимптотой $a = 0$. В частичной области, лежащей выше прямой $x = 2$, построим график гиперболы $x = -\dfrac{1}{a-4}$ (рис. 6.19).

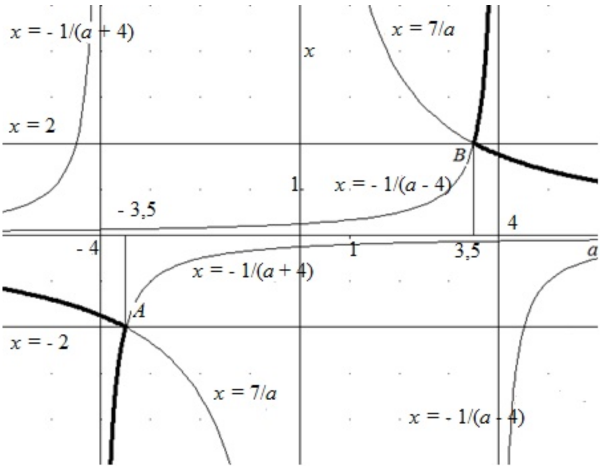


Рис. 6.19

Найдем координаты точки *A*, в которой пересекаются графики функций $x=\dfrac{7}{a}$ и $x=-\dfrac{1}{a+4}$, для чего приравняем правые части данных уравнений $\dfrac{7}{a}=-\dfrac{1}{a+4}$. В результате найдем, что $A(-3{,}5;\,-2)$. Аналогично найдем координаты точки $B(3{,}5;\,2)$.

Уравнение (6.24) имеет столько решений, сколько общих точек у вертикальной прямой $a = p$, где $a \in (-\infty;\infty)$, и семейства зависимостей вида $x = f(a)$, заданных неявно уравнением (на рис. 6.20), показаны отдельные представители вертикальных прямых $a = p$ для конкретных значений параметра a.

Ответ: если $a \in (-\infty;-4]\bigcup[4;\infty)$, то единственное решение: $x=\dfrac{7}{a}$; если $a \in (-4;-3{,}5)$, то два решения: $x=\dfrac{7}{a}$ и $x=-\dfrac{1}{a+4}$; если $a = -3{,}5$, то решение одно: $x = -2$; если $a \in (-3{,}5;\,3{,}5)$, то решений нет; если a = 3,5, то решение одно: x = 2; если $a \in (3{,}5;\, 4)$, то решений два: $x = \dfrac{7}{a}$ и $x = -\dfrac{1}{a-4}$, что полностью соответствует решению, полученному с использованием эвристического правила.

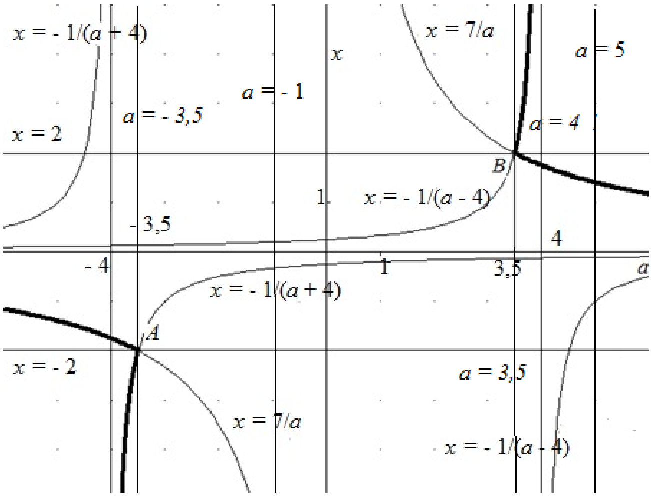


Рис. 6.20

6.7. Шестой случай

Пусть дано уравнение

$$|ax + b| + |ax - b| = mx + n, \tag{6.25}$$

где m – параметр; n – фиксированное число и $n > 0$. Введем функции: $y = |\,ax + b\,| + |\,ax - b\,|$ и $y = mx + n$. Тогда графическим образом правой части уравнения будет семейство параллельных прямых, проходящих через точку с координатами (0; n), лежащих ниже оси Ox (на рис. 6.21 показаны отдельные прямые семейства).

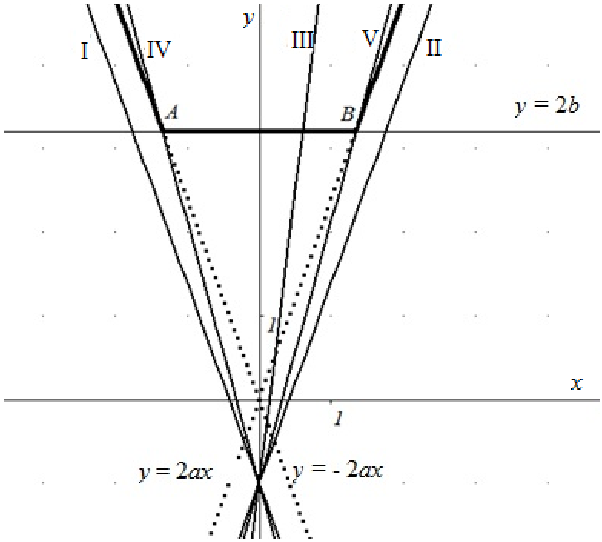


Рис. 6.21

Используя рис. 6.21 как графическую опору для рассуждений, проведем исследование:

1) сколько общих точек может быть на графиках функций $y = |ax + b| + |ax - b|$ и $y = mx + n$ в зависимости от значений параметра m?

2) может ли уравнение (6.25) иметь одно, два, бесконечное множество решений в зависимости от значений параметра m?

3) при каком значении параметра m уравнение не имеет решений? Ответы обоснуйте.

По результатам проведенного исследования сделать обобщение о количестве решений уравнения (6.25) в зависимости от значений параметра m.

Можно установить, что на графиках функций $y = |ax + b| + |ax - b|$ и $y = mx + n$ может быть только одна общая точка (на рис. 6.21 положение III, IV, V прямой $y = mx + n$).

Вопрос о существовании двух общих точек пересечения графиков $|ax+b|+|ax-b|=mx+n$ $|ax+b|+|ax-b|=mx+n$ $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = mx + n$ остается открытым.

Вместе с тем из проведенного исследования можно допустить, что двух общих точек на графиках функций не существует. Соответственно, уравнение (6.25) может не иметь решений либо иметь только дно решение.

Докажем данные утверждения. Для этого проведем еще одно исследование. Рассмотрим рис. 6.22 и исследуем количество общих точек на ломаной $y=|ax+b|+|ax-b|$ и прямой $y = mx + n$ в зависимости от значений параметра:

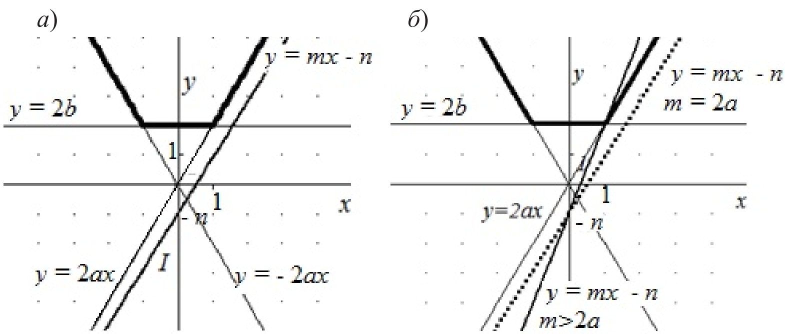


Рис. 6.22

1) может ли график прямой $y = mx + n$, $n < 0$ одновременно пересекаться и с частью графика $y = 2b$, и с частью графика $y = 2ax$ ($y = -2ax$), которые задаются функцией $y=|ax+b|+|ax-b|$?

2) при каком значении параметра m график прямой $y = mx + n$, $n < 0$ параллелен графику прямой $y = 2ax$ ($y = -2ax$)?

3) сравнить величины угловых коэффициентов прямых $y=2ax$ ($y = -2ax$) и $y = mx + n$, $n < 0$ при условии, что прямая $y = mx + n$ пересекает (не пересекает) график функции $y=|ax+b|+|ax-b|$.

В результате проведенного учебного эксперимента можно установить, что если $m = 2a$, то прямая $y = mx + n$, $n < 0$ параллельна прямой $y = 2ax$, значит, графики функций $y = |ax+b| + |ax-b|$ и $y = mx + n$ не пересекаются (рис. 6.22, *а*), а уравнение (6.25) не имеет решений.

Если $m > 2a$, то на графиках $y = |ax+b| + |ax-b|$ и $y = mx + n$, $n < 0$ будет одна общая точка (рис. 6.22, *б*). Аналогично если $m = -2a$, то прямая $y = mx + n$, $n < 0$ параллельна прямой $y = 2ax$ ($y = -2ax$), значит, графики функций $y = |ax+b| + |ax-b|$, $y = mx + n$ не пересекаются, а уравнение (6.25) не имеет решений.

Если $m > -2a$, то на графиках функций $y = |ax+b| + |ax-b|$ и $y = mx + n$ будет одна общая точка.

Значит, числами $m = -2a$, $m > 2a$ параметрическая ось делится на три частичных промежутка $(-\infty;\ -2a)$, $(-2a;\ 2a)$, $(2a;\ \infty)$. Уточним, будет ли уравнение (6.25) иметь решения, если $m \in (-2a;\ 2a)$. Число нуль принадлежит данному промежутку, поэтому если $m = 0$, то уравнение (6.25) преобразуется так: $|ax+b| + |ax-b| = 0x + n$, $|ax+b| + |ax-b| = n$. По условию $n < 0$; выражение $|ax+b| + |ax-b$, то уравнение (6.25) решений не имеет.

Окончательно получим: если $m \in (-\infty; -2a) \cup (2a; \infty)$, то уравнение имеет единственное решение; если $m \in (-2a;\ 2a)$, то решений нет.

Значит, ключевым значением параметра m для данного вида уравнений являются числа $m = -2a$ и $m = 2a$, которыми вся параметрическая ось делится на три частичных промежутка $(-\infty;\ -2a)$, $(-2a;\ 2a)$, $(2a; \infty)$, а у данного вида уравнений может быть либо одно решение, либо не быть решений.

Вывод. Количество решений уравнения $|ax+b| + |ax-b| = mx + n$, где m – параметр; n – фиксированное число и $n < 0$, в зависимости от значений параметра m можно описать так: если $m \in (-\infty; -2a) \cup (2a; \infty)$, то имеем единственное решение; если $m \in (-2a;\ 2a)$, то решений нет.

Значит, для любого уравнения вида (6.25) количество решений можно установить так.

Эвристическое правило-ориентир 6

Если в уравнении $|ax+b|+|ax-b|=mx+n$, где m – параметр; a, b – действительные положительные числа; n – фиксированное число и $n < 0$, то для нахождения количества решений необходимо:

1) вычислить $m = 2a$ – граничное значение параметра, при котором уравнение не имеет решений;

2) если $a \in (-2a; 2a)$, то уравнение решений не имеет;

3) если $a \in (-\infty; -2a) \cup (2a; \infty)$, то имеет единственное решение.

Пример 6.12. Найти количество решений уравнения в зависимости от значений параметра k:

$$|3,5x+0,3|+|3,5x-0,5| = 7,1 \cdot k \cdot x - 0,2. \qquad (6.26)$$

Решение. Имеем: $a = 3,5$, $b = 0,3$, $m = 7,1k$, $n = -0,2$, $n < 0$. В соответствии с эвристическим правилом вычислим:

$$m_1 = -7 = -7,1k_1;\ k_1 = -\frac{70}{71};\ m_2 = 7 = 7,1 \cdot k_2;\ k_2 = \frac{70}{71}.$$

Ответ: если $m \in \left(-\infty; -\frac{70}{71}\right) \cup \left(\frac{70}{71}; \infty\right)$, то имеем единственное решение; если $m \in \left[-\frac{70}{71}; \frac{70}{71}\right]$, то решений нет.

Пример 6.13. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра a:

$$|3x+1|+|3x-1| = 5ax-2. \qquad (6.27)$$

Решение. Имеем: $a = 3$, $b = 1$, $m = 5a$, $n = -2$, $n < 0$, поэтому, опираясь на эвристическое правило, вычислим: $m_1 = -6 = 5a$, $a = -\frac{6}{5}$; $m_2 = 6 = 5a$, $a = \frac{6}{5}$. Количество решений уравнения (6.27) в зависимости от значений параметра a можно описать так: если

$a \in \left(-\infty; -\frac{6}{5}\right) \cup \left(\frac{6}{5}; \infty\right)$, то уравнение имеет единственное решение; если $a \in \left[-\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right]$, то уравнение решений не имеет.

Решим уравнение (6.27) координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. Перенесем все выражения влево и рассмотрим функцию двух переменных:

$$F(a;x) = |3x+1| + |3x-1| - (5ax-2) = 0. \qquad (6.28)$$

Решить уравнение (6.28) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(a),\ x_2 = f_2(a),\ \ldots,\ x_k = f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a.

Приравняем к нулю подмодульные выражения, в результате получим: $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$. Эти числа разбивают числовую ось на три частичных промежутка, на каждом из которых подмодульные выражения сохраняют знак. После упрощений и выражения переменной x через параметр a получим: $x = \frac{2}{5a+6}$, когда $x < -\frac{1}{3}$ и $a \neq -1{,}2$; $x = \frac{4}{5a}$, когда $-\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3}$ и $a \neq 0$; $x = \frac{2}{5a-6}$, когда $x > \frac{1}{3}$ и $a \neq 1{,}2$.

Построим в системе координат aOx графики полученных зависимостей с учетом области существования переменной x и параметра a. Для этого проведем горизонтальные прямые $x = \frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{3}$. Эти прямые разбивают плоскость aOx на три частичные области $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$, $m \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $m \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$, на каждой из которых построим соответствующие графики. В области, лежащей ниже горизонтальной прямой $x=-\frac{1}{3}$ построим гиперболу $x=\frac{2}{5a+6}$ с асимптотой $a=-1{,}2$. В полосе, расположенной между прямыми $x=\frac{1}{3}$, $x=-\frac{1}{3}$, построим гиперболу $x=\frac{4}{5a}$ с асимптотой $a=0$. В области, лежащей выше прямой $x=\frac{1}{3}$, построим гиперболу $x=\frac{2}{5a-6}$ с асимптотой $a=1{,}2$. В результате получим геометрический образ уравнения (6.28), изображенный на рис. 6.23.

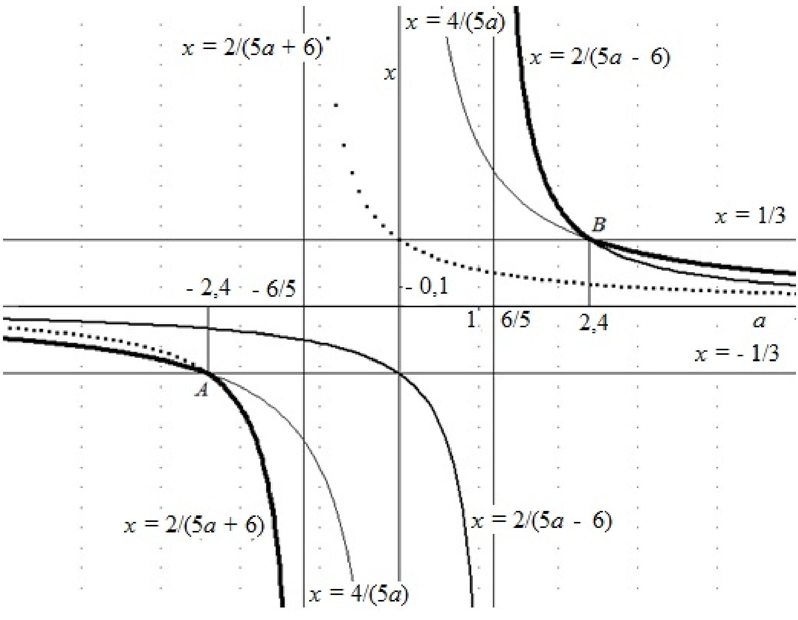


Рис. 6.23

Найдем координаты точки A (см. рис. 6.23), в которой пересекаются гиперболы $x=\dfrac{4}{5a}$ и $x=\dfrac{2}{5a+6}$, для чего приравняем правые части уравнений: $\dfrac{4}{5a}=-\dfrac{2}{5a+6}$. Тогда координаты точки $A\left(-2{,}4;\,-\dfrac{1}{3}\right)$. По аналогии координатами точки $B\left(2{,}4;\,\dfrac{1}{3}\right)$ (см. рис. 6.23).

Уравнение (6.28) имеет столько решений, сколько общих точек у вертикальной прямой $a = p$, где $a \in (-\infty;\infty)$ и семейства зависимостей вида $x = f(a)$, заданных неявно уравнением (6.28).

Ответ: если $a \in (-\infty;-2{,}4)\cup(2{,}4;\infty)$, то единственное решение: $x=\dfrac{4}{5a}$; если $a = -2{,}4$, то единственное решение: $x=-\dfrac{1}{3}$; если $a\in\left(-2{,}4;-\dfrac{6}{5}\right)$, то единственное решение: $x=\dfrac{2}{5a+6}$; если $a\in\left[-\dfrac{6}{5};\dfrac{6}{5}\right]$, то решений нет; если $a\in\left(\dfrac{6}{5};\,2{,}4\right)$, то единственное решение: $x=\dfrac{2}{5a-6}$; если $a = 2{,}4$, то единственное решение: $x=\dfrac{1}{3}$.

6.8. Седьмой случай

Пусть дано уравнение

$$|ax+b|+|ax-b|=mx+n, \tag{6.29}$$

где m – параметр; n – фиксированное число и $n > 2b$. Введем функции $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = mx + n$. Тогда графическим образом правой части уравнения будет семейство проходящих через точку с координатами $(0;\,n)$ лежащей выше прямой $y = 2b$ (на рис. 6.24, *а* показаны отдельные прямые семейства).

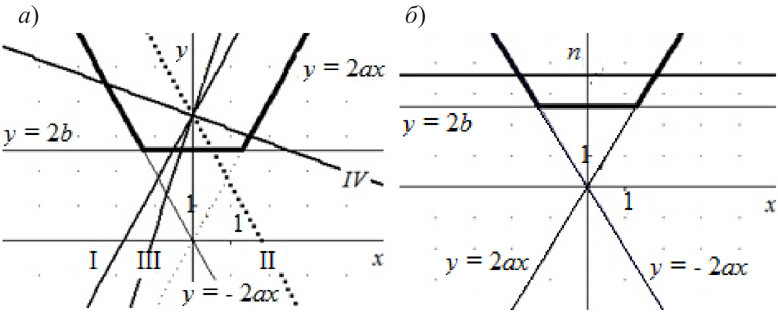


Рис. 6.24

Используя рис. 6.24 как графическую опору для рассуждений, проведем исследование:

1) сколько общих точек может быть на графиках функций $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = mx + n$, $n > 2b$ в зависимости от значений параметра m?

2) всегда ли уравнение имеет решение?

3) может ли данное уравнение иметь бесконечное множество решений? Ответ обосновать.

В результате проведенного исследования можно установить, что на графиках функций $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = mx + n$, $n > 2b$ может быть одна или две общие точки, а уравнение, соответственно, может иметь одно или два решения. Других случаев нет.

Уравнение (6.29) имеет единственное решение, если графики $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = mx + n, n > 2b$ имеют одну общую точку. Это возможно, если прямая $y = mx + n$ параллельна либо прямой $y = 2ax$, либо $y = -2ax$ (соответствует положению I и II прямой $y = mx + n$ на рис. 6.24, $а$). Имеем: $m_1 = -2a$ или $m_2 = 2a$ – значения параметра, при которых уравнение имеет единственное решение. Числами $m_1 = -2a$ и $m_2 = 2a$ параметрическая ось делится на три частичных промежутка: $(-\infty; -2a)$, $(-2a; 2a)$, $(2a; \infty)$. Если параметр m принимает значения из этого промежутка, то уравнение (6.29) имеет либо единственное решение, либо два решения.

Число $m = 0$ принадлежит промежутку ($-2a$; $2a$). Подставим это значение в уравнение(6.29), получим: $|ax+b|+|ax-b|=n$. Графическим образом правой части последнего уравнения является прямая $y = n$, параллельная оси Ox. Так как по условию $n > 2b$, то прямая $y = n$ всегда пересекает график ломаной линии $y=|ax+b|+|ax-b|$ в двух точках (см. рис. 6.24, *б*). Поэтому если $m\in(-2a;2a)$, то уравнение имеет два решения (соответствует положению IV прямой $y = mx + n$ на рис. 6.24, *а*). Окончательно получим: если $m\in(-\infty;-2a]\cup[2a;\infty)$, то уравнение имеет единственное решение; если $m\in(-2a;2a)$, то имеем два решения.

Значит, ключевыми значениями параметра m для данного вида уравнений являются числа $m_1 = -2a$ и $m_2 = 2a$, которыми вся числовая параметрическая ось разбивается на три частичных промежутка ($-\infty$; $-2a$), ($-2a$; $2a$), ($2a$; ∞), а у данного вида уравнений может быть одно, либо два решения.

Вывод. Количество решений уравнения $|ax+b|+|ax-b|=$ $=mx+n$, где a, b – действительные положительные числа; n – фиксированное число и $n > 2b$, в зависимости от значений параметра m можно описать так: если $m\in(-\infty;-2a]\cup[2a;\infty)$, то уравнение имеет единственное решение; если $m\in(-2a;2a)$, то уравнение имеет два решения. Иных случаев нет.

Значит, для любого уравнения данного вида количество решений можно установить так.

Эвристическое правило-ориентир 7

Если в уравнении $|ax+b|+|ax-b|=mx+n$, где m – параметр; a, b – действительные положительные числа; n – фиксированное число и $n > 2b$, то для определения количества решений уравнения в зависимости от значений параметра m нужно:

1) вычислить $m_1 = -2a$ и $m_2 = 2a$ – граничные значения параметра, при которых уравнение имеет единственное решение;

2) если $a \in (-\infty; -2a] \cup [2a; \infty)$, то имеем единственное решение;

3) если $a \in (-2a; 2a)$, то имеем два решения.

Пример 6.14. Найти количество решений уравнения в зависимости от значений параметра k:

$$\left|28{,}5x + 3{,}3\right| + \left|28{,}5x - 3{,}3\right| = 6{,}2kx + 7. \qquad (6.30)$$

Решение. Имеем: $a = 28{,}5,\ b = 3{,}3,\ m = 6{,}2a,\ n = 7$. Сравним значения выражений n и $2b$: $n = 7,\ 2b = 6{,}6,\ n > 2b$, значит, согласно эвристическому правилу вычислим: $m_1 = -2a$ и $m_2 = 2a$; $m_1 = -2 \cdot 28{,}5 = -57 = 6{,}2k_1$, откуда $k_1 = -\frac{285}{31} = -9\frac{6}{31}$; $m_2 = 2 \cdot 28{,}5 = 57 = 6{,}2 \cdot k_2$, откуда $k_2 = \frac{285}{31} = 9\frac{6}{31}$.

Ответ: если $k \in \left(-\infty; -\frac{285}{31}\right] \cup \left[\frac{285}{31}; \infty\right)$, то единственное решение; если $k \in \left(-\frac{285}{31}; \frac{285}{31}\right)$, то решений два.

Пример 6.15. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра k:

$$|1{,}5x + 1| + |1{,}5x - 1| = ax + 3. \qquad (6.31)$$

Решение. Имеем: $a = 1{,}5,\ b = 1,\ m = a,\ n = 3$. Сравним значения выражений n и $2b$: $n = 3,\ 2b = 2,\ n > 2b$, значит, согласно эвристическому правилу вычислим: $m_1 = -2a$ и $m_2 = 2a$; $m_1 = -2 \cdot 1{,}5 = -3$, $m_2 = 3$. Количество решений уравнения (6.31) в зависимости от значений параметра a можно описать так: если $a \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$, то решение одно; если $a \in (-3;\ 3)$, то решений два. Решим уравнение координатно-параметрическим методом с применением метода сечений. Перенесем все выражения влево и рассмотрим функцию двух переменных:

$$F(a; x) = |1{,}5x + 1| + |1{,}5x - 1| - (ax + 3) = 0. \qquad (6.32)$$

Решить уравнение (6.32) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(a),\ x_2 = f_2(a), \ldots,\ x_k = f_k(a)$, заданных исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a.

Приравняем к нулю подмодульные выражения и решим их относительно переменной x. В результате получим числа $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, которыми числовая ось разбивается на три частичных промежутка, на каждом из которых подмодульные выражения сохраняют знак. Поэтому если $x < -\frac{2}{3}$, то $-1{,}5x - 1 - 1{,}5x + 1 = ax + 3$; если $-\frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3}$, то $1{,}5x + 1 - 1{,}5x + 1 = ax + 3$; если $x > \frac{2}{3}$, то $1{,}5x + 1 + 1{,}5x - 1 = ax + 3$. Упростим полученные выражения и выразим из них переменную x через переменную (параметр) a. Если область допустимых значений переменной x задана неравенством $x < -\frac{2}{3}$, тогда функция двух переменных (6.32) задает семейство зависимостей (гипербол) вида $x = -\frac{3}{a+3}$ с асимптотой $a = -3$; если область допустимых значений переменной x задана двойным неравенством $-\frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3}$, тогда функция двух переменных (6.32) задает семейство зависимостей (гипербол) вида $x = -\frac{1}{a}$ с асимптотой $a = 0$; если область допустимых значений переменной x задана неравенством $x > \frac{2}{3}$, тогда функция двух переменных $F(a; x) = |1{,}5x + 1| + |1{,}5x - 1| - (ax + 3) = 0$ (6.32) задает семейство зависимостей (гипербол) вида $x = -\frac{3}{a-3}$ с асимптотой

$a = 3$. Полученные зависимости накладывают, в свою очередь, ограничения на переменную (параметр) a. Имеем: $x = -\dfrac{3}{a+3}$, когда $x < -\dfrac{2}{3}$ и $a \neq -3$; $x = -\dfrac{1}{a}$, когда $-\dfrac{2}{3} \leq x \leq \dfrac{2}{3}$ и $a \neq 0$; $x = -\dfrac{3}{a-3}$, когда $x > \dfrac{2}{3}$ и $a \neq 3$.

Построим в системе координат полученные зависимости (гиперболы) с учетом области допустимых значений переменной x и параметра a. Прямыми $x = -\dfrac{2}{3}$ и $x = \dfrac{2}{3}$ координатно-параметрическая плоскость разбивается на три частичные области, на каждой из которых построим соответствующие зависимости (рис. 6.25).

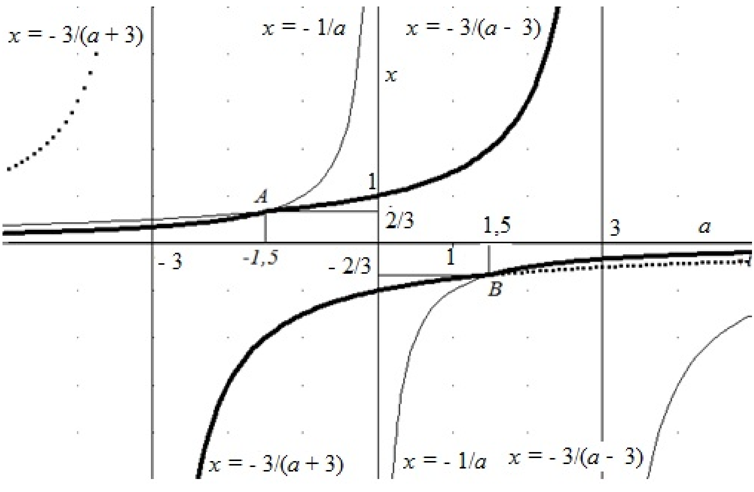


Рис. 6.25

Найдем координаты точек пересечения графиков зависимостей. Гиперболы $x=-\frac{1}{a}$ и $x=-\frac{3}{a-3}$ пересекаются в точке A, имеющей координаты: a = –1,5; $x=\frac{2}{3}$. Гиперболы $x=-\frac{3}{a+3}$ и $x=-\frac{1}{a}$ пересекаются в точке B с координатами: a = 1,5; $x=-\frac{2}{3}$ (см. рис. 6.25). Уравнение (6.32) имеет столько решений, сколько раз вертикальная прямая $a = p$ пересечет графики зависимостей $x = f(a)$.

Ответ: если $(-\infty;-3]\cup[3;\infty)$, то единственное решение: $x=-\frac{1}{a}$; если $a\in(-3;-1{,}5)$, то решений два: $x=-\frac{1}{a}$ и $x=-\frac{3}{a+3}$; если a = –1,5, решений два: $x=\frac{2}{3}$ и $x=-\frac{3}{a+3}$; если $a\in(-1{,}5;1{,}5)$, решений два: $x=-\frac{3}{a+3}$ и $x=-\frac{3}{a-3}$; если a = 1,5, то два решения: $x=-\frac{3}{a-3}$ и $x=-\frac{1}{a}$; если $a\in(1{,}5;3)$, то решений два: $x=-\frac{2}{3}$ и $x=-\frac{3}{a-3}$.

6.9. Восьмой случай

Пусть дано уравнение $|ax+b|+|ax-b|=mx+n$, где m – параметр; n – фиксированное число и $n = 2b$. Тогда уравнение примет вид

$$|ax+b|+|ax-b|=mx+2b. \qquad (6.33)$$

Введем функции $y=|ax+b|+|ax-b|$ и $y = mx + 2b$. Тогда графическим образом правой части уравнения будет семейство прямых, проходящих через точку с координатами (0; $2b$), лежащей на прямой $y = 2b$ (на рис. 6.26, a показаны отдельные прямые семейства).

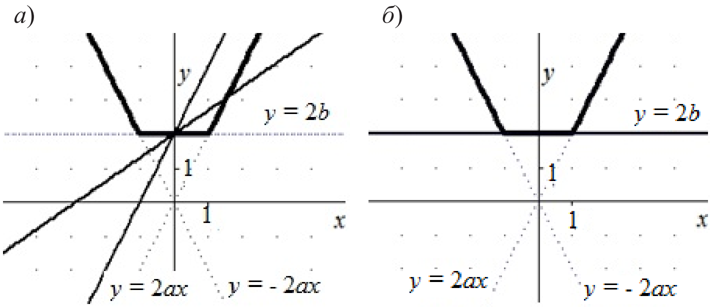


Рис. 6.26

Используя рис. 6.26 как графическую опору для рассуждений, проведем исследование:

1) сколько общих точек может быть на графиках функций $y = |ax + b| + |ax - b|$ и $y = mx + 2b$ в зависимости от значений параметра m?

2) всегда ли уравнение имеет решения в зависимости от значений параметра m?

3) может ли уравнение иметь бесконечное множество решений? Ответы обоснуйте.

По результатам проведенного исследования сделать обобщение о количестве решений уравнения (6.33) в зависимости от значений параметра m.

Можно установить, что на графиках функций $y = |ax + b| + |ax - b|$ и $y = mx + 2b$ могут быть одна или две общие точки (см. рис. 6.26, *а*) или бесконечное множество точек (см. рис. 6.26, *б*). Соответственно, уравнение (6.33) может иметь одно, два или бесконечное множество решений.

Установим, при каком значении параметра m уравнение (6.33) имеет бесконечное множество решений. Это возможно при условии, что $m = 0$. Графики функций $y = |ax + b| + |ax - b|$ и $y = mx + 2b$ будут совпадать на отдельных участках.

Найдем, при каком значении параметра m уравнение имеет единственное решение. Это возможно, если $m = 2a$ или $m = -2a$.

Тогда прямая $y = mx + 2b$ параллельна либо прямой $y = -2ax$, либо $y = 2ax$, при этом на графиках функций $y = |ax+b| + |ax-b|$ и $y = mx + 2b$ будет одна общая точка.

Числами $m = -2a$; $m = 2a$; $m = 0$; $m = 2a$ параметрическая прямая разбивается на четыре частичных промежутка. Если $m \le -2a$ и $m \ge 2a$, то уравнение имеет единственное решение. Если $m \in (-2a;0) \cup (0;2a)$, то уравнение имеет два решения. Окончательно получим: если $m \in (-\infty;-2a] \cup [2a;\infty)$, то уравнение имеет единственное решение; если $m \in (-2a;0) \cup (0;2a)$, то два решения; если $m = 0$, то решений бесконечное множество.

Значит, ключевым значением параметра m для данного вида уравнений являются числа $m_1 = -2a$, $m_2 = 0$, $m_3 = 2a$, которыми вся параметрическая ось делится на четыре частичных промежутка $(-\infty; -2a)$, $(-2a; 0)$, $(0; 2a)$, $(2a; \infty)$, а данный вид уравнений может иметь одно, два или бесконечное множество решений.

Вывод. Количество решений уравнения $|ax+b| + |ax-b| = mx + 2b$, где a, b – действительные положительные числа, в зависимости от значений параметра m можно описать так: если $m \in (-\infty;-2a] \cup [2a;\infty)$, то уравнение имеет единственное решение; если $m \in (-2a;0) \cup (0;2a)$, то два решения; если $m = 0$, то решений бесконечное множество.

Значит, для любого уравнения вида (6.33) количество решений уравнения можно установить так.

Эвристическое правило-ориентир 8

Если в уравнении $|ax+b| + |ax-b| = mx + n$, где m – параметр; a, b – действительные положительные числа; $n = 2b$, то для нахождения количества решений обходимо:

1) вычислить $m_1 = -2a$; $m_2 = 2a$ – граничные значения параметра, при которых уравнение имеет единственное решение;

2) при значении параметра $m = 0$ уравнение имеет бесконечное множество решений;

3) при значениях параметра из промежутков $(-\infty; -2a] \cup [2a; \infty)$ уравнение имеет одно решение;

4) при значениях параметра из промежутка $(-2a; 0) \cup (0; 2a)$ уравнение имеет два решения.

Пример 6.16. Найти количество решений уравнения в зависимости от значений параметра k:

$$\left|54x+7{,}3\right|+\left|54x-7{,}3\right|=4kx+14{,}6. \qquad (6.34)$$

Решение. Имеем: $a=54,\ b=7{,}3,\ m=4k,\ n=14{,}6$. Сравним значения выражений n и $2b$: $n=14{,}6,\ 2b=14{,}6,\ \ n=2b$, значит, согласно эвристическому правилу вычислим: $m_1=-2a$ и $m_2=2a$; $m_1=-2\cdot 54=-106=4k_1$, откуда $k_1=-27$; $k_2=27$.

Ответ: если $k\in(-\infty;-27]\cup[27;\infty)$, то единственное решение; если $k\in(-27;0)\cup(0;27)$, то решений два; если $k=0$, то решений бесконечное множество.

Пример 6.17. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра a:

$$\left|\frac{x}{2}+0{,}5\right|+\left|\frac{x}{2}-0{,}5\right|=3ax+1. \qquad (6.35)$$

Решение. Имеем: $a=0{,}5,\ b=0{,}5,\ m=3a,\ n=1.$ Сравним значения выражений n и $2b$: $n=1,\ 2b=16,\ \ n=2b$, значит, согласно эвристическому правилу вычислим: $m_1=-2$ и $m_2=2a$: $m_1=-2\cdot 0{,}5=-1=3a$, откуда $a_1=-\frac{1}{3}$; $a_2=\frac{1}{3}$. Числами $-\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}$ параметрическая ось делится на четыре частичных промежутка $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3};0\right)$, $\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3};\infty\right)$, поэтому в соответствии с эвристическим правилом если $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3};\infty\right)$, то уравнение имеет единственное решение; если $a\in\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{3}\right)$, имеем два решения; если $a=0$, решений бесконечное множество.

Решим уравнение координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. Перепишем уравнение $\left|\frac{x}{2}+0{,}5\right|+\left|\frac{x}{2}-0{,}5\right|=3ax+1$ так: $\left|\frac{x}{2}+0{,}5\right|+\left|\frac{x}{2}-0{,}5\right|-(3ax+1)=0.$

Рассмотрим функцию двух переменных, заданных неявно уравнением

$$F(a;x)=\left|\frac{x}{2}+0{,}5\right|+\left|\frac{x}{2}-0{,}5\right|-(3ax+1)=0. \qquad (6.36)$$

Решить уравнение (6.36) – значит, найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1=f_1(a),\ x_2=f_2(a),\ \ldots,\ x_k=f_k(a)$, заданных исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a.

Приравняем к нулю подмодульные выражения и решим их относительно переменной x. В результате получим числа $x=-1$, $x=1$, которыми числовая ось разбивается на три частичных промежутка, на каждом из которых подмодульные выражения сохраняют знак.

Если $x<-1$, то $-0{,}5x-0{,}5-0{,}5x+0{,}5=3ax+1$.

Если $-1\le x\le 1$, то $0{,}5x+0{,}5-0{,}5x+0{,}5=3ax+1$.

Если $x>1$, то $0{,}5x+0{,}5+0{,}5x-0{,}5=3ax+1$.

После упрощений получим: если область допустимых значений переменной x описывается неравенством $x<-1$, тогда функция двух переменных $F(a;x)=\left|\frac{x}{2}+0{,}5\right|+\left|\frac{x}{2}-0{,}5\right|-(3ax+1)=0$ задает семейство зависимостей вида $x=-\frac{1}{3a+1}$ с асимптотой $a=-\frac{1}{3}$; если область допустимых значений переменной x описывается неравенством $-1\le x\le 1$, тогда функция двух переменных $F(a;x)=\left|\frac{x}{2}+0{,}5\right|+\left|\frac{x}{2}-0{,}5\right|-(3ax+1)=0$ задает семейство зависимостей вида $ax = 0$; если область допустимых значений переменной x описывается неравенством $x > 1$, тогда функция двух переменных $F(a;x)=\left|\frac{x}{2}+0{,}5\right|+\left|\frac{x}{2}-0{,}5\right|-(3ax+1)=0$ задает семейство зависимостей вида $x=-\frac{1}{3a-1}$ с асимптотой $a=-\frac{1}{3}$. Полученные зависимости, в свою очередь, накладывают ограничения на переменную (параметр) a.

Обратим внимание абитуриентов также на уравнение $ax = 0$. Его решениями будут или $a = 0$, или $x = 0$. Окончательно получим: $x=-\frac{1}{3a+1}$, если $x < -1$ и $a\neq-\frac{1}{3}$; $x = 0$ или $a = 0$, если $-1 \le x \le 1$; $x=-\frac{1}{3a-1}$, если $x > 1$ и $a\neq-\frac{1}{3}$. Построим в системе координат aOx графики зависимостей $x = f(a)$ с учетом области допустимых значений переменной x и параметра a (см. рис. 6.27).

Графическим образом уравнения

$$F(a;x)=\left|\frac{x}{2}+0{,}5\right|+\left|\frac{x}{2}-0{,}5\right|-(3ax+1)=0$$

являются ветки двух гипербол $x=-\frac{1}{3a+1}$ и $x=-\frac{1}{3a-1}$, соединенных отрезком вертикальной прямой $x\in[-1;1]$, размещенной на вертикальной оси Ox. Уравнение (6.36) имеет столько решений, сколько раз вертикальная прямая $a = p$ пересечет графики зависимостей $x = f(a)$ (рис. 6.27). Вместе с тем данное умозаключение противоречит выводам, сделанным с использованием правила-ориентира 8.

Согласно данному эвристическому правилу уравнение (6.36) всегда имеет хотя бы одно решение в зависимости от значений параметра a. В результате имеем противоречие, которое необходимо устранить.

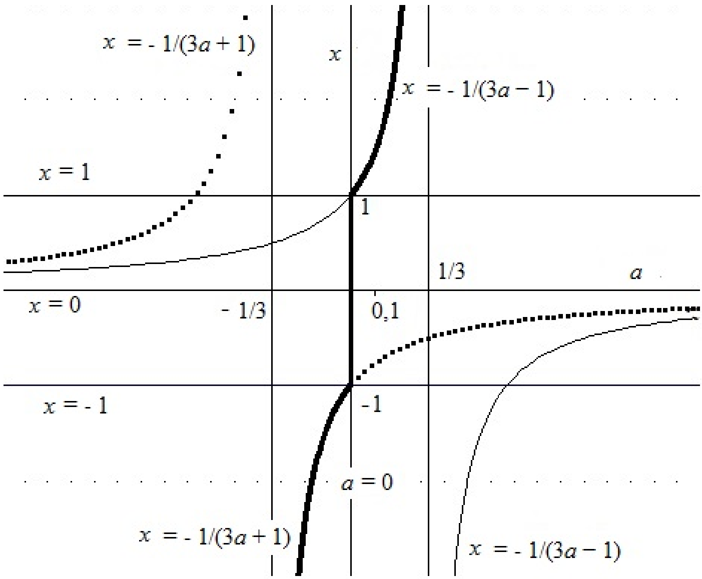


Рис. 6.27

Абитуриент должен вернуться к уравнению $ax = 0$ и правильно истолковать его графический образ. Графически уравнению $ax = 0$ соответствуют точки части вертикальной прямой $a = 0$, лежащей между горизонтальными прямыми $x = -1$ и $x = 1$ (т. е. вертикальный отрезок $[-1; 1]$) и все точки оси абсцисс Oa. Значит, на рис. 6.27 показаны не все решения исходного уравнения. Правильная интерпретация образа уравнения (6.36) показана на рис. 6.28.

Используя рис. 6.28 как опору для рассуждений, можно сделать следующие выводы. При значениях параметра $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \infty\right)$ уравнение имеет единственное решение. При $a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ или $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ уравнение имеет два решения, при $a = 0$ решений бесконечное множество.

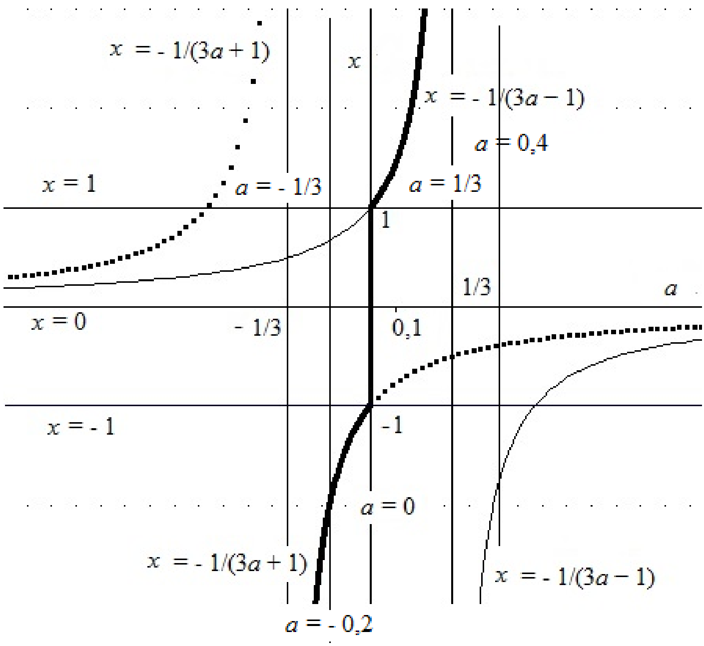


Рис. 6.28

Ответ: если $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \infty\right)$, то имеем единственное решение: $x = 0$. Если $a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$, то имеем два решения: $x = -\frac{1}{3a+1}$ и $x = 0$; если $a = 0$, то бесконечное множество решений: $x \in [-1; 1]$; если $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$, то решений два: $x = -\frac{1}{3a-1}$ и $x = 0$.

Проведенное исследование уравнения (6.36) наглядно демонстрирует, что даже знакомое и «легкое» на первый взгляд уравнение может таить в себе подводные камни и вызывать значительные трудности у абитуриентов. Это лишний раз подтверждает, что умение решать уравнения с параметрами требует творческого, нешаблонного подхода и глубоких знаний предмета, умения рассматривать задание с разных сторон, видеть общую картину учебной ситуации, описанной в условии конкретного задания.

6.10. Упражнения для самостоятельного решения

Задание 1. В зависимости от значений параметра найти количество решений уравнения.

1.1. $|37{,}3x + 8{,}1| + |37{,}3x - 8{,}1| = 6{,}2k - 1{,}1$.

Ответ: если $k \in \left(-\infty; \frac{173}{62}\right)$, то решений нет; если $k = \frac{173}{62}$, то решений бесконечное множество; если $k \in \left(\frac{173}{62}; \infty\right)$, то решений два.

1.2. $|22{,}3x + 0{,}4| + |22{,}3x - 0{,}4| = (k - 1)x$.

Ответ: если $k = -43{,}6$; $k = 43{,}6$, то решений бесконечное множество; если $k \in (-\infty; -43{,}6) \cup (45{,}6; \infty)$, то решение одно; если $k \in (-43{,}6;\ 45{,}6)$, то решений нет.

1.3. $|0{,}3x + 1{,}3| + |0{,}3x - 1{,}3| = 0{,}6x + 5k + 1$.

Ответ: если $k \in \left(-\infty; -\frac{1}{5}\right)$, то решений нет; если $k = -\frac{1}{5}$, то решений бесконечное множество; если $k \in \left(-\frac{1}{5}; \infty\right)$, то единственное решение.

1.4. $|5{,}4x + 0{,}1| + |5{,}4x - 0{,}1| = 3{,}8x + 22{,}3k - 4$.

Ответ: если $k \in \left(-\infty; \frac{5}{27}\right)$, то решений нет; если $k = \frac{5}{27}$, то единственное решение; если $k \in \left(\frac{5}{27}; \infty\right)$, то решений два.

1.5. $|2{,}8x + 3{,}1| + |2{,}8x - 3{,}1| = 12{,}6kx + 5{,}3$.

Ответ: если $k \in \left(-\frac{2}{31}; \frac{2}{31}\right)$, то решений нет; если $k \in \left(-\infty; -\frac{4}{9}\right] \cup \left[\frac{4}{9}; \infty\right)$, то единственное решение; если $k \in \left(-\frac{4}{9}; -\frac{2}{31}\right) \cup \left(\frac{2}{31}; \frac{4}{9}\right)$, то решений два.

1.6. $| 74x + 23 | + | 74x - 23 | = 37kx - 46$.

Ответ: если $k \in [-4; 4]$, то решений нет; если $k \in (-\infty; -4) \cup \cup(4; \infty)$, то единственное решение.

1.7. $| 0{,}4x + 0{,}1 | + | 0{,}4x - 0{,}1 | = 2{,}4kx + 0{,}3$.

Ответ: если $k \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, то решений два; если $k \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \infty\right)$, то единственное решение.

1.8. $\left|\frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{7}\right| + \left|\frac{1}{3} \cdot x - \frac{2}{7}\right| = \left(\frac{2k}{3} - 1\right) \cdot x + \frac{4}{7}$.

Ответ: если $k \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$, то решений два; если $k \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; \infty\right)$, то единственное решение; если $k = \frac{3}{2}$, то решений бесконечное множество.

Задание 2. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра.

2.1. $| 5{,}5x + 0{,}5 | + | 5{,}5x - 0{,}5 | = 3k - 1$.

Ответ: если $k \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$, то решений нет; если $k = \frac{2}{3}$, то решений бесконечное множество: $x = \left[-\frac{1}{11}; \frac{1}{11}\right]$; если $k \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$, то решений два: $x = \frac{3}{11}k - \frac{1}{11}$ и $x = -\frac{3}{11}k + \frac{1}{11}$.

2.2. $| 6x + 5 | + | 6x - 5 | = (3k - 2)x$.

Ответ: если $k \in \left(-\infty; -\dfrac{10}{3}\right) \cup \left(\dfrac{14}{3}; \infty\right)$, то единственное решение: $x = \dfrac{10}{3k-2}$; если $k = -\dfrac{10}{3}$, то решений бесконечное множество: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{6}\right)$; если $k = \dfrac{14}{3}$, то решений бесконечное множество: $x \in \left[\dfrac{5}{6}; \infty\right)$; если $k \in \left(-\dfrac{10}{3}; \dfrac{14}{3}\right)$, то решений нет.

2.3. $| x + 4 | + | x - 4 | = - 2x + 3k + 6$.

Ответ: если $k \in (-\infty; -2)$, то решений нет; если $k = -2$, то решений бесконечное множество: $x \in (-\infty; -4]$; если $k \in \left(-2; \dfrac{10}{3}\right)$, то единственное решение: $x = 1{,}5x - 1$; если $k = \dfrac{10}{3}$, то единственное решение: $x = 4$; если $k \in \left(\dfrac{10}{3}; \infty\right)$, то единственное решение: $x = \dfrac{3}{4}k - 1$.

2.4. $| 3x + 1 | + | 3x - 1 | = 3x + p$.

Ответ: если $p \in (-\infty; 1)$, то решений нет; если $p = 1$, то единственное решение: $x = \dfrac{1}{3}$; если $p \in (1; 3)$, то решений два: $x = \dfrac{1}{3}p$ и $x = -\dfrac{1}{3}p + \dfrac{2}{3}$; если $p \in [3; \infty)$, то решений два: $x = \dfrac{1}{3}p$ и $x = -\dfrac{1}{9}p$.

2.5. $| 3x + 5 | + | 3x - 5 | = 2kx + 4$.

Ответ: если $k \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$, то единственное решение: $x = \dfrac{3}{k}$; если $k = 1{,}8$, то единственное решение: $x = \dfrac{5}{3}$; если $k \in (-3; -1{,}8)$, то решений два: $x = \dfrac{3}{k}$ и $x = -\dfrac{2}{k+3}$; если $k = -1{,}8$, то единственное решение: $x=-\frac{5}{3}$; если $k\in(-1{,}8;1{,}8)$, то решений нет; если $k\in(1{,}8;3)$, то решений два: $x=\frac{3}{k}$ и $x=-\frac{2}{k-3}$.

2.6. $|x+4|+|x-4|=2kx-6$.

Ответ: если $k\in(-\infty;-1{,}75)\cup(1{,}75;\infty)$, то единственное решение, $x=\frac{7}{k}$; если $k=-1{,}75$, то единственное решение: $x=-4$; если $k\in(-1{,}75;-1)$, то единственное решение: $x=-\frac{3}{k+1}$; если $k\in[-1;1]$, то решений нет; если $k\in(1;1{,}75)$, то единственное решение: $x=\frac{3}{k-1}$; если $k=1{,}75$, то единственное решение: $x=4$.

2.7. $|x+2|+|x-2|=6kx+8$.

Ответ: если $k\in(-\infty;-\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{3};\infty)$, то единственное решение: $x=-\frac{2}{3k}$; если $k\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, то решений два: $x=-\frac{4}{3k+1}$ и $x=-\frac{4}{3k-1}$.

2.8. $|x+1|+|x-1|=(3k+1)x+2$.

Ответ: если $k\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{3};\infty\right)$, то единственное решение: $x=0$; если $k\in\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$, то решений два: $x=-\frac{2}{3(k+1)}$ и $x=0$; если $k=-\frac{1}{3}$, то решений бесконечное множество: $x\in[-1;1]$; если $k\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, то решений два: $x=-\frac{2}{3k-1}$ и $x=0$.

Глава 7. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ МОДУЛЯМИ, СОДЕРЖАЩЕГО ПАРАМЕТР И В ЛЕВОЙ, И В ПРАВОЙ ЧАСТИ

7.1. Решение уравнений с параметрами и двумя модулями разными способами

В предыдущей главе было рассмотрено решение разных видов уравнений

$$|ax+b|+|ax-b|=f(x),$$

где параметр содержался только в правой части уравнения. Вместе с тем решение уравнения значительно усложнится, если параметр будет входить и в подмодульные выражения. Тем более решение такого вида уравнений актуально для абитуриентов, так как подобного вида уравнения широко представлены в материалах Единого государственного экзамена по профильной математике.

Научиться решать сложные уравнения, содержащие разные алгебраические и трансцендентные выражения с параметрами под знаком модуля, достаточно сложная задача. Поэтому логично начать с рассмотрения решения более простых (назовем их стандартными) уравнений вида

$$|\,ax+b\,|+|\,ax-b\,|=f(x), \tag{7.1}$$

где параметр содержится и в левой, и в правой части уравнения.

Приведем пример наиболее распространенного уравнения вида (7.1), у которого параметр содержится и в правой части, и в левой.

Пример 7.1. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра a:

$$|2x+a|+|2x-a|=a+3. \tag{7.2}$$

Решение

Первый способ. Сложность графического решения примера заключается в том, что параметр содержится в правой части уравнения (7.2) и одновременно находится под знаком модуля в левой части. Обозначим правую и левую часть уравнения через однозначные явно заданные функции $y=|2x+a|+|2x-a|$ и $y = a + 3$. Рассмотрим функцию $y=|2x+a|+|2x-a|$, при $a = 0$, получим $y=4\cdot|x|$. Графиком $y=4\cdot|x|$ является ломаная линия, состоящая из двух звеньев (лучей) (рис. 7.1, *а*). Если параметр a принимает другие значения, например $a = 0{,}5$ ($a = –0{,}5$), то получим функцию $y=|2x+0{,}5|+|2x-0{,}5|$, графиком которой будет ломаная линия (рис. 7.1, *б*). Графиком функции $y=|2x+a|+|2x-a|$ является семейство прямых, параллельных оси Ox.

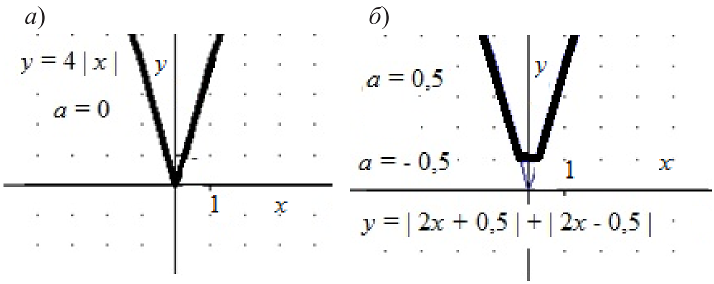


Рис. 7.1

Вместе с тем приведенных рассуждений недостаточно, чтобы понять, при каких значениях параметра графики функций $y=|2x+a|+|2x-a|$ и $y=a+3$ пересекаются или не имеют общих точек. Поэтому рассмотрим другой способ решения уравнения.

Второй способ. Решим уравнение координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. Перенесем все выражения влево и рассмотрим функцию двух переменных:

$$F(a;x)=|2x+a|+|2x-a|-(a+3)=0. \qquad (7.3)$$

Решить уравнение (7.3) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(a), x_2 = f_2(a), \ldots, x_k = f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a.

Проведем равносильные преобразования, для чего раскроем выражения, стоящие под знаком модуля. Приравняем к нулю подмодульные выражения и решим их относительно переменной x: $x = 0,5$, $x = –0,5$. Прямыми $x = 0,5$ и $x = –0,5$ координатно-параметрическая плоскость aOx делится на четыре частичные области, описываемые системами:

$$\begin{cases} x \le -0,5 \cdot a, \\ x \le 0,5 \cdot a, \end{cases} \begin{cases} x \le -0,5 \cdot a, \\ x \ge 0,5 \cdot a, \end{cases} \begin{cases} x \ge -0,5 \cdot a, \\ x \le 0,5 \cdot a, \end{cases} \begin{cases} x \ge -0,5 \cdot a, \\ x \ge 0,5 \cdot a. \end{cases}$$

На каждой из частичных областей подмодульные выражения сохраняют знак. Для функции двух переменных $F(a; x) = |2x + a| + |2x - a| - (a + 3) = 0$ системы неравенств – это области допустимых значений переменной x, для каждой из которых необходимо найти зависимости вида $x = f(a)$, Раскроем подмодульные выражения функции (7.3) на частичной области

$$\begin{cases} x \le -0,5 \cdot a, \\ x \le 0,5 \cdot a. \end{cases} \qquad (7.4)$$

Чтобы выяснить, с каким знаком раскрывается каждое из подмодульных выражений $|2x + a|$ и $|2x - a|$ на области (7.4), воспользуемся методом так называемой пробной точки.

Алгоритм этого метода может быть таким:

1) выбрать произвольную точку из данной области, например с координатами (0; –4);

2) подставить ее координаты в каждое из двух подмодульных выражений и выяснить знак полученного выражения: $2 \cdot (-4) + 0 = -8 < 0$ и $2 \cdot (-4) - 0 = -8 < 0$;

3) если после подстановки числа получили отрицательное значение, то данное подмодульное выражение раскрываем

со знаком «минус»; если получили положительное значение, то подмодульное выражение раскрываем со знаком «плюс». В рассмотренном случае после подстановки координат пробной точки в подмодульные выражения $|2x+a|$ и $|2x-a|$ получили отрицательные числа. Значит, на этой частичной области оба модуля раскрываются со знаком «минус»:

$$\begin{cases} x \le -0{,}5a, \\ x \le 0{,}5a, \\ -2x - a + a - 2x + a = a + 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -0{,}5a, \\ x \le 0{,}5a, \\ x = -0{,}25a - 0{,}75. \end{cases}$$

Графическим образом полученной системы являются точки прямой $x = -0{,}25a - 0{,}75$, расположенной в области, лежащей ниже прямых $x = 0{,}5a$ и $x = -0{,}5a$ (рис. 7.2).

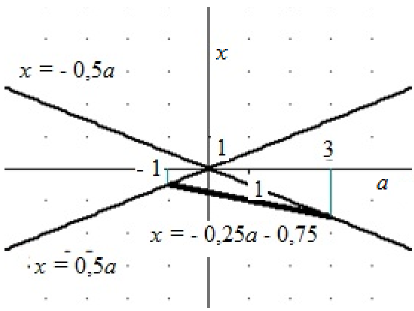


Рис. 7.2

Аналогично, не теряя обобщенности рассуждений, можно выяснить, какие зависимости уравнение $F(a;x) = |2x+a| + |2x-a| - -(a+3) = 0$ задает на каждой из частичных областей. Имеем:

$$\left[\begin{array}{ll} x = -0{,}25a - 0{,}75, & \text{если } x \le -0{,}5a \text{ и } x \le 0{,}5a, \\ a = -1, & \text{если } x \le -0{,}5a \text{ и } x \ge 0{,}5a, \\ a = 3, & \text{если } x \ge -0{,}5a \text{ и } x \le 0{,}5a, \\ x = 0{,}25a + 0{,}75, & \text{если } x \ge -0{,}5a \text{ и } x \ge 0{,}5a. \end{array}\right. \quad (7.5)$$

Построим в системе координат aOx на каждой из частичных областей зависимости (7.5) (рис. 7.3). Прямую $x = -0{,}25a - 0{,}75$ на частичной области, лежащей ниже прямых $x = 0{,}5$ и $x = -0{,}5$. Вертикальную прямую $a = -1$ на левой области, лежащей выше прямой $x = 0{,}5$ и ниже прямой $x = -0{,}5$, и т. п.

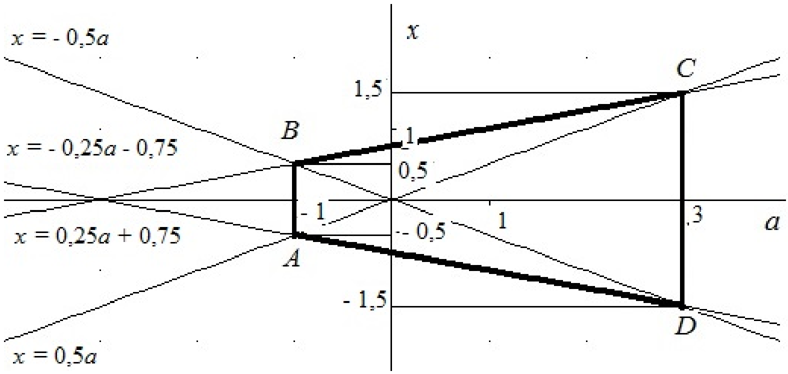


Рис. 7.3

Используя рис. 7.3 как графическую опору для рассуждений, можно установить, что графическим образом уравнения в системе координат aOx является замкнутая ломаная (трапеция с вершинами $ABCD$), звеньями которой являются части прямых $x = -0{,}25a - 0{,}75$, $a = -1$, $a = 3$, $x = 0{,}25a + 0{,}75$. Найдем координаты вершин трапеции $ABCD$. Точка A лежит на пересечении прямых $x = 0{,}5$ и $x = -0{,}25a - 0{,}75$. Значит, точка $A(-1; -0{,}5)$. По аналогии координаты точек $B(-1; 0{,}5)$, $C(3; 1{,}5)$, $D(3; -1{,}5)$.

Уравнение (7.3) имеет столько решений, сколько общих точек у вертикальной прямой $a = p$, где $p \in (-\infty; \infty)$, и семейства зависимостей вида $x = f(a)$, заданных неявно функцией $F(a; x) = |2x + a| + |2x - a| - (a + 3) = 0$ (7.3) (на рис. 7.4 показаны отдельные представители вертикальных прямых $a = p$ для конкретных значений параметра a).

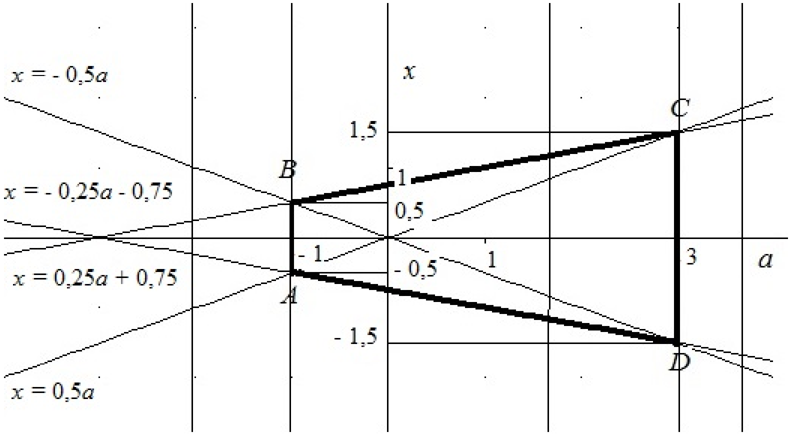


Рис. 7.4

Ответ: если $a \in (-\infty;-1) \cup (3;\infty)$, то решений нет; если $a=-1$, то решений бесконечное множество: $x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$; если $a=-1$, то решений бесконечное множество: $x \in \left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$; если $a \in (-1;3)$, то решений два: $x=-0{,}25a-0{,}75$ и $x=0{,}25a+0{,}75$.

Отметим, что традиционно в школьном курсе математики рассматриваются уравнения с параметрами вида $|ax+b|+|ax-b|=f(x)$, графическими образами которых являются замкнутые четырехугольники (трапеции). Вместе с тем уравнения вида (7.1) только такой геометрической интерпретацией в системе координат aOx не ограничиваются.

Рассмотрим примеры.

Пример 7.2. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра a:

$$|x+a|+|x-a|=-3a+1. \qquad (7.6)$$

Решение

Первый способ. Решим уравнение координатно-параметрическим методом с применением метода сечений. Перенесем все выражения влево и рассмотрим функцию двух переменных:

$$F(a;x)=|x+a|+|x-a|-(-3a+1)=0. \qquad (7.7)$$

Решить уравнение (7.7) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1=f_1(a), x_2=f_2(a), \ldots, x_k=f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a.

Приравняем к нулю подмодульные выражения, откуда $x=a$, $x=-a$. Прямыми $x=a$, $x=-a$ вся числовая плоскость разбивается на четыре частичные области:

$$\begin{cases} x\le -a, \\ x\le a, \end{cases} \begin{cases} x\le -a, \\ x\ge a, \end{cases} \begin{cases} x\ge -a, \\ x\le a, \end{cases} \begin{cases} x\ge -a, \\ x\ge a, \end{cases}$$

на каждой из которых подмодульные выражения сохраняют знак. Чтобы не использовать метод «пробной точки» для выяснения знаков подмодульных выражений на частичных областях, воспользуемся свойствами модуля. По определению $|x-a|$ и $|x+a|$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Возможны четыре варианта раскрытия двух подмодульных выражений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-a\le 0, \\ x+a\le 0, \\ -x-a-x+a=-3a+1, \end{cases} \\ \begin{cases} x-a\le 0, \\ x+a\ge 0, \\ x+a-x+a=-3a+1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-a\ge 0, \\ x+a\le 0, \\ -x-a+x-a=-3a+1, \end{cases} \\ \begin{cases} x-a\ge 0, \\ x+a\ge 0, \\ x+a+x-a=-3a+1. \end{cases} \end{array}\right.$$

После упрощений имеем:

$$\left[\begin{array}{ll} x = 1{,}5a - 0{,}5, & \text{если } x \le -a,\ x \le a, \\ a = 1, & \text{если } x \le -a,\ x \ge a, \\ a = 0{,}2, & \text{если } x \ge -a,\ x \le a, \\ x = -1{,}5a + 0{,}5, & \text{если } x \ge -a,\ x \ge a. \end{array}\right. \qquad (7.8)$$

Построим в системе координат aOx зависимости (7.8) рис. 7.5.

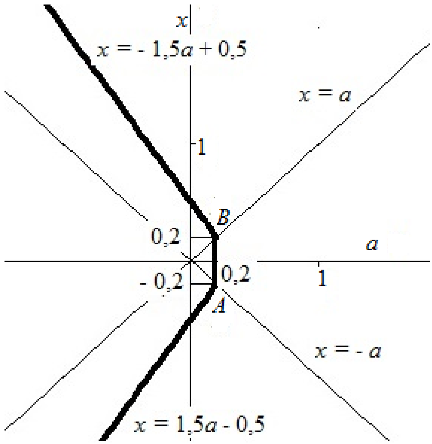


Рис. 7.5

Используя рис. 7.5 как графическую опору для рассуждений, можно установить, что графиком функции $F(a;x) = |x + a| + |x - a| - (-3a + 1) = 0$ является ломаная линия, состоящая из точек прямой $y = -1{,}5a + 0{,}5$, прямой $a = 0{,}2$ (отрезок $x \in [-0{,}2;\ 0{,}2]$) и прямой $x = 1{,}5a - 0{,}5$ (см. рис. 7.5).

Рассчитаем также координаты точек пересечения графиков $y = -1{,}5a + 0{,}5$ и $x = a$, а также $x = 1{,}5a - 0{,}5$ и $x = -a$. В результате получим $A(0{,}2;\ -0{,}2)$, $B(0{,}2;\ 0{,}2)$.

Уравнение (7.7) имеет столько решений, сколько общих точек у вертикальной прямой $a = p$, где $p \in (-\infty; \infty)$, и семейства зависимостей вида $x = f(a)$, заданных неявно уравнением $F(a; x) = |x + a| + |x - a| - (-3a + 1) = 0$.

Второй способ. Аналитический. Воспользуемся готовыми выкладками:

$$\left[\begin{array}{ll} x = 1{,}5a - 0{,}5, & \text{если } x \le -a,\ x \le a, \\ a = 1, & \text{если } x \le -a,\ x \ge a, \\ a = 0{,}2, & \text{если } x \ge -a,\ x \le a, \\ x = -1{,}5a + 0{,}5, & \text{если } x \ge -a,\ x \ge a. \end{array}\right.$$

В результате преобразований получили четыре независимых решения уравнения $|x + a| + |x - a| = -3a + 1$. Однако окончательно в ответе необходимо выразить переменную x через параметр a и указать, для каких значений параметра a эти решения возможны.

На частичной области, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} x \le -a, \\ x \le a, \end{cases}$$

получили зависимость $x = 1{,}5a - 0{,}5$. Значит, в каждое неравенство системы вместо переменной x подставим выражение $x = 1{,}5a - 0{,}5$:

$$\begin{cases} x \le -a, \\ x \le a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}5a - 0{,}5 \le -a, \\ 1{,}5a - 0{,}5 \le a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le 0{,}2, \\ a \le 1, \end{cases} \Rightarrow a \le 0{,}2.$$

Получили: если $a \in (-\infty;\ 0{,}2]$, то имеем решение $x = 1{,}5a - 0{,}5$.

По аналогии на частичной области, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} x \le -a, \\ x \ge a, \end{cases}$$

получили зависимость $a = 1$. Значит, в каждое неравенство системы вместо параметра a подставим выражение $a = 1$. В результате получим систему

$$\begin{cases} x \le -a, \\ x \ge a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le -1, \\ x \ge 1, \end{cases}$$

не имеющую решений.

На частичной области, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} x \ge -a, \\ x \le a, \end{cases}$$

получили зависимость $a = 0{,}2$. Значит, в каждое неравенство системы вместо параметра a подставим выражение $a = 0{,}2$. В результате получим:

$$\begin{cases} x \ge -a, \\ x \le a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -0{,}2, \\ x \le 0{,}2, \end{cases} \Rightarrow x \in [-0{,}2;\ 0{,}2].$$

Значит, если $a \in (-\infty;\ 0{,}2]$, то имеем бесконечное множество решений $x \in [-0{,}2;\ 0{,}2]$.

На частичной области, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} x \ge -a, \\ x \ge a, \end{cases}$$

получили зависимость $x = -1{,}5a + 0{,}5$. Значит, в каждое неравенство системы вместо переменной x подставим выражение $x = -1{,}5a + 0{,}5$:

$$\begin{cases} x \ge -a, \\ x \ge a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le 1, \\ a \le 0{,}2, \end{cases} \Rightarrow a \le 0{,}2.$$

Имеем, если $a \in (-\infty;\ 0{,}2]$, то получили еще одно решение $x = -1{,}5a + 0{,}5$.

Остается сделать обобщение о количестве и виде решений исходного уравнения в зависимости от значений параметра a. Если $a \in (-\infty;\ 0{,}2]$, то решений два: $x = -1{,}5a + 0{,}5$и $x = 1{,}5a - 0{,}5$; если

a = 0,2, то решений бесконечное множество: $x \in [-0,2; 0,2]$. Остается рассмотреть значения параметра a из промежутка $a \in (0,2; \infty)$. Так как рассмотрение уравнения на одной из частных областей не дало решений, значит, при $a \in (0,2; \infty)$ уравнение решений не имеет.

Ответ: если $a \in (-\infty; 0,2]$, то будет два решения: $x = -1,5a + 0,5$ и $x = 1,5a - 0,5$; если $a = 0,2$, то бесконечное множество решений: $x \in [-0,2;\ 0,2]$; если $a \in (0,2; \infty)$, то решений нет.

Совершенно очевидно, что использование только аналитических методов решения уравнений с параметрами может вызывать значительные трудности при трактовке решений в зависимости от значений параметра. При этом графические методы дают представление о существовании или отсутствии решения уравнения.

Рассмотрим другой пример.

Пример 7.3. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра a:

$$|x + a| + |x - a| = 2a - 1. \tag{7.9}$$

Решение. Решим уравнение координатно-параметрическим методом с применением метода сечений. Перенесем все выражения влево и рассмотрим функцию двух переменных:

$$F(a; x) = |x + a| + |x - a| - (2a - 1) = 0. \tag{7.10}$$

Решить уравнение (7.10) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(a)$, $x_2 = f_2(a)$, ..., $x_k = f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a.

Приравняем к нулю подмодульные выражения, откуда $x = a$, $x = -a$. Прямыми $x = a$, $x = -a$ вся числовая плоскость разбивается на четыре частичные области:

$$\begin{cases} x \le -a, \\ x \le a, \end{cases} \begin{cases} x \le -a, \\ x \ge a, \end{cases} \begin{cases} x \ge -a, \\ x \le a, \end{cases} \begin{cases} x \ge -a, \\ x \ge a, \end{cases}$$

на каждой из которых раскроем подмодульные выражения. В результате получим:

$$\left[\begin{array}{ll} x=-a+0{,}5, & \text{при } x\le -a,\ x\le a, \\ a=0{,}25, & \text{при } x\le -a,\ x\ge a, \\ 0\ne 1, & \text{при } x\ge -a,\ x\le a, \\ x=a-0{,}5, & \text{при } x\ge -a,\ x\ge a. \end{array}\right. \qquad (7.11)$$

Отметим, что ни одна из зависимостей вида $x = f(a)$ не попадает в соответствующую частичную область. Данное утверждение легко продемонстрировать графически в системе координат xOy. Для этого вернемся к уравнению $|x+a|+|x-a|=2a-1$. Введем функции: $y=|x+a|+|x-a|$, $y = 2a - 1$. Построим их в системе xOy (рис. 7.6).

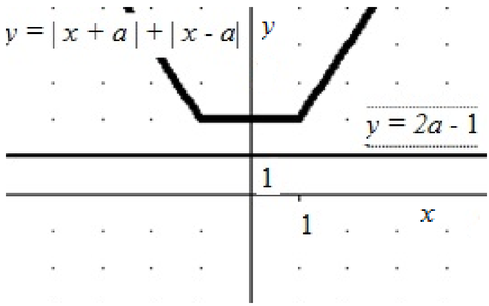


Рис. 7.6

Ответ: уравнение не имеет решений при любом значении параметра.

Пример 7.4. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра a:

$$|3x+a|+|3x-a|=x+2a. \qquad (7.12)$$

Решение

Первый способ. Решим уравнение координатно-параметрическим методом с применением метода сечений. Перенесем все выражения влево и рассмотрим функцию двух переменных:

$$F(a;\ x) = |3x + a| + |3x - a| - (x + 2a) = 0. \qquad (7.13)$$

Решить уравнение (7.13) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(a)$, $x_2 = f_2(a)$, ..., $x_k = f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей необходимо записать область изменения переменной (параметра) a.

Приравняем к нулю подмодульные выражения, откуда $x = \frac{1}{3}a$ и $x = -\frac{1}{3}a.$ Прямыми $x = \frac{1}{3}a,$ $x = -\frac{1}{3}a.$ вся числовая плоскость разбивается на четыре частичные области, на каждой из которых подмодульные выражения сохраняют знак. На частичных областях, заданных системами неравенств:

$$\begin{cases} x \le \frac{1}{3}a, \\ x \le -\frac{1}{3}a, \end{cases} \begin{cases} x \le \frac{1}{3}a, \\ x \ge -\frac{1}{3}a, \end{cases} \begin{cases} x \ge \frac{1}{3}a, \\ x \le -\frac{1}{3}a, \end{cases} \begin{cases} x \ge \frac{1}{3}a, \\ x \ge -\frac{1}{3}a, \end{cases}$$

уравнение (7.13) задает зависимости:

$$\begin{cases} x \le \frac{1}{3}a, \\ x \le -\frac{1}{3}a, \\ x = -\frac{2}{7}a, \end{cases} \begin{cases} x \le \frac{1}{3}a, \\ x \ge -\frac{1}{3}a, \\ x = 0, \end{cases} \begin{cases} x \ge \frac{1}{3}a, \\ x \le -\frac{1}{3}a, \\ x = -4a, \end{cases} \begin{cases} x \ge \frac{1}{3}a, \\ x \ge -\frac{1}{3}a, \\ x = \frac{2}{5}a. \end{cases} \qquad (7.14)$$

Вместе с тем на частичных областях, заданных системами неравенств:

$$\begin{cases} x \le \dfrac{1}{3}a, \\ x \le -\dfrac{1}{3}a \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3}a, \\ x \le -\dfrac{1}{3}a, \end{cases}$$

зависимости $x = -\dfrac{2}{7}a$ и $x = -4a$ не существуют, кроме точки с координатами (0; 0). Функция двух переменных $F(a;x) = |3x + a| + |3x - a| - (x + 2a) = 0$ определяет только две зависимости: $x = 0$ и $x = 0{,}4a$ (рис. 7.7, *а*).

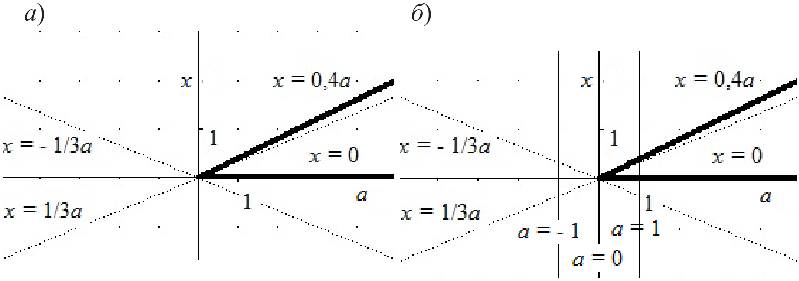


Рис. 7.7

Уравнение (7.13) имеет столько решений, сколько общих точек у вертикальной прямой $a = p$, где $p \in (-\infty; \infty)$, и семейства зависимостей вида $x = f(a)$ (рис. 7.7, *б*).

Используя рис. 7.7 как графическую опору для рассуждений, получим: если $a \in (-\infty; 0)$, то решений нет; если $a = 0$, то решение одно: $x = 0$; если $a \in (0; \infty)$, то решений два: $x = 0$, $x = 0{,}4a$.

Второй способ. Аналитический. Вернемся к рассмотрению систем (7.14) и подставим в каждое из неравенств соответствующие выражения. Рассмотрим первую систему совокупности:

$$\begin{cases} x \le \frac{1}{3}a, \\ x \le -\frac{1}{3}a, \\ x = -\frac{2}{7}a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{7}a \le \frac{1}{3}a, \\ -\frac{2}{7}a \le -\frac{1}{3}a, \\ x = -\frac{2}{7}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge 0, \\ a \le 0, \\ x = -\frac{2}{7}a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ x = -\frac{2}{7}a = 0. \end{cases}$$

Значит, при $a = 0$ имеем единственное решение $x = 0$.
Рассмотрим вторую систему совокупности:

$$\begin{cases} x \le \frac{1}{3}a, \\ x \ge -\frac{1}{3}a, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \frac{1}{3}a, \\ 0 \ge -\frac{1}{3}a, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge 0, \\ a \ge 0, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Значит, при $a \ge 0$ имеем единственное решение $x = 0$.
Рассмотрим третью систему совокупности:

$$\begin{cases} x \ge \frac{1}{3}a, \\ x \le -\frac{1}{3}a, \\ x = -4a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a \ge \frac{1}{3}a, \\ -4a \le -\frac{1}{3}a, \\ x = -4a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge 0, \\ a \le 0 \\ x = -4a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ x = -4a = 0. \end{cases}$$

Решение $x = 0$ при $a = 0$ уже рассматривалось.
Рассмотрим четвертую систему совокупности:

$$\begin{cases} x \ge \frac{1}{3}a, \\ x \ge -\frac{1}{3}a, \\ x = \frac{2}{5}a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5} \ge \frac{1}{3}a, \\ \frac{2}{5} \ge -\frac{1}{3}a, \\ x = \frac{2}{5}a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge 0, \\ a \ge 0, \\ x = 0{,}4a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge 0, \\ x = 0{,}4a. \end{cases}$$

Значит, при $a > 0$ имеем решение $x = 0{,}4a$.

Подведем итог: если $a = 0$, то имеем единственное решение $x = 0$; если $a \in (0; \infty)$, то решений два: $x = 0$, $x = 0{,}4a$. Так как промежуток $a \in (-\infty; 0)$ не дала ни одна из четырех систем, то на этом промежутке решений нет.

Ответ: если $a \in (-\infty; 0)$, то решений нет; если $a = 0$, решение одно: $x = 0$; если $a \in (0; \infty)$, то решений два: $x = 0$, $x = 0{,}4a$.

Пример 7.5. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра a:

$$|1{,}5x + 2a| + |1{,}5x - 2a| = ax. \qquad (7.15)$$

Решение

Первый способ. Решим уравнение координатно-параметрическим методом с применением метода сечений. Перенесем все выражения влево и рассмотрим функцию двух переменных:

$$F(a;x) = \left|1{,}5x + 2a\right| + \left|1{,}5x - 2a\right| - ax = 0. \qquad (7.16)$$

Решить уравнение (7.16) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(a)$, $x_2 = f_2(a)$, ..., $x_k = f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей запишем область изменения переменной (параметра) a.

Приравняем к нулю подмодульные выражения $1{,}5x + 2a = 0$, $x = -\dfrac{4}{3}a$, $1{,}5x - 2a = 0$, $x = \dfrac{4}{3}a$. Прямыми $x = \dfrac{4}{3}a$ и $x = -\dfrac{4}{3}a$ вся координатно-параметрическая плоскость разбивается на четыре частичные области, на каждой из которых подмодульные выражения сохраняют знак.

На частичных областях, заданных системами неравенств, уравнение вида $F(a;x) = |1{,}5x + 2a| + |1{,}5x - 2a| - ax = 0$ задает зависимости вида $x = f(a)$.

Так, на частичной области допустимых значений переменной *x,* заданной системой:

$$\begin{cases} x \le -\dfrac{4}{3}a, \\ x \le \dfrac{4}{3}a, \end{cases}$$

получим зависимость $x(a + 3) = 0$. Откуда либо $x = 0$, либо $a = –3$.

На частичной области допустимых значений переменной x, заданной системой:

$$\begin{cases} x \le -\dfrac{4}{3}a, \\ x \ge \dfrac{4}{3}a, \end{cases}$$

получим зависимость $a(x + 4) = 0$. Откуда либо $x = –4$, либо $a = 0$.

На частичной области допустимых значений переменной x, заданной системой:

$$\begin{cases} x \ge -\dfrac{4}{3}a, \\ x \le \dfrac{4}{3}a, \end{cases}$$

получим зависимость $a(x – 4) = 0$. Откуда либо $x = 4$, либо $x = 0$.

На частичной области допустимых значений переменной x, заданной системой:

$$\begin{cases} x \ge -\dfrac{4}{3}a, \\ x \ge \dfrac{4}{3}a, \end{cases}$$

получим зависимость $x(a-3)=0$. Откуда либо $x = 0$, либо $a = 3$.

Чтобы построить геометрический образ уравнения $F(a;x)=|1{,}5x+2a|+|1{,}5x-2a|-ax=0$ в системе координат aOx, нужно:

1) построить прямые $x=\dfrac{4}{3}a$ и $x=-\dfrac{4}{3}a$;

2) в нижней частичной области построить прямую $a=-3$;

3) в левой частичной области построить прямую $x=-4$;

4) в верхней частичной области построить прямую $a=3$;

5) в правой частичной области построить прямую $x=4$ (рис. 7.8, *а*).

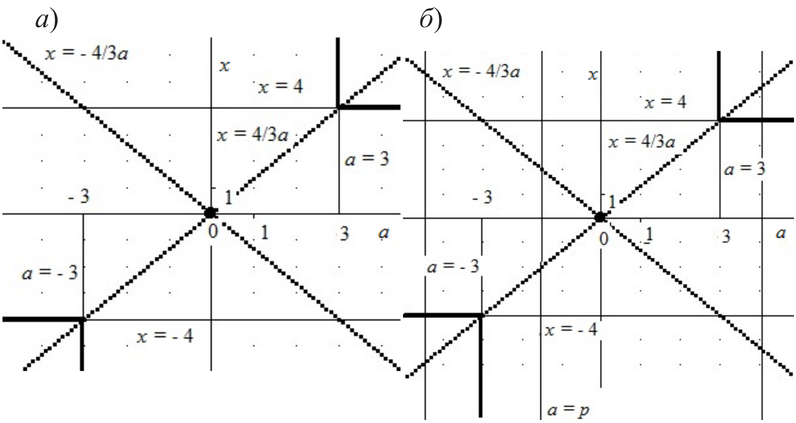


Рис. 7.8

Следует также учесть, что начало координат (точка (0; 0)) также входит в каждую из частичных областей, а значит, является отдельно стоящим решением уравнения (7.16).

Уравнение (7.16) имеет столько решений, сколько общих точек у вертикальной прямой $a=p$, где $p\in(-\infty;\infty)$, и семейства заданных неявно зависимостей вида $x=f(a)$ (рис. 7.8, *б*).

Используя рис. 7.8 как графическую опору для рассуждений, определим количество и аналитическое выражение решений исходного уравнения.

Ответ: если $a \in (-\infty; -3)$, то имеем единственное решение: $x = -4$; если $a = -3$, то имеем бесконечное множество решений: $x \in (-\infty; -4)$; если $a \in (-3;\ 0) \cup (0;\ 3)$, то решений нет; если $a = 0$, то решение одно: $x = 0$; если $a = 3$, то решений бесконечное множество: $x \in (4; \infty)$; если $a \in (3; \infty)$, то решение одно: $x = 4$.

Пример 7.6. Найти количество решений и решить уравнение в зависимости от значений параметра a:

$$|\,2{,}5x + 2a\,| + |\,2{,}5x - 2a\,| = ax + 1. \qquad (7.17)$$

Решение

Решим уравнение координатно-параметрическим методом с применением метода сечений. Перенесем все выражения влево и рассмотрим функцию двух переменных:

$$F(a; x) = |\,2{,}5x + 2a\,| + |\,2{,}5x - 2a\,| - (ax + 1) = 0. \qquad 7.18)$$

Решить уравнение (7.18) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(a)$, $x_2 = f_2(a)$, ..., $x_k = f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей запишем область изменения переменной (параметра) a. Приравняем к нулю подмодульные выражения, получим $x = 0{,}8$ и $x = -0{,}8$. Прямыми $x = 0{,}8a$ и $x = -0{,}8a$ вся координатно-параметрическая плоскость разбивается на четыре частичные области, на каждой из которых подмодульные выражения сохраняют знак. Так на частичной области допустимых значений переменной x, заданной системой:

$$\begin{cases} x \le -0{,}8a, \\ x \le 0{,}8a, \end{cases}$$

получим зависимость $-2{,}5x - 2a - 2{,}5x + 2a = ax + 1$. Откуда, выразив переменную x через параметр a, получим гиперболу

$x=-\dfrac{1}{a+5}$ с асимптотой a = –5. На данной области гипербола пересечет прямую x = 0,8a в двух точках A и B; прямую x = –0,8a в одной точке C (рис. 7.9). Найдем координаты точек A и B, для чего решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{a+5}, \\ x=0{,}8a, \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{a+5}=\frac{4a}{5} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2+20a+5=0, \\ a\neq -5. \end{cases}$$

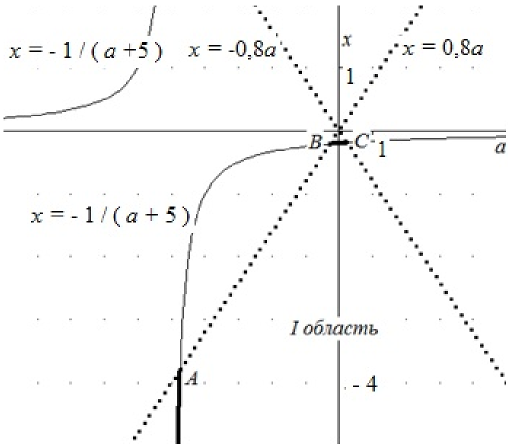


Рис. 7.9

Решив квадратное уравнение относительно переменной x, получим корни $a=-2{,}5-\sqrt{5}$ и $a=-2{,}5+\sqrt{5}$, которые являются абсциссами точек A и B соответственно. Подставив найденные значения в уравнение x = 0,8a, получим ординаты точек A: $a=-2-\dfrac{4\cdot\sqrt{5}}{5}=\dfrac{-10-4\sqrt{5}}{5}$ и B: $a=-2+\dfrac{4\cdot\sqrt{5}}{5}=\dfrac{-10+4\sqrt{5}}{5}$.

Точкой пересечения гиперболы $x=-\dfrac{1}{a+5}$ и прямой x = 0,8a

является точка $A\left(-\frac{5}{2}-\sqrt{5};\frac{-10-4\sqrt{5}}{5}\right)$, гиперболы $x=-\frac{1}{a+5}$ и прямой $x = –0,8a$ является точка $B\left(-\frac{5}{2}+\sqrt{5};\ \frac{-10+4\sqrt{5}}{5}\right)$.

Аналогично найдем координаты точки C, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{a+5}, \\ x=-0{,}8a, \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{a+5}=-\frac{4a}{5} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2+20a-5=0, \\ a\neq -5. \end{cases}$$

Решениями квадратного уравнения являются значения параметра $a=\frac{-10+2\sqrt{30}}{4}$ и $a=\frac{-10-2\sqrt{30}}{4}$. Так как точка C лежит в четвертой четверти и имеет положительную абсциссу, то $a=\frac{-10+2\sqrt{30}}{4}=\frac{\sqrt{30}-5}{2}$. Ординату точки C можно вычислить так: $x=-\frac{4}{5}a=-\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{30}-5}{2}=\frac{10-2\sqrt{30}}{5}$. Значит, координаты точки $C\left(\frac{\sqrt{30}-5}{2};\ \frac{10-2\sqrt{30}}{2}\right)$. На частичной области допустимых значений переменной x, заданной системой:

$$\begin{cases} x\le -0{,}8a, \\ x\ge 0{,}8a, \end{cases}$$

получим зависимость $-2{,}5x-2a+2{,}5x-2a=ax+1$. Откуда, выразив переменную x через параметр a, получим гиперболу $x=-\frac{1}{a}-4$ с асимптотой $a = 0$. Геометрическая интерпретация решения показана на рис. 7.10.

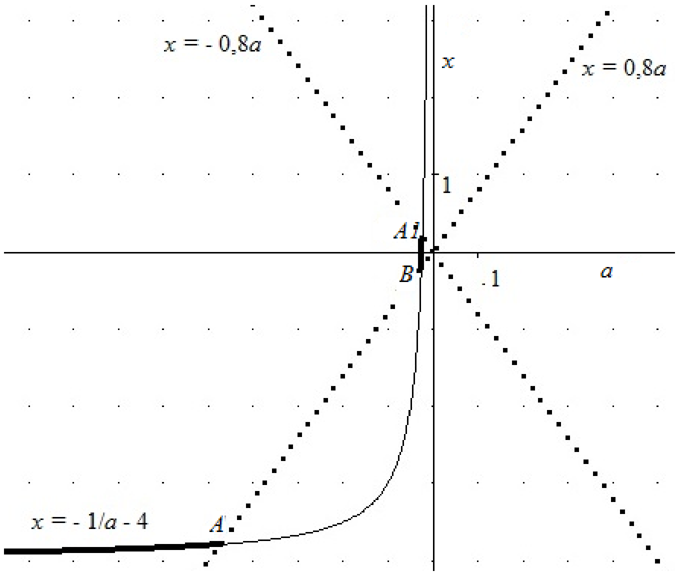


Рис. 7.10

Гипербола $x=-\dfrac{1}{a}-4$ в данной области пересечет прямую $x = 0{,}8a$ в одной точке B_1. Найдем координаты этой точки, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{a}-4, \\ x=-0{,}8a, \end{cases} \Rightarrow \frac{1+4a}{a}=-\frac{4a}{5} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2-20a-5=0, \\ a\neq 0. \end{cases}$$

Решениями квадратного уравнения являются: $a=\dfrac{5+\sqrt{30}}{2}$, $a=\dfrac{5-\sqrt{30}}{2}$. Ординату точки B_1 найдем так: $x=-\dfrac{4}{5}a=-\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5-\sqrt{30}}{2}=\dfrac{2\sqrt{30}-10}{5}$.

Значит, $B_1\left(\dfrac{5-\sqrt{30}}{2};\ \dfrac{2\sqrt{30}-10}{2}\right)$ (см. рис. 7.10).

На частичной области допустимых значений переменной x, заданною системой:

$$\begin{cases} x \geq -0{,}8a, \\ x \leq 0{,}8a, \end{cases}$$

получим зависимость $2{,}5x+2a-2{,}5x+2a=ax+1$. Откуда, выразив переменную x через параметр a, получим гиперболу $x=-\dfrac{1}{a}+4$ с асимптотой $a = 0$.

На частичной области допустимых значений переменной x, заданною системой:

$$\begin{cases} x \geq -0{,}8a, \\ x \geq 0{,}8a, \end{cases}$$

получим зависимость $2{,}5x+2a+2{,}5x-2a=ax+1$. Откуда, выразив переменную x через параметр a, получим гиперболу $x=-\dfrac{1}{a-5}$ с асимптотой $a = 5$.

Графический образ функции $F(a;x)=|\,2{,}5x+2a\,|+|\,2{,}5x-2a\,|-(ax+1)=0$ в системе координат aOx изображен на рис. 7.11.

При решении уравнения (7.18) важно учесть координаты точек A_1, C_1, поэтому выпишем их: $A_1\left(\dfrac{5}{2}+\sqrt{5};\ \dfrac{10+4\sqrt{5}}{5}\right)$, $C_1\left(\dfrac{5}{2}-\sqrt{5};\ \dfrac{10-4\sqrt{5}}{5}\right)$. Используя рис. 7.11 как графическую опору для рассуждений, проведем исследование:

1) сколько решений будет иметь исходное уравнение при $a = -5$, $a = 5$?

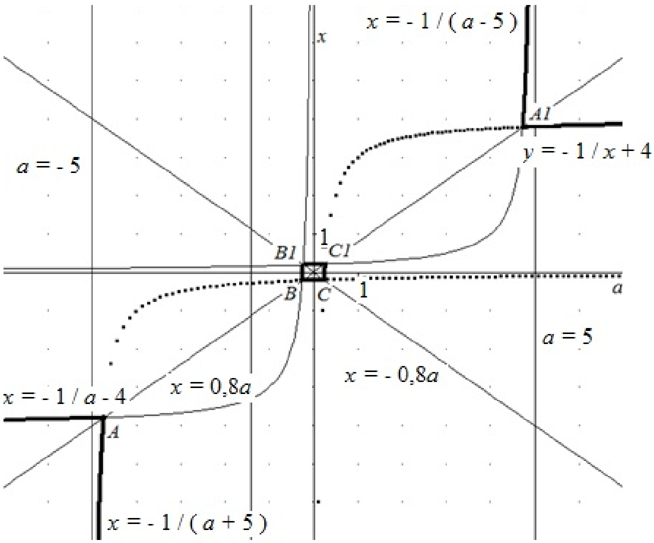


Рис. 7.11

2) сколько решений будет иметь исходное уравнение, если вертикальная прямая $a = p$ пройдет через точку A или A_1?

3) можно ли на глаз установить, какая из двух точек B или B_1 лежит левее?

4) при каком значении параметра a уравнение (7.18) имеет единственное решение?

5) сравнить количество решений уравнения, если вертикальная прямая $a = p$ проходит через точки B или B_1, С или C_1.

6) выяснить количество решений уравнения, если параметр принимает значения из промежутка $a \in [2{,}5 + \sqrt{5};\ 5]$ или $a \in [-5; -2{,}5 - \sqrt{5}]$.

Имеем, если $a \in (-\infty; -5]$, то решение одно: $x = -\dfrac{1}{a} - 4$; если $a \in \left(-5;\ -2{,}5 - \sqrt{5}\right)$, то решений два: $x = -\dfrac{1}{a} - 4$ и $x = -\dfrac{1}{a+5}$;

если $a=-2{,}5-\sqrt{5}$, то решение одно: $x=\dfrac{-10-4\sqrt{5}}{5}$; если $a\in\left(-2{,}5-\sqrt{5};\ -2{,}5+\sqrt{5}\right)$, то решений нет; если $a\in\left(2{,}5-\sqrt{5};\ 2{,}5+\sqrt{5}\right)$, то решений нет; если $a=2{,}5+\sqrt{5}$, то решение одно: $x=\dfrac{10+4\sqrt{5}}{5}$; если $a\in\left(2{,}5+\sqrt{5};\ 5\right)$, то решений два: $x=-\dfrac{1}{a-5}$ и $x=-\dfrac{1}{a}+4$; если $a\in[5;\infty)$, то решение одно: $x=-\dfrac{1}{a}+4$.

Ответ: если $a\in\left[-2{,}5+\sqrt{5};\ \dfrac{5-\sqrt{30}}{2}\right)$, то решений два: $x=-\dfrac{1}{a+5}$ и $x=-\dfrac{1}{a}+4$; если $a\in\left[\dfrac{5-\sqrt{30}}{2};\ \dfrac{-5+\sqrt{30}}{2}\right]$, то решений два: $x=-\dfrac{1}{a+5}$ и $x=-\dfrac{1}{a-5}$; если $a\in\left(\dfrac{-5+\sqrt{30}}{2};\ 2{,}5-\sqrt{5}\right]$, то решений два: $x=-\dfrac{1}{a-5}$ и $x=-\dfrac{1}{a}+4$.

7.2. Упражнения для самостоятельного решения

Задание: найти количество решений и решить уравнения в зависимости от значений параметра a.

1. $|x+a|+|x-a|=a+1$.

Ответ: если $a\in\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{3}\right)$, то решений нет; если $a=-\dfrac{1}{3}$, то решений бесконечное множество: $x\in\left[-\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{3}\right]$; если $a\in\left(-\dfrac{1}{3};\ 1\right)$, то решений два: $x=0{,}5a+0{,}5$ и $x=-0{,}5a-0{,}5$; если $a=1$, то решений бесконечное множество: $x\in[-1;\ 1]$; если $a\in(1;\ \infty)$, то решений нет.

2. $|3x+a|+|3x-a|=a+2.$

Ответ: если $a\in\left(-\infty;\ -\dfrac{2}{3}\right)\cup(2;\infty)$, то решений нет; если $a=-\dfrac{2}{3}$, то решений бесконечное множество: $x\in\left[-\dfrac{2}{9};\ \dfrac{2}{9}\right]$; если $a\in\left(-\dfrac{2}{3};\ 2\right)$, то решений два: $x=\dfrac{1}{3}a$ и $x=-\dfrac{1}{3}a$; если $a=2$, то решений бесконечное множество: $x\in\left[-\dfrac{2}{3};\ \dfrac{2}{3}\right]$.

3. $|0{,}5x+2a|+|0{,}5x-2a|=x+a.$

Ответ: если $a\in(-\infty;\ 0)$, то решений нет; если $a=0$, то решений бесконечное множество: $x\in[0;\infty)$; если $a\in(0;\infty)$, то решение одно: $x=a$.

4. $|2x+a|+|2x-a|=a+2.$

Ответ: если $a\in(-\infty;\ -0{,}8)\cup(4;\infty)$, то решений нет; если $a=-0{,}8$, то решение одно: $x=0{,}4$; если $a=4$, то решение одно: $x=-2$; если $a\in(-0{,}8;-0{,}5]$, то решений два: $x=\dfrac{1}{3}a+\dfrac{2}{3}$ и $x=-3a-2$; если $a\in[-0{,}5;\ 1]$, то решений два: $x=\dfrac{1}{3}a+\dfrac{2}{3}$ и $x=-\dfrac{1}{3}a-\dfrac{2}{3}$; если $a\in[1;\ 4)$, то два решения: $x=-a+2$ и $x=-\dfrac{1}{3}a-\dfrac{2}{3}$.

Глава 8. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ И МОДУЛЯМИ, СОДЕРЖАЩИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

8.1. Исследование решений линейного уравнения с параметром, содержащего двойной модуль

В предыдущих главах рассмотрены наиболее часто встречающиеся виды уравнений с параметрами и модулями, содержащих линейные выражения относительно неизвестной величины и параметра. Вместе с тем широкое распространение получили примеры, которые «надстроены» на базе простейших линейных уравнений с параметрами. Так, часто можно встретить такие уравнения:

$$||x-1|-4|=a,$$

$$||\log_2 t|-2|=a.$$

Уравнение $||x-1|-4|=a$ можно отнести к стандартным (таким, которые нередко встречаются в школьных учебниках математики разных лет). Уравнение $||\log_2 t|-2|=a$ получено из стандартного $||x-1|-2|=a$ путем введения вместо переменной x трансцендентной функции $x=\log_2 t$.

Появляются естественные вопросы:

1) совпадают ли решения стандартного и «надстроенного» уравнения?

2) существуют ли «подводные камни», которые могут существенно влиять на проведение «параллелей» между решениями подобных уравнений?

3) можно ли «алгоритмизировать» процесс решения различных видов уравнений, построенных на базе стандартных уравнений данного вида?

4) какие еще, кроме приведенных уравнений, целесообразно решать на базе стандартного уравнения данного вида?

Для выяснения поставленных вопросов рассмотрим систему заданий, созданных на базе стандартного уравнения с параметром

$$\big||x-1|-2\big| = a. \tag{8.1}$$

Вместо переменной x в уравнение (8.1) подставим знакомые абитуриенту элементарные функции:

$$\big||\sin t-1|-2\big| = a,$$

$$\big||\ln t-1|-2\big| = a,$$

$$\big||e^t-1|-2\big| = a\,.$$

Для каждого из уравнений выполним следующие задания:

1) найдем количество решений в зависимости от значений параметра a;

2) решим каждое уравнение в зависимости от значений параметра a.

Пример 8.1. Дано уравнение

$$\big||x-1|-2\big| = a. \tag{8.1}$$

Найдем количество решений в зависимости от значений параметра a.

Решение. Для поиска количества решений уравнения используем графический метод, для чего представим левую и правую часть уравнения (8.1) как явно заданные функции $y=\big||x-1|-2\big|$, $y = a$ и построим их графики в системе координат xOy. Функцию $y=\big||x-1|-2\big|$ можно получить из функции $y = x$ путем таких элементарных преобразований (рис. 8.1, *а*, *б*):

$$y=x \to y=x-1 \to y=|x-1| \to y=|x-1|-2 \to y=||x-1|-2|.$$

Уравнение (8.1) имеет столько решений, в скольких точках пересекаются горизонтальная прямая $y = a$ и график функции $y=\big||x-1|-2\big|$.

Используя рис. 8.1 как графическую опору для рассуждений, можно установить: если $a \in (-\infty; 0)$, то решений нет; если $a = 0$, то решений два; если $a \in (0; 2)$, то имеем четыре решения; если $a = 2$, то решений три; если $a \in (2; \infty)$, то решений два.

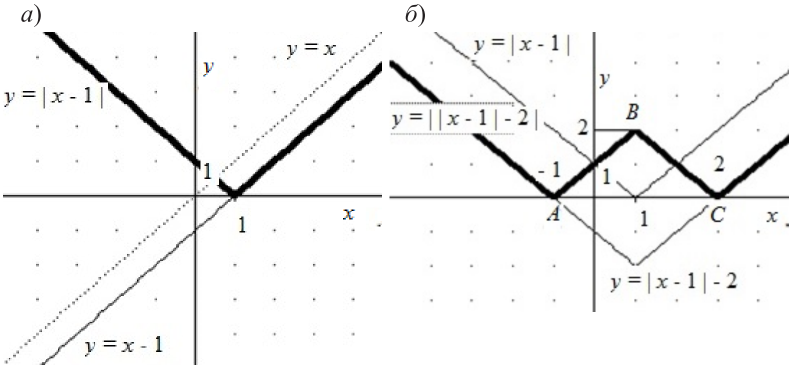


Рис. 8.1

Решим уравнение в зависимости от значений параметра a.

Первый способ. Решим уравнение координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. Рассмотрим функцию двух переменных

$$F(a; x) = \left| |x-1| - 2 \right| - a = 0. \tag{8.2}$$

Решить уравнение (8.2) – значит найти соответствующее семейство зависимостей вида $x_1 = f_1(a)$, $x_2 = f_2(a)$, ..., $x_k = f_k(a)$, задающихся исходным уравнением. Для каждой из зависимостей запишем область изменения переменной (параметра) a.

Проведем равносильные преобразования, раскроем вначале «внутренний» модуль. При $x = 1$ «внутренний» модуль принимает значение, равное нулю. Получим две системы:

$$\begin{cases} x < 1, \\ |-x+1-2| = a \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 1, \\ |x-3| = a. \end{cases}$$

После упрощений:

$$\begin{cases} x < 1, \\ |-x-1| = a \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 1, \\ |x-3| = a. \end{cases}$$

Рассмотрим первую смешанную систему. Найдем число, при котором подмодульное выражение $|-x-1|$ принимает значение нуль. Это число $x = -1$. Имеем совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x < 1, \\ x < -1, \\ -x-1 = a \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ x+1 = a. \end{cases}$$

Выразим в уравнениях переменную x через параметр a:

$$\begin{cases} x < -1, \\ x = -a-1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ x = a-1. \end{cases}$$

Функция $F(a;x) = \big|\,|x-1|-2\,\big| - a = 0$ на частичном промежутке допустимых значений переменной $x < -1$ задает зависимость $x = -a - 1$, на промежутке $-1 \le x \le -1$ задает зависимость $x = a - 1$.

Рассмотрим вторую систему совокупности:

$$\begin{cases} x < 1, \\ |x-3| = a. \end{cases}$$

При значении переменной $x = 3$ подмодульное выражение $|x-3|$ принимает значение нуль. Имеем совокупность смешанных систем:

$$\begin{cases} 1 \le x \le 3, \\ -x+3 = a \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 3, \\ x-3 = a. \end{cases}$$

Выразим в уравнениях переменную x через параметр a:

$$\begin{cases} 1 \le x \le 3, \\ x = -a + 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 3, \\ x = a + 3. \end{cases}$$

Функция $F(a;x) = \big|\,|x-1|-2\,\big| - a = 0$ на частичном промежутке допустимых значений переменной $-3 \le x \le 3$ задает зависимость $x = -a + 3$, на промежутке $x > 3$ задает зависимость $x = a + 3$.

В системе координат aOx график неявно заданной функции $F(a;x) = \big|\,|x-1|-2\,\big| - a = 0$ представляет ломанную линию, состоящую из двух лучей и двух отрезков (рис. 8.2). Уравнение (8.2) имеет столько решений, сколько общих точек у вертикальной прямой $a = p$, где $p \in (-\infty;\infty)$, и семейства зависимостей вида $x = f(a)$, заданных неявно функцией $F(a;x) = \big|\,|x-1|-2\,\big| - a = 0$ (рис. 8.2). Используя рис. 8.2 как графическую опору для рассуждений, можно установить: если $a \in (-\infty; 0)$, то решений нет; если $a = 0$, то два решения: если $a \in (0; 2)$, то решений четыре: $x = a - 1$, $x = -a - 1$, $x = -a + 3$, $x = a + 3$; если $a = 2$, то решений три: $x = 1$, $x = a + 3$; $x = -a - 1$; если $a \in (2; \infty)$, то решений два: $x = a + 3$ и $x = - a - 1$.

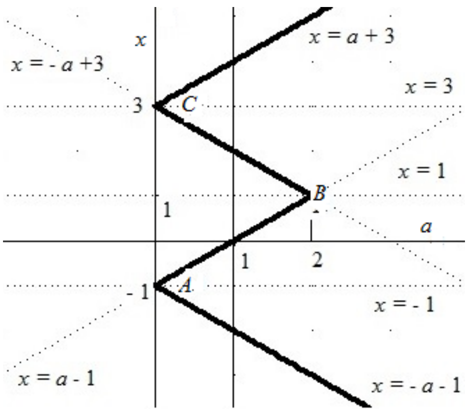


Рис. 8.2

Второй способ. Снова вернемся к уравнению $\left|\left|x-1\right|-2\right|=a$, но иначе раскроем выражения, стоящие под знаком модуля:

$$\begin{cases} a\ge 0, \\ a+2\ge 0, \\ x-1=a+2, \end{cases} \quad \begin{cases} a\ge 0, \\ a+2\ge 0, \\ x-1=-a-2, \end{cases} \quad \begin{cases} a\ge 0, \\ 2-a\ge 0, \\ x-1=-a+2, \end{cases} \quad \begin{cases} a\ge 0, \\ 2-a\ge 0, \\ x-1=a-2. \end{cases}$$

После упрощений получим:

$$\begin{cases} a\ge 0, \\ x=a+3, \end{cases} \quad \begin{cases} a\ge 0, \\ x=-a-1, \end{cases} \quad \begin{cases} 0\le a\le 2, \\ x=-a+3, \end{cases} \quad \begin{cases} 0\le a\le 2, \\ x=a-1. \end{cases}$$

Ответ: если $(-\infty;0)$, то решений нет; если a = 0, то два решения: x = –1, x = 3; если $a\in(0;\,2)$, то решений четыре: $x = a - 1$, $x=-a-1$, $x=-a+3$, $x=a+3$; если $a=2$, то решений три: $x=1$, $x=a+3$, $x=-a-1$; если $a\in(2;\,\infty)$, то решений два: $x = a + 3$ и $x = -a - 1$.

8.2. Исследование решений линейного уравнения с параметром и двойным модулем, содержащего тригонометрические функции

Пример 8.2. Дано уравнение

$$\left|\left|\sin x-1\right|-2\right|=a. \tag{8.3}$$

Найти количество решений из промежутка [0; 2π] в зависимости от значений параметра a.

Решение. Обозначим, что уравнение (8.3) примет вид $\left|\left|t-1\right|-2\right|=a.$ Теперь можно воспользоваться соображениями, полученными в процессе решения предыдущего задания. Вместе с тем в уравнение (8.3) входит функция $t=\sin x$, имеющая ограниченное множество значений: $-1\le\sin x\le 1$. Поэтому на переменную t тоже следует наложить ограничения: $-1\le t\le 1$, что, безусловно, влияет на результаты, полученные в процессе решения уравнения (8.3). Обозначим через явно заданные функции левую и правую часть уравнения $y = \left| |\sin x - 1| - 2 \right|$ и $y = a$. Построим функцию $y = \left| |\sin x - 1| - 2 \right|$ с использованием таких элементарных преобразований (рис. 8.3):

$$y = \sin x \to y = \sin x - 1 \to y = |\sin x - 1|.$$

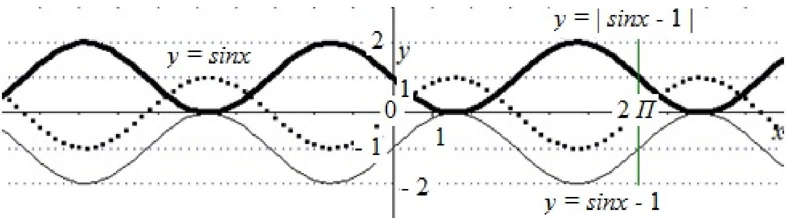


Рис. 8.3

$$y = \sin x \to y = \sin x - 1 \to y = |\sin x - 1| \to y = ||\sin x - 1| - 2| \text{ (рис. 8.4).}$$

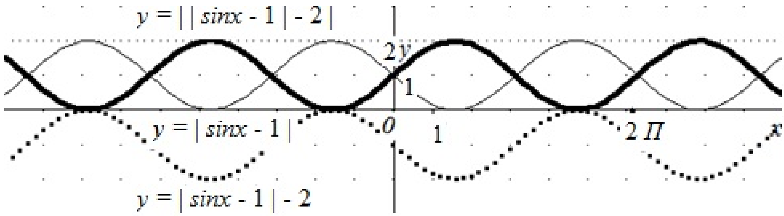


Рис. 8.4

В системе координат xOy построим графики функций $y = \left| |\sin x - 1| - 2 \right|$ и $y = a$ с учетом того, что $[0; 2\pi]$ (рис. 8.5).

Уравнение (8.3) будет иметь столько решений, сколько общих точек на горизонтальной прямой $y = a$ и графике функции $y = \left| |\sin x - 1| - 2 \right|$ на отрезке $[0; 2\pi]$. Используя рис. 8.5 как графическую опору для рассуждений, можно установить, что если $a \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$, то уравнение (8.3) решений не имеет; если $a = 0$, $a = 2$, то решение одно; если $a \in (0; 2)$, то решений два.

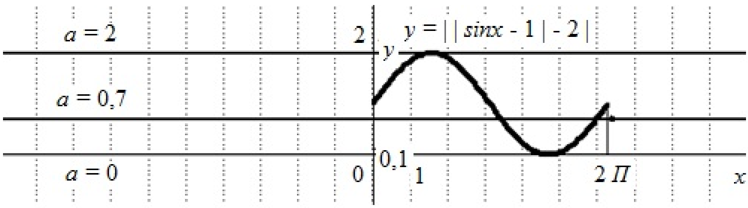


Рис. 8.5

Схематически количество решений уравнения (8.3) в зависимости от значений параметра на параметрической оси можно показать так, как показано на рис. 8.6, *б*. Для сравнения на рис. 8.6, *а* проиллюстрировано количество решений базового уравнения $y = \left|\left|t-1\right|-2\right|$.

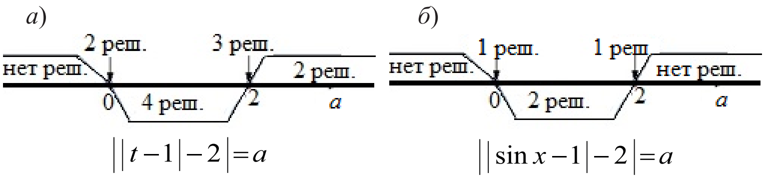


Рис. 8.6

Найдем все решения уравнения из промежутка [0; 2π] в зависимости от значений параметра a.

Первый способ. Сравним на параметрической прямой количество решений уравнения $\left|\left|t-1\right|-2\right|=0$ (рис. 8.6, *а*) и уравнения $\left|\left|\sin x-1\right|-2\right|=0$ (рис. 8.6, *б*) и одновременно для каждого случая решим уравнение.

1. Если $a \in (-\infty; 0)$, то уравнение $\left|\left|t-1\right|-2\right|=a$ (8.1) решений не имеет. Уравнение $\left|\left|\sin x-1\right|-2\right|=a$ (8.3) также не имеет решений.

2. Если a = 0, то уравнение (8.1) имеет два решения: t = 1; t = 3, а уравнение (8.3) имеет одно решение.

Докажем это утверждение. Для этого решим уравнение (8.3). Обозначим $\sin x = t$, $-1 \le t \le 1$. Воспользуемся готовым решением уравнения (8.1), а именно:

$$\begin{cases} t = -1, \\ t = \sin x, \end{cases} \quad \begin{cases} t = 3, \\ t = \sin x. \end{cases}$$

Имеем: $\sin x = -1$, $x = -0{,}5\pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

На промежутке $[0; 2\pi]$ уравнение $\left| |\sin t - 1| - 2 \right| = a$ имеет единственное решение $x = 1{,}5\pi$. Уравнение $\sin x = 3$ решений не имеет, так как число $t = 3$ не входит в промежуток $-1 \le t \le 1$. Значит, если $a = 0$, то уравнение (8.3) имеет единственное решение $x = 1{,}5\pi$.

3. Если $\left| |2x+1| - 3 \right| = 2a$, то уравнение (8.1) имеет четыре решения: $t = a - 1$, $t = -a - 1$, $t = -a + 3$, $t = a + 3$. Уравнение (8.3) на этом промежутке будет иметь только два решения:

$$\begin{cases} t = a - 1, \\ t = \sin x, \end{cases} \quad \begin{cases} t = -a - 1, \\ t = \sin x, \end{cases} \quad \begin{cases} t = -a + 3, \\ t = \sin x, \end{cases} \quad \begin{cases} t = a + 3, \\ t = \sin x. \end{cases}$$

Так как $-1 \le \sin x \le 1$, то на переменную t также необходимо наложить ограничения $-1 \le t \le 1$:

$$-1 \le a - 1 \le 1,\ -1 \le -a - 1 \le 1, -1 \le -a + 3 \le 1, -1 \le a + 3 \le 1.$$

После упрощений получим:

$$0 \le a \le 2,\ -2 \le -a \le 0,\ 2 \le a \le 4,\ -4 \le -a \le -2.$$

Очевидно, что среди всех двойных неравенств только неравенство $0 \le a \le 2$ не противоречит условию $a \in (0; 2)$. Значит, если $a \in (0; 2)$, то имеем: $\sin x = a - 1$, $x = (-1)^k \arcsin(a - 1) + \pi k$, $k \in Z$. На промежутке $[0; 2\pi]$ будет два решения: $x_1 = \arcsin(a - 1)$, $x_2 = \pi - \arcsin(a - 1)$.

4. Если $a = 2$, то уравнение (8.1) имеет три решения: $t = 1$, $t = -a - 1$, $t = a + 3$. Уравнение (8.3) на этом промежутке должно иметь единственное решение, при этом параметр принимает

конкретное значение $a = 2$, тогда $t = 1$, $t = 2 + 3 = 5$, $t = –2 – 1 = –3$. Так как $|t|\leq 1$, то числа $t = 5$, $t = –3$ не удовлетворяют наложенным ограничениям. Поэтому остается единственное решение $\sin x = 1$, $x = 0{,}5\pi + 2\pi p$, $p \in Z$. На промежутке $[0; 2\pi]$ имеем единственное решение $x = 0{,}5\pi$.

5. Если $a \in (2; \infty)$, то уравнение (8.1) имеет два решения $t = a + 3$ и $t = –a – 1$. Уравнение (8.3) на этом промежутке решений не имеет. Так как $|t|\leq 1$, то наложим данные ограничения на параметр: $-1 \leq a-1 \leq 1$, $-1 \leq a+3 \leq 1$. После упрощений получим: $-2 \leq a \leq 0$, $-4 \leq a \leq -2$. Полученные промежутки $[–2; 0]$ и $[–4; –2]$ не пересекаются с промежутком $(2; \infty)$, значит, можно утверждать, что на промежутке $a \in (2; \infty)$ уравнение (8.3) решений не имеет.

Второй способ. Если параметр принимает значения $a = 0$ или $a = 2$, то при каждом из этих значений параметра уравнение $\left||\sin t - 1| - 2\right| = a$ имеет единственное решение.

1. $\left||\sin t - 1| - 2\right| = a$ и $a = 0$, значит, $\left||\sin t - 1| - 2\right| = 0$ или $|\sin x - 1| = 2$. Правая часть уравнения – положительное число. Раскроем модуль по определению: $\sin x - 1 = -2$ и $\sin x - 1 = 2$. Имеем: $\sin x = -1$ и $\sin x = 3$. Последнее уравнение не имеет решений, поэтому нужно решить единственное уравнение $\sin x = -1$, $x = –0{,}5\pi + 2\pi n$, $n \in Z$. На промежутке $[0; 2\pi]$ имеем единственное решение $x = 1{,}5\pi$.

2. Аналогично $\left||\sin t - 1| - 2\right| = a$ и $a = 2$, поэтому $\left||\sin t - 1| - 2\right| =$ $= 2$. По определению модуля имеем: $|\sin x – 1| –2 = 2$ или $|\sin x – 1| –2 = –2$. Рассмотрим первое уравнение: $|\sin x – 1| –2 =$ $= 2$ или $|\sin x – 1| = 4$. По определению модуля: $|\sin x – 1| = –4$, $\sin x - 1 = 4$. Откуда $\sin x = –3$, $\sin x = 5$. Оба уравнения решений не имеют. Рассмотрим второе уравнение

$$|\sin x – 1| –2 = –2, \text{ откуда } \sin x = 1.$$

Получим решение $x = 0{,}5\pi + 2\pi p$, $p \in Z$. На промежутке $[0; 2\pi]$ имеем единственное решение $x = 0{,}5\pi$.

3. Используя рис. 8.5 как графическую опору для рассуждений, можно прийти к выводу, что на промежутках $(-\infty; 0)\cup(2; \infty)$ уравнение (8.3) решений не имеет.

4. Рассмотрим промежутки (0; 2). Уравнение (8.3) имеет два разных решения. Найдем их:

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ x = a+3, \end{cases} \begin{cases} a \geq 0, \\ x = -a-1, \end{cases} \begin{cases} 0 \leq a \leq 2, \\ x = -a+3, \end{cases} \begin{cases} 0 \leq a \leq 2, \\ t = a-1. \end{cases}$$

Так как $|t| \leq 1$, то введем эти ограничения в каждую из систем:

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ -4 \leq a \leq -2, \end{cases} \begin{cases} a \geq 0, \\ -2 \leq a \leq 0, \end{cases} \begin{cases} 0 \leq a \leq 2, \\ 2 \leq a \leq 4, \end{cases} \begin{cases} 0 \leq a \leq 2, \\ 0 \leq a \leq 2. \end{cases}$$

Среди полученных четырех систем неравенств только последняя не является противоречивой, поэтому подставим $t = a - 1$ в уравнение $\sin x = t$ и решим его:

$$\sin x = a - 1 \text{ или } x = (-1)^k \arcsin(a - 1) + \pi k,\ k \in Z, \text{ если } a \in (0;2).$$

На промежутке $[0; 2\pi]$ будет два решения

$x_1 = \arcsin(a - 1)$, $x_2 = \pi - \arcsin(a - 1)$.

Третий способ. В процессе решения уравнения были получены смешанные системы

$$\begin{cases} t < -1, \\ t = -a-1, \end{cases} \begin{cases} -1 \leq t \leq 1, \\ t = a-1. \end{cases} \qquad (8.4)$$

Так как $t = \sin x$, то решением уравнения (8.3) является $t = a - 1$ или $\sin x = a - 1$, $x = (-1)^k \arcsin(a - 1) + \pi k$, $k \in Z$, на промежутке $[0; 2\pi]$ будет два решения: $x_1 = \arcsin(a - 1)$, $x_2 = \pi -$ $- \arcsin(a - 1)$. Вместе с тем нужно отбросить решение $t = -a - 1$ или $\sin x = -a - 1$. Возникает естественный вопрос, исходя из каких соображений необходимо это сделать, если нет графической опоры для рассуждений?

Поиск ответов на подобные вопросы всегда является тем «уязвимым» или «сложным» местом формально-логических рассуждений, которые обычно затрудняют аналитические методы решения уравнений с параметрами. В рассматриваемом случае решение $t=-a-1$ необходимо отбросить, потому что sin x, обозначенный через t, ограничен, а именно $-1\le \sin x \le 1$, а значит, и $-1 \le t \le 1$. В первой системе (8.4) $t < -1$, что противоречит наложенному условию. Поэтому и решение $t=-a-1$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: если $a \in (-\infty;\, 0) \cup (2;\, \infty)$, то уравнение (8.3) решений не имеет; если $a = 0$, то решение единственное: $x = 1{,}5\pi$; если $a \in (0;2)$, то решений два: $x_1 = \arcsin (a - 1)$, $x_2 = \pi - \arcsin (a - 1)$; если $a = 2$, то решение одно: $x = 0{,}5\pi$.

8.3. Исследование решений линейного уравнения с параметром и двойным модулем, содержащего логарифмические функции

В примерах 8.1 и 8.2 существенную роль в нахождении решений сыграла графическая интерпретация образов уравнений. Однако решение уравнения только с опорой на графическую интерпретацию может привести и к ложным утверждениям. Приведем пример.

Пример 8.3. Задано уравнение

$$\left|\left|\ln t-1\right|-2\right|=a. \tag{8.5}$$

Найти количество решений в зависимости от значений параметра a.

Решение. Обозначим $\ln t = x$ и перейдем к уравнению $|\, x - 1\,| - 2 = a$, решения которого уже известны. Для сравнения количества корней уравнения $\left|\,|\,x-1\,|-2\,\right|=a$ и $\left|\,|\ln t-1|-2\,\right|=a$ решим последнее уравнение графически в системе координат xOy. Обозначим $y=\left|\,|\ln x-1|-2\,\right|$ и $y = a$. Построим график логарифмической функции с помощью элементарных преобразований:

$$f(t) = \ln t\text{:}\ \ f(t)=\ln t \to f(t)=\ln t-1 \to f(t)=|\ln t-1| \text{(рис. 8.7).}$$

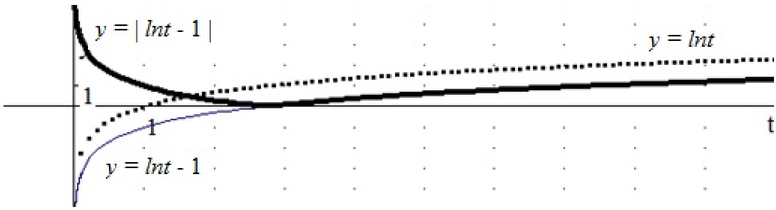


Рис. 8.7

$$f(t)=|\ln t-1| \to f(t)=|\ln t-1|-2 \to f(x)=||\ln t-1|-2 \text{ (рис. 8.8).}$$

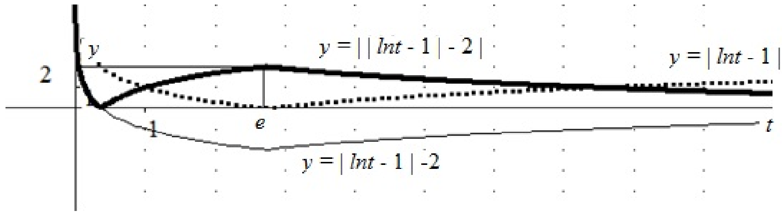


Рис. 8.8

Окончательно график функции $y=\left|\left|\ln t-1\right|-2\right|$ примет вид (рис. 8.9).

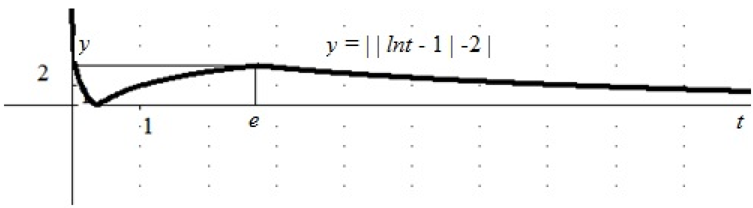


Рис. 8.9

Уравнение (8.5) имеет столько решений, сколько общих точек на горизонтальной прямой $y = a$ и функции $y=\left|\left|\ln t-1\right|-2\right|$.

Используя рис. 8.9 как графическую опору для рассуждений, можно сделать предварительный вывод: если $a \in (-\infty; 0)$, то уравнение (8.5) решений не имеет; если $a = 0$, то имеем единственное решение; если $a \in (0; 2]$, то решений два; если $a = 2$, то два решения; если $a \in (2; \infty)$, то решение одно.

Найдем все решения уравнения в зависимости от значений параметра a.

Решение. Изобразим схематически на параметрической прямой количество решений уравнений $||x-1|-2| = a$ и $||\ln t - 1| - 2| = a$ в зависимости от значений параметра a (рис. 8.10).

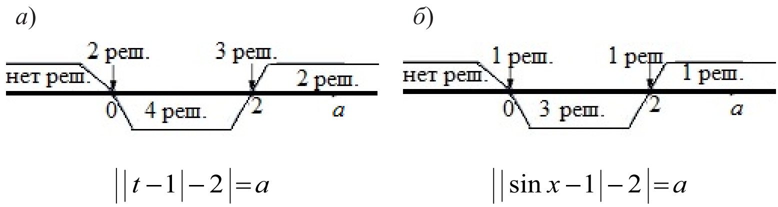


Рис. 8.10

Сравним количество корней уравнений $||x-1|-2| = a$ (8.1) и $||\ln t - 1| - 2| = a$ (8.5).

1. Если $a \in (-\infty; 0)$, то уравнения (8.1) и (8.5) решений не имеют.

2. Если $a = 0$, то уравнение (8.1) имеет два решения, а уравнение (8.5) имеет единственное решение.

3. Если $a \in (0; 2)$, то уравнение (8.1) имеет четыре решения, а уравнение (8.5) имеет три решения.

4. Если $a = 2$, уравнение (8.1) имеет три решения, а уравнение (8.5) имеет единственное решение.

5. Если $a \in (2; \infty)$, уравнение (8.1) имеет два решения, а уравнение (8.5) имеет единственное решение.

Если выводы, сделанные относительно уравнения (8.1), являются правильными, то можно ли считать достоверными выводы, сделанные относительно уравнения (8.5)? Докажем, что приведенное исследование относительно количества корней уравнения (8.5) являются ошибочными.

Рассмотрим подробнее свойства функции $y = \left| \left| \ln t - 1 \right| - 2 \right|$. Поскольку базовая элементарная функция $f(t) = \ln t$ является возрастающей на всей области определения $D(\ln t) = (0; \infty)$, то и функция $f(t) = \ln t - 1$ также является возрастающей на всей области определения. Последняя функция пересекает ось абсцисс Ot в точке с координатами: $f(t) = 0$, $\ln t - 1 = 0$, $\ln t = 1$, $t = e \approx 2{,}71$. Значит, точка пересечения графика функции $f(t) = \ln t - 1$ и оси абсцисс имеет координаты (e; 0). График функции $f(t) = \left| \left| \ln t - 1 \right| - 2 \right|$, как и график функции $f(t) = \ln t - 1$, пересекает ось абсцисс, но ординаты точек на ее графике не могут принимать отрицательные значения, поэтому функция $f(t) = \ln t - 1$ является убывающей на промежутке (0; e) и возрастающей на промежутке (e; ∞) (рис. 8.11).

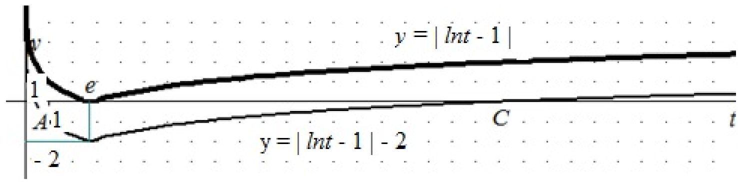


Рис. 8.11

Рассмотрим функцию $f(t) = \left| \left| \ln t - 1 \right| - 2 \right|$, которая является, как и функция $f(t) = \left| \ln t - 1 \right|$, убывающей на промежутке (0; e) и возрастающей на промежутке (e; ∞). Это означает, что функция $f(t) = \left| \ln t - 1 \right| - 2$ пересечет ось абсцисс в двух точках A и C, имеющих абсциссы, из промежутка (0; e) и (e; ∞) соответственно (рис. 8.11). Окончательно можно утверждать, что график функции $f(t) = \left| \left| \ln t - 1 \right| - 2 \right|$ будет касаться оси абсцисс в двух точках A и C, а сама функция принимает только положительные значения (рис. 8.12).

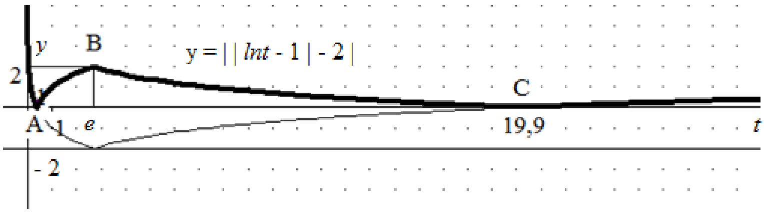


Рис. 8.12

Найдем координаты этих точек. Для этого решим уравнение: $\left|\,|\ln t-1|-2\,\right|=0$, имеем: $|\ln t-1|-2=0$ или $|\ln t-1|=2$. Раскроем модуль по определению: $\ln t-1=2$ или $\ln t-1=-2$. Каждое из данных уравнений имеет решение: $\ln t=3,\ t=e^3,\ \ln t=-1,\ t=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

График функции $f(t)=\left|\,|\ln t-1|-2\,\right|$ будет касаться оси абсцисс в двух точках: $A\left(\dfrac{1}{e};0\right)$, $C(e^3;0)$ (рис. 8.12).

Благодаря более точной графической интерпретации уравнения (8.5) в процессе исследования можно выяснить, что количество корней уравнения в зависимости от значений параметра полностью совпадает с количеством корней уравнения (8.1).

Найдем эти решения.

1. Если $a\in(-\infty;0)$, то уравнение (8.5) решений не имеет.

2. Если $a=0$, то уравнение (8.1) имеет два решения: $x=-1;\ x=3$. Соответственно, уравнение (8.5) имеет тоже два решения: $\ln t=3, t=e^3$, или $\ln t=-1, t=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

3. Если $a\in(0;2)$, то уравнение (8.1) имеет четыре решения: $x=a-1, x=-a-1, x=a+3, x=-a+3$. Соответственно, уравнение (8.5) имеет четыре решения: $\ln t=a-1, t=e^{a-1}$; $\ln t=-a-1, t=e^{-a-1}$; $\ln t=-a+3, t=e^{-a+3}$; $\ln t=a+3, t=e^{a+3}$.

4. Если $a = 2$, то уравнение (8.1) имеет три решения: $x = 1$, $x = a + 3$, $x = -a - 1$. Тогда уравнение (8.5) имеет три решения: $\ln t = 1, t = e$; $\ln t = a + 3, t = e^{a+3}$ $\ln t = -a - 1, t = e^{-a-1}$.

5. Если $a \in (2; \infty)$, то уравнение (8.1) имеет два решения: $x = a + 3$ и $x = -a - 1$. Тогда (8.5) имеет тоже два решения: $\ln t = a + 3, t = e^{a+3}$; $\ln t = -a - 1, t = e^{-a-1}$.

8.4. Исследование решений линейного уравнения с параметром и двойным модулем, содержащего показательные функции

Рассмотрим другое уравнение, сконструированное на базе уравнения (8.1).

Пример 8.4. Задано уравнение

$$\left| \left| e^x - 1 \right| - 2 \right| = a. \tag{8.6}$$

Найти количество решений в зависимости от значений параметра *a*.

Решение. Обозначим $e^x = t$, тогда получим: $\left| \left| t - 1 \right| - 2 \right| = a$. Чтобы сравнить, насколько совпадает количество решений уравнений (8.1) и (8.6), решим графически в системе координат xOy уравнения (8.6). Обозначим $f(x) = \left| \left| e^x - 1 \right| - 2 \right|$ и $f(x) = a$. Построим первую функцию с помощью таких элементарных преобразований функции $f(x) = e^x$:

$$f(x) = e^x \to f(x) = e^x - 1 \to f(x) = |e^x - 1| \text{ (рис. 8.13)};$$

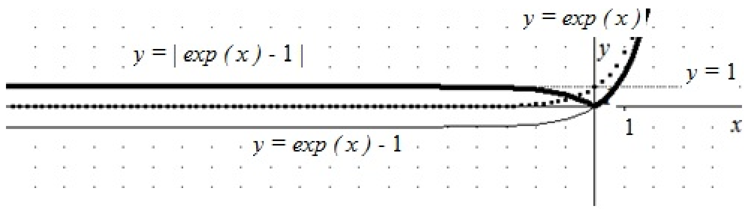


Рис. 8.13

$$f(x)=e^x \to f(x)=e^x-1 \to f(x)=|e^x-1|-2 \to f(x)=$$
$$=||e^x-1|-2| \text{ (рис. 8.14).}$$

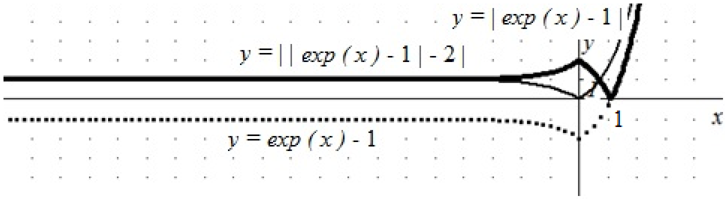


Рис. 8.14

Прежде чем сравнивать количество решений уравнений (8.1) и (8.6), проведем такое исследование функции $f(x)=\left|\left|e^x-1\right|-2\right|$.

1. Базовая функция $f(x) = e^x$ является возрастающей на всей области определения $(-\infty; \infty)$ и принимает только положительные значения, имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ (см. рис. 8.13).

2. Функция $f(x) = e^x - 1$ тоже является возрастающей (см. рис. 8.13), имеет горизонтальную асимптоту $y = -1$ и пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x = 0$. Значит, точка пересечения графика функции $f(x) = e^x - 1$ и оси Ox имеет координаты (0; 0).

3. Функция $f(x)=\left|e^x-1\right|$ пересекает ось абсцисс в точке с координатами (0; 0), не может принимать отрицательные значения, имеет асимптоту $y = 1$, является убывающей на промежутке $(-\infty; 0)$ и возрастающей на промежутке $(0; \infty)$ (см. рис. 8.14).

4. Функция $f(x)=\left|\left|e^x-1\right|-2\right|$ имеет асимптоту $y = 1$, пересекает ось Oy в точке A с координатами: $x=0$, $y=||e^0-1|-2|=2$ и ось Ox в точке B с координатами $y=0$, $\left|\left|e^x-1\right|-2\right|=0$, $|e^x-1|=2$. Откуда получим два уравнения: $e^x - 1 = 2$, $e^x - 1 = -2$. Первое имеет решение: $e^x = 3$, $x = \ln 3$. Второе – $e^x = -1$ решений не имеет. В отличие от функции $f(x)=\left|\left|\ln x-1\right|-2\right|$ функция $f(x)=\left|\left|e^x-1\right|-2\right|$ пересекает ось Ox только в одной точке B(ln3; 0) (рис. 8.15).

Уравнение (8.6) имеет столько решений, сколько общих точек на горизонтальной прямой $y = a$ и графика функции $f(x)=\left|\left|e^x-1\right|-2\right|$ (см. рис. 8.15).

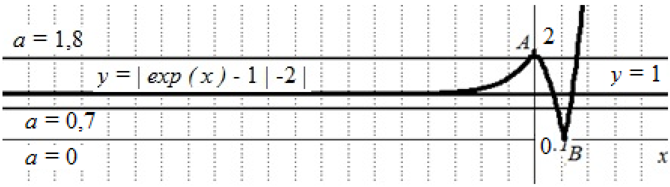
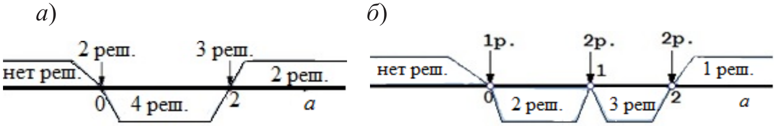


Рис. 8.15

Используя рис. 8.15 как графическую опору для рассуждений, можно сделать следующие вывод: если $a \in (-\infty; 0)$, то уравнение (8.6) решений не имеет; если $a = 0$, то имеем единственное решение; если $a \in (0; 1)$, то решений три; если $a \in (1; 2)$, то решений два; если $a = 2$, то два решения; если $a \in (2; \infty)$ то решение одно.

Представим схематически на параметрической прямой количество решений уравнений $\big||x-1|-2\big| = a$ (рис. 8.16, *а*) и $\big||e^x-1|-2\big| = a$ (рис. 8.16, *б*) и сравним их в зависимости от значений параметра *a*.



$\big||x-1|-2\big| = a$ $\qquad$ $\big||e^x-1|-2\big| = a$

Рис. 8.16

1. Если $a \in (-\infty; 0)$, то уравнение (8.1) и уравнение (8.6) решений не имеют.

2. Если $a = 0$, то уравнение (8.1) имеет два решения, уравнение (8.6) имеет единственное решение.

3. Если $a \in (0; 2)$, то уравнение (8.1) имеет четыре решения, уравнение (8.6) имеет два решения на промежутке (0; 1) и три

решения на промежутке (1; 2); если $a = 1$, то уравнение (8.6) имеет два решения.

4. Если $a = 2$, то уравнение (8.1) имеет три решения, уравнение (8.6) имеет два решения.

5. Если $a \in (2; \infty)$, то уравнение (8.1) имеет два решения, уравнение (8.6) имеет единственное решение.

Найдем все решения уравнения в зависимости от значений параметра a.

Решение. Для каждого значения параметра a количество корней уравнения (8.6) не превышает количества корней уравнения (8.1), тогда воспользуемся решениями уравнения (8.1), а именно: если $a \in (-\infty; 0)$, то уравнение решений не имеет; если $a = 0$, то уравнение имеет два решения: $x = -1$, $x = 3$; если $a \in (0; 2)$, то уравнение имеет четыре решения: $x = a - 1$, $x = -a - 1$, $x = -a + 3$, $x = a + 3$; если $a = 2$, то уравнение имеет три решения: $x = 1$, $x = a + 3$, $x = -a - 1$; если $a \in (2; \infty)$, то два решения: $x = a + 3$, $x = -a - 1$.

Перепишем данные утверждения так.

1. Если $a \in (-\infty; 0)$, то уравнение (8.6) решений не имеет.

2. Если $a = 0$, то уравнение (8.1) имеет два решения: $x = -1$, $x = 3$. Вернемся к замене $e^x = t$, имеем два уравнения: $e^x = -1$ и $e^x = 3$. Первое уравнение не имеет решений, второе имеет такое решение: $x = \ln 3$. Значит, если $a = 0$, то уравнение (8.6) имеет единственное решение: $x = \ln 3$.

3. Если $a \in (0; 2)$, то уравнение (8.1) имеет четыре решения: $t = a - 1$, $t = -a - 1$, $t = -a + 3$, $t = a + 3$. Перейдем к замене. Получим уравнения: $e^x = a - 1$, $e^x = -a - 1$, $e^x = -a + 3$, $e^x = a + 3$.

Поскольку функция $y = e^x$ принимает только положительные значения ($e^x > 0$), то правая часть каждого из уравнений должна быть тоже положительной. Вместе с тем должно выполняться условие $a \in (0; 2)$. Данные утверждения соответствуют таким системам неравенств:

$$\begin{cases} 0 < a < 2, \\ a - 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 2, \\ -a - 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 2, \\ -a + 3 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 2, \\ a + 3 > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим каждую систему в отдельности:

а) $\begin{cases} 0 < a < 2, \\ a > 1; \end{cases} \Rightarrow 1 < a < 2$. То есть если $a \in (1;\ 2)$, то уравнение (8.6) имеет единственное решение: $e^x = a - 1,\ x = \ln(a-1)$;

б) $\begin{cases} 0 < a < 2, \\ a < -1. \end{cases}$ Данная система несовместна, значит, решение $t = -a - 1$ уравнения (8.1) не может быть решением уравнения (8.6);

в) $\begin{cases} 0 < a < 2, \\ a < 3 \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 2$. Значит, если $a \in (0;\ 2)$, то уравнение (8.6) имеет решение: $e^x = -a + 3,\ x = \ln(-a+3)$;

г) $\begin{cases} 0 < a < 2, \\ a > -3 \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 2$. Если $a \in (0;\ 2)$, то уравнение (8.6) имеет решение: $e^x = a + 3,\ x = \ln(a+3)$.

Значит, если $a \in (0;\ 1)$, то уравнение (8.6) имеет два решения: $x = \ln(-a+3)$ и $x = \ln(a+3)$; если $a \in (1;\ 2)$, то решений три: $x = \ln(a-1),\ x = \ln(-a+3),\ x = \ln(a+3)$.

4. Если $a = 2$, то уравнение (8.1) имеет три решения: $t = 1$, $t = a + 3$, $t = -a - 1$. Вернемся к замене: $e^x = t$ и учтем, что $t > 0$. Тогда $e^x = -1$, последнее уравнение решений не имеет. Значит, если $a = 2$, то уравнение (8.6) имеет два решения: $x = 0$, $x = \ln 5$.

5. Если $a \in (2; \infty)$, то уравнение (8.1) имеет два решения: $t = a + 3$, $t = -a - 1$. Вернемся к замене: $e^x = t$ и учтем, что $t > 0$. Если $t = a + 3$, то $a + 3 > 0$, $a > -3$. Последнее неравенство не противоречит условию $a \in (2;\ \infty)$, поэтому $e^x = a + 3$ или $x = \ln(a+3)$. Если $t = -a - 1$, то $-a - 1 > 0$, $a < -1$, что противоречит условию $a \in (2; \infty)$, поэтому $t = -a - 1$ не может быть решением уравнения (8.6).

Значит, если $a \in (2;\ \infty)$, то уравнение (8.6) имеет единственное решение: $x = \ln(a+3)$.

Глава 9. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ ИЗ МАТЕРИАЛОВ ЕГЭ

В материалах Единого государственного экзамена по математике в задании 18 предлагаются задачи с параметрами. Рассмотрим те из них, которые целесообразно решать координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. При решении более сложных уравнений с параметрами, как правило, они распадаются на линейные с дополнительными условиями. Также после эквивалентных преобразований можно получить уравнения, содержащие элементарные функции, графики которых хорошо известны абитуриентам.

Рассмотрим пример из материалов ЕГЭ [26, с. 28]. Задание имеет такой вид.

Пример 9.1. Найти те значения параметра *a*, при которых уравнение имеет единственное решение из отрезка [0; 1]:

$$(8x-5)\cdot\ln(x+a)=(8x-5)\cdot\ln(3x-a). \tag{9.1}$$

Уравнения с параметрами требуют творческого подхода и видения как бы общей математической ситуации, заложенной в конкретной задаче. Например, в условии примера (9.1) задание «найти единственное решение» является частью учебной математической ситуации, так как это уравнение может иметь и другое количество решений. Точно так же задание «найти единственное решение из отрезка [0; 1]» является частью учебной математической ситуации, так как в другом случае можно найти единственное решение из другого промежутка и т. д. В каждом из приведенных случаев ответ будет выглядеть по-разному. Меняется ли подход к решению этой задачи в таком случае? Для абитуриентов нередко такие изменения выглядят как формулирование, по сути, новой задачи. Для преодоления таких трудностей исследуем учебную математическую ситуацию, задаваемую уравнением (9.1), с разных сторон. Будем формулировать и решать разные задания, используя одно и то же условие. Задачи будем рассматривать от более общих к более частным.

Пример 9.2. Дано уравнение с параметром [26, с. 28]:

$$\left(8x-5\right)\cdot\ln(x+a)=\left(8x-5\right)\cdot\ln(3x-a). \qquad (9.1)$$

Задания:

1) решить уравнение для всех значений параметра a;

2) найти количество решений в зависимости от значений параметра a;

3) при каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение из отрезка [0; 1].

В материалах ЕГЭ представлены аналитические способы решения данного задания. Нами предлагается использование координатно-параметрического метода в комбинации с методом сечений. Также используются и аналитические методы для преобразования исходного уравнения и приведения его к более простым системам уравнений и неравенств, нежели это задано изначально в условии.

Решение. Решим уравнение (9.1) в зависимости от значений параметра *a.* Проведем эквивалентные преобразования уравнения (9.1). Вынесем за скобку общий множитель: $\left(8x-5\right)\cdot(\ln(x+a)-$ $-\ln(3x-a))=0$. Произведение равно нулю, если каждый из множителей равен нулю. При этом учитывается область допустимых значений логарифмических функций. В результате получим совокупность двух смешанных систем:

$$\begin{cases}8x-5=0,\\ x+a>0,\\ 3x-a>0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\ln(x+a)=\ln(3x-a),\\ x+a>0,\\ 3x-a>0.\end{cases}$$

После упрощений получим такую совокупность смешанных систем: x = 0,625 и $x = a$ при $x > -a$ и $x > 1/3a$. Исходное уравнение (9.1) после равносильных преобразований «распалось» на совокупность двух систем, содержащих линейные уравнения и неравенства, которые легко интерпретировать в системе координат aOx, где Oa – ось абсцисс, Ox – ось ординат. Прямые $x = -a,\ x = \frac{1}{3}a$ разбивают всю координатно-параметрическую плоскость на четыре частичные области. Системе двух неравенств $x > -a,\ x > \frac{1}{3}a$, задающих область допустимых значений переменной x уравнения (9.1), соответствует верхняя частичная область, лежащая выше прямых $x = -a,\ x = \frac{1}{3}a$. Графиком функции $x = \frac{5}{8}$ является прямая, параллельная оси абсцисс, графиком функции $x = a$ является биссектриса первого-третьего координатных углов (рис. 9.1).

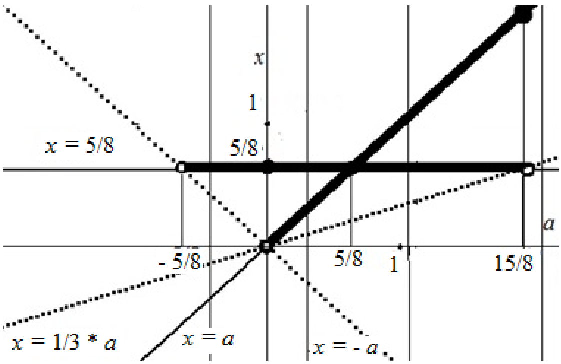


Рис. 9.1

Прямые $x = -a,\ x = \frac{1}{3}a$ на рис. 9.1 показаны пунктирной линией, так как точки, расположенные на этих прямых, не входят в область допустимых значений исходного уравнения. Решениями уравнения (9.1) являются части прямых $x = \frac{5}{8}$, $x = a$, которые входят в область допустимых значений переменной x (на рис. 9.1 решения показаны жирными линиями).

Уравнение (9.1) имеет столько решений, сколько общих точек на графиках вертикальной прямой $a = p$ и функций $x = \frac{5}{8}$, $x = a$ из области допустимых значений уравнения. Используя рис. 9.1 как опору для рассуждений, можно установить, что уравнение (9.1) может иметь одно, два решения или не иметь решений.

Контрольными значениями параметра a, при переходе через которые меняется количество решений, являются следующие.

1. Это абсциссы точки пересечения прямой $x = –a$ и $x = 0{,}625$. Приравняв правые части уравнений, получим контрольное значение параметра $a = –0{,}625$.

2. Это абсцисса точки пересечения прямых $x = a$ и $x = \frac{1}{3}a$. Приравняв правые части уравнений, получим контрольное значение параметра $a = 0$.

3. Это абсцисса точки пересечения прямых $x = a$ и $x = 0{,}625$. Приравняв правые части уравнений, получим контрольное значение параметра $a = 0{,}625$.

4. Это абсцисса точки пересечения прямых $x = \frac{1}{3}a$ и $x = \frac{5}{8}$. Приравняв правые части уравнений, получим контрольное значение параметра $a = 1{,}875$.

Графическая опора на геометрический образ уравнения (9.1) хорошо иллюстрирует, что при $a < –0{,}625$ исходное уравнение решений не имеет, так как нет общих точек у вертикальных линий

$a = p$ и части прямых $x = a$ и $x = 0{,}625$, входящих в область допустимых значений; при $a = -0{,}625$ уравнение решений не имеет, так как прямая $x = -a$ «вырезает» решение из прямой $x = 0{,}625$; при $a = 0$ имеем единственное решение $x = 0{,}625$, так как другое решение $x = a$ «вырезается» прямой $x = -a$; при $a \in (-0{,}625;\ 0)$ имеем единственное решение $x = 0{,}625$; при $a = 0{,}625$ имеем единственное решение, так как прямые $x = a$ и $x = 0{,}625$, являющиеся решениями, пересекаются в этой точке, значит, имеем $x = 0{,}625$; при $a \in (0;\ 0{,}625)$ имеем два решения: $x = a$ и $x = 0{,}625$; при $a = 1{,}875$ имеем единственное решение $x = a$, так как решение $x = 0{,}625$ «вырезается» прямой $x = \frac{1}{3}a$; при $a \in \left(\frac{5}{8}; \frac{15}{8}\right)$ имеем два решения: $x = a$ и $x = 0{,}625$; при $a \in (1{,}875; \infty)$ единственное решение $x = a$.

Для удобства проиллюстрируем решения уравнения (9.1) в зависимости от значений параметра a в виде таблицы:

$\left(-\infty;-\frac{5}{8}\right)$	$-\frac{5}{8}$	$\left(-\frac{5}{8};0\right)$	0	$\left(0;\frac{5}{8}\right)$	$\frac{5}{8}$	$\left(\frac{5}{8};\frac{15}{8}\right)$	$\frac{15}{8}$	$\left(\frac{15}{8};\infty\right)$
Нет решения	Нет решения	1 решение	1 решение	2 решение	1 решение	2 решение	1 решение	1 решение
Нет решения	Нет решения	$x = \frac{5}{8}$	$x = \frac{5}{8}$	$x = \frac{5}{8}$ $x = a$	$x = \frac{5}{8}$	$x = \frac{5}{8}$ $x = a$	$x = a$	$x = a$

Исходя из проведенного исследования решения уравнения (9.1), можно ответить на ряд вопросов.

1. Уравнение имеет такие решения в зависимости от значений параметра a: при $a \in (-\infty;-0{,}625]$ уравнение не имеет решений; при $a \in (-0{,}625;0] \cup \{0{,}625\}$ имеем единственное решение $x = 0{,}625$; при $a \in (0;0{,}625) \cup (0{,}625;1{,}875)$ уравнение имеет два

решения: $x = 0{,}625$ и $x = a$; при $[1{,}875;\infty)$ уравнение имеет единственное решение $x = a$.

2. Количество решений в зависимости от значений параметра a: уравнение не имеет решений, если $a \in (-\infty; -0{,}625]$; имеет единственное решение, если $a \in (-0{,}625;0] \cup \{0{,}625\} \cup [1{,}875;\infty)$; имеет два решения, если $a \in (0;0{,}625) \cup (0{,}625;1{,}875)$.

Остается ответить на вопрос, при каком значении параметра a уравнение имеет ровно один корень из отрезка [0; 1]. Обратимся к графической интерпретации. На графический образ уравнения (9.1) необходимо «наложить» условие $x \in [0;\ 1]$, т. е. необходимо из имеющихся решений «вырезать» горизонтальную полосу между прямыми $x = 0$, $x = 1$ (см. рис. 9.2), в которую и входят новые решения.

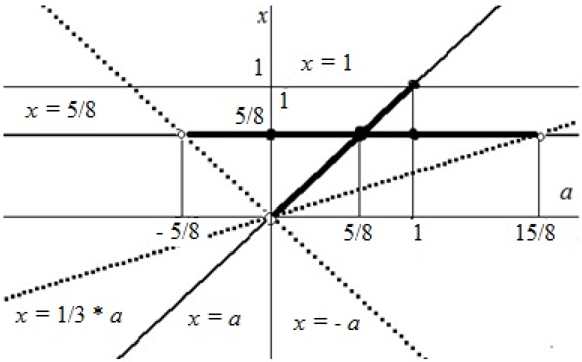


Рис. 9.2

В связи с этим появляются новые ограничения и изменяются контрольные значения параметра, при переходе через которые меняется количество решений уравнения. Появляются новые контрольные значения параметра.

Прямая $x = 1$ пересекает прямую $x = a$, являющуюся решением уравнения (9.1), в точке с абсциссой $a = 1$. Значит, при $a = 1$ уравнение (9.1) с учетом ограничений имеет два решения: $x = \frac{5}{8}$ и $x = a$. При $a \in \left(1; \frac{15}{8}\right)$ уравнение (9.1) с учетом ограничений имеет единственное решение $x = \frac{5}{8}$.

Выберем те значения параметра a, при которых уравнение (9.1) имеет единственное решение из отрезка $x \in [0; 1]$ (см. рис. 9.3). Уравнение имеет единственное решение из отрезка $x \in [0; 1]$, если $a \in \left(-\frac{5}{8}; 0\right] \cup \left\{\frac{5}{8}\right\} \cup \left(1; \frac{15}{8}\right)$.

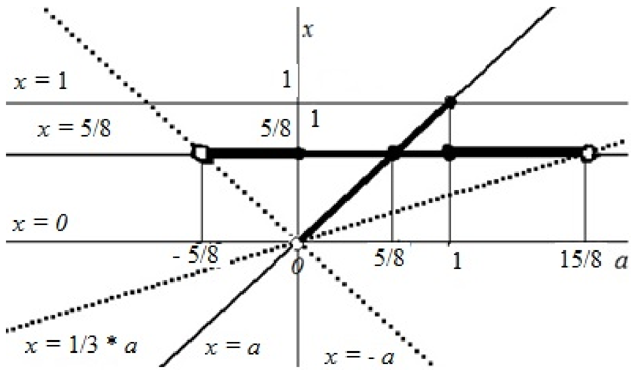


Рис. 9.3

Рассмотрим другой пример, условие которого взято с сайта «Решу ЕГЭ», задание 18 № 517432.

Пример 9.3. При каком значении параметра a уравнение (9.2) имеет хотя бы одно решение:

$$\sqrt{1-4x} \cdot \ln(9x^2 - a^2) = \sqrt{1-4x} \cdot \ln(3x - a). \qquad (9.2)$$

Решение. Решим уравнение координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. В начале установим область существования уравнения:

$$\begin{cases} 1-4x \ge 0, \\ 9x^2 - a^2 > 0, \\ 3x - a > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{4}, \\ (3x-a)(3x+a) > 0, \\ 3x - a > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{4}, \\ 3x - a > 0, \\ 3x + a > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{4}, \\ x > \frac{1}{3}a, \\ x > -\frac{1}{3}a. \end{cases}$$

Выполним эквивалентные преобразования уравнения (9.2)

$$\sqrt{1-4x} \cdot (\ln(9x^2 - a^2) - \ln(3x - a)) = 0.$$

Произведение равно нулю, если каждый из множителей равен нулю, при этом учтем область существования уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-4x = 0, \\ x > \frac{1}{3}a, \\ x > -\frac{1}{3}a, \end{cases} \\ \begin{cases} \ln((3x-a)(3x+a)) = \ln(3x-a), \\ x \le 0{,}25, \\ x > \frac{1}{3}a, \\ x > -\frac{1}{3}a, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0{,}25, \\ x > \frac{1}{3}a, \\ x > -\frac{1}{3}a, \end{cases} \\ \begin{cases} ((3x-a)(3x+a)) - (3x-a) = 0, \\ x \le 0{,}25, \\ x > \frac{1}{3}a, \\ x > -\frac{1}{3}a. \end{cases} \end{array}\right. \quad (9.3)$$

Упростим уравнение во второй системе совокупности:

$$\begin{cases} (3x-a)(3x+a-1) = 0, \\ x \le 0{,}25, \\ x > \frac{1}{3}a, \\ x > -\frac{1}{3}a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}a,\ x = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}, \\ x \le 0{,}25, \\ x > \frac{1}{3}a, \\ x > -\frac{1}{3}a. \end{cases}$$

Первая система совокупности (9.3) дала решение $x = 0{,}25$ на области существования, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} x > \frac{1}{3}a, \\ x > -\frac{1}{3}a. \end{cases} \qquad (9.4)$$

Вторая система совокупности (9.3) дала два решения: $x = \frac{1}{3}a$ и $x = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}$, из которых решение $x = \frac{1}{3}a$ не входит в область существования уравнения, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} x \le 0{,}25, \\ x > \frac{1}{3}a, \\ x > -\frac{1}{3}a. \end{cases} \qquad (9.5)$$

Значит, уравнение (9.2) равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} x = 0{,}25, \\ x > \frac{1}{3}a, \\ x > -\frac{1}{3}a, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}, \\ x \le 0{,}25, \\ x > \frac{1}{3}a, \\ x > -\frac{1}{3}a. \end{cases}$$

Исходное уравнение (9.2) «распалось» на совокупность систем линейных уравнений и неравенств, которые легко изобразить на координатно-параметрической плоскости aOx, где Oa – ось абсцисс, Ox – ось ординат.

Прямыми $x = \frac{1}{3}a$ и $x = -\frac{1}{3}a$ вся координатно-параметрическая плоскость разбивается на четыре частичные области. Системой неравенств (9.4) задается верхняя частичная область, лежащая выше прямых $x = \frac{1}{3}a$ и $x = -\frac{1}{3}a$. Условие $x < 0{,}25$ еще больше ограничивает частичную область прямой $x = 0{,}25$. Системе неравенств (9.5) графически соответствует частичная область, лежащая выше прямых $x = \frac{1}{3}a$, $x = -\frac{1}{3}a$ и ниже прямой $x = 0{,}25$, т. е. внутри треугольной области, причем точки прямых $x = \frac{1}{3}a$ и $x = -\frac{1}{3}a$ не являются решениями, а точки прямой $x = 0{,}25$ могут быть решениями уравнения (9.2).

Алгоритм построения графического образа исходного уравнения такой:

1) строим прямые $x = \frac{1}{3}a$, $x = -\frac{1}{3}a$, $x = 0{,}25$;

2) строим прямую $x = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}$ (рис. 9.4). Исходное уравнение имеет столько решений, сколько общих точек на вертикальной прямой $a = p$ и частях прямых $x = 0{,}25$, $x = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}$, выделенных жирным на рис. 9.4. Используя рис. 9.4 как графическую опору для рассуждений, можно установить, что уравнение (9.2) может иметь одно, два решения или не иметь решений. Найдем граничные значения параметра a, проходя через которые исходное уравнение меняет количество решений. Это абсциссы точек B, C, D, E (см. рис. 9.4).

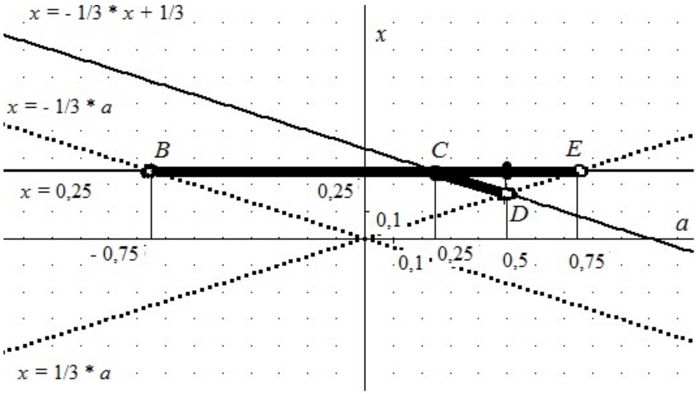


Рис. 9.4

Прямые $x=-\frac{1}{3}a$ пересекаются в точке B, значит, $-\frac{1}{3}a=\frac{1}{4}$, $a=-0{,}75$, при $a = –0{,}75$ уравнение (9.2) решений не имеет. Прямые $x=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}$ и $x = 0{,}25$ пересекаются в точке C, значит, $-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$, $a=0{,}25$. Прямые $x=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}$ и $x=\frac{1}{3}a$ пересекаются в точке D, значит, $-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}a$, $a = 0{,}5$. При $a=0{,}5$ уравнение (9.2) имеет единственное решение $x = 0{,}25$. Прямые $x = 0{,}25$ и $x=\frac{1}{3}a$ пересекаются в точке E, значит, $\frac{1}{3}a=\frac{1}{4}$, $a = 0{,}75$. При $a = 0{,}75$ исходное уравнение не имеет решений.

Окончательно получим: при $a\in(-\infty;-0{,}75]\cup(0{,}75;\infty)$ уравнение (9.2) решений не имеет; при $a\in(-0{,}75;0{,}25]\cup[0{,}5;0{,}75)$ имеем единственное решение $x = 0{,}25$; при $a\in(0{,}25;0{,}5)$ два решения: $x = 0{,}25$ и $x=\frac{1}{3}a$.

Исходное уравнение имеет хотя бы одно решение, если $a \in (-0{,}75; 0{,}75)$.

Ответ: $a \in (-0{,}75; 0{,}75)$.

Следующее уравнение взято из материалов сайта «Решу ЕГЭ» [105], задание 18 № 517432.

Пример 9.4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы одно решение на отрезке [0; 1]:

$$\sqrt{3x-2} \cdot \ln(x-a) = \sqrt{3x-2} \cdot \ln(2x+a). \qquad (9.6)$$

Решение. Решим уравнение координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. В начале установим область существования уравнения:

$$\begin{cases} 3x-2 \ge 0, \\ x-a > 0, \\ 2x+a > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3}, \\ x > a, \\ x > -0{,}5a. \end{cases}$$

Выполним эквивалентные преобразования уравнения (9.6):

$$\sqrt{3x-2} \cdot (\ln(x-a) - \ln(2x+a)) = 0.$$

Произведение равно нулю, если каждый из множителей равен нулю, при этом учтем область существования уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-2=0, \\ x > a, \\ x > -0{,}5a, \end{cases} \\ \begin{cases} x-a = 2x+a, \\ x \ge \dfrac{2}{3}, \\ x > a, \\ x > -0{,}5a, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}, \\ x > a, \\ x > -0{,}5a, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2a, \\ x \ge \dfrac{2}{3}, \\ x > a, \\ x > -0{,}5a. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (9.7)$$

Исходное уравнение (9.6) «распалось» на совокупность систем линейных уравнений и неравенств, которые легко изобразить на координатно-параметрической плоскости aOx, где Oa – ось абсцисс, Ox – ось ординат.

Прямыми $x = a$ и $x = -0{,}5a$ вся координатно-параметрическая плоскость разбивается на четыре частичные области. Системой неравенств $x > a$, $x > -0{,}5a$ задается верхняя частичная область, лежащая выше прямых $x = a$ и $x = -0{,}5a$, причем точки прямых $x = a$ и $x = -0{,}5a$ не являются решениями уравнения (9.6).

Решениями исходного уравнения будут точки прямой $x = \dfrac{2}{3}$, лежащей между прямыми $x = a$ и $x = -0{,}5a$, а также точки прямой $x = -2a$, расположенные выше горизонтальной прямой $x = \dfrac{2}{3}$.

Так как необходимо выбрать решения исходного уравнения из отрезка $x \in [0; 1]$, то в рисунок необходимо внести еще прямые $x = 0$ (ось абсцисс) и $x = 1$. Решения уравнения (9.6) из промежутка $x \in [0; 1]$ показаны жирными линиями на рис. 9.5.

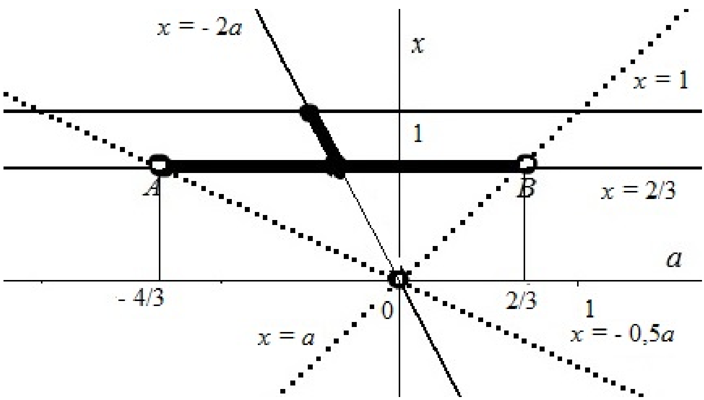


Рис. 9.5

Исходное уравнение имеет столько решений, сколько общих точек на вертикальной прямой $a = p$ и частях прямых $x = \frac{2}{3}$, $x = -2a$, выделенных жирным на рис. 9.5. Используя данный рисунок как графическую опору для рассуждений, можно установить, что уравнение (9.6) может иметь одно, два решения или не иметь решений.

Найдем контрольные значения параметра a, проходя через которые исходное уравнение меняет количество решений, кроме того, учтем, что решения должны входить в отрезок $x \in [0; 1]$. Этими контрольными значениями параметра a являются абсциссы точек A и B. Прямые $x = -0{,}5a$ и $x = \frac{2}{3}$ пересекаются в точке A (рис. 9.5), значит, $\frac{2}{3} = -0{,}5a$, $a = -\frac{4}{3}$. При $a = -\frac{4}{3}$ уравнение (9.6) на отрезке [0; 1] решений не имеет. Прямые $x = a$ и $x = \frac{2}{3}$ пересекаются в точке B, значит, $a = \frac{2}{3}$. При $a = \frac{2}{3}$ исходное уравнение не имеет решений из отрезка [0; 1].

Окончательно имеем: при $a \in \left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ уравнение (9.6) имеет хотя бы одно решение.

Переформулируем задание так.

Пример 9.5. Найти все решения уравнения из отрезка [0; 1] в зависимости от значений параметра a:

$$\sqrt{3x-2} \cdot \ln(x-a) = \sqrt{3x-2} \cdot \ln(2x+a). \qquad (9.6)$$

Решение. Ответ на поставленный в условии вопрос расширяет абитуриенту поле для исследовательской деятельности. Воспользуемся уже найденной совокупностью двух систем (9.7). Ее графическая интерпретация показана на рис. 9.5. В данный рисунок необходимо добавить недостающие точки, абсциссы которых являются контрольными значениями параметра a, проходя через которые уравнение меняет количество решений. Такими контрольными точками являются точки A, B, C, D (рис. 9.6). Абсциссы точек A, B были найдены ранее. Прямые $x = 1$ и $x = -2a$ пересекаются в точке C, значит, $-2a = 1$, $a = -0{,}5$. При $a = -0{,}5$ уравнение (9.6) имеет два решения на отрезке $x \in [0; 1]$, это: $x = -2a$ и $x = \dfrac{2}{3}$.

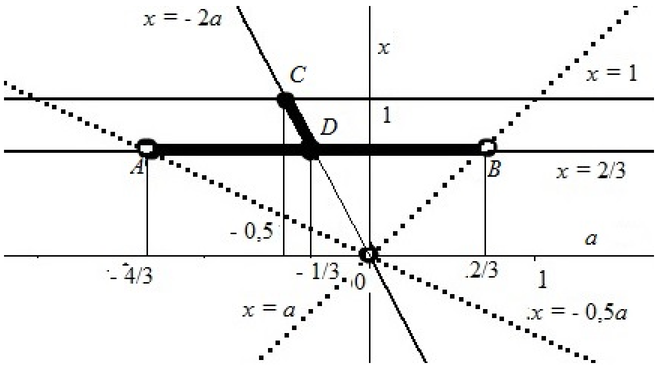


Рис. 9.6

Прямые $x = -2a$ и $x = \dfrac{2}{3}$ пересекаются в точке D, значит, $-2a = \dfrac{2}{3}$, $a = -\dfrac{1}{3}$. При $a = -\dfrac{1}{3}$ имеем единственное решение $x = \dfrac{2}{3}$.

Для удобства проиллюстрируем решения уравнения (9.6) из отрезка [0; 1] в зависимости от значений параметра a в виде таблицы:

$a<-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\left(-\frac{4}{3};-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3};\infty\right)$
Нет решения	Нет решения	1 решение	2 решение	2 решение	1 решение	2 решение	Нет решения	Нет решения
		$x=\frac{2}{3}$	$x=\frac{2}{3}$ $x=-2a$	$x=\frac{2}{3}$ $x=-2a$	$x=\frac{2}{3}$	$x=\frac{2}{3}$		

Ответ: при $a\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};\infty\right)$ уравнение не имеет решений; при $a\in\left(-\frac{4}{3};-\frac{1}{2}\right)\cup\left[-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ одно решение $x=\frac{2}{3}$; при $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$ два решения: $x=\frac{2}{3}$ и $x=-2a$.

Данный пример взят из материалов сайта «Решу ЕГЭ» [105], задание 18 № 517432.

Пример 9.6. При каком значении параметра a уравнение имеет ровно один корень на отрезке [0; 2]:

$$\ln(3a-x)\cdot\ln(2x+2a-5)=\ln(3a-x)\cdot\ln(x-a). \qquad (9.8)$$

Решение. Решим уравнение координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. В начале установим область существования уравнения

$$\begin{cases}3a-x>0,\\ x-a>0,\\ 2x+2a-5>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<3a,\\ x>a,\\ x>-a+2{,}5.\end{cases}$$

Выполним эквивалентные преобразования уравнения (9.8):

$$\ln(3a-x)\cdot(\ln(2x+2a-5)-\ln(x-a))=0.$$

Произведение равно нулю, если каждый из множителей равен нулю, при этом учтем область существования уравнения. Получим совокупность двух систем. Первая система имеет вид:

$$\begin{cases} \ln(3a-x)=0, \\ x<3a, \\ x>a, \\ x>-a+2{,}5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-x=1, \\ x<3a, \\ x>a, \\ x>-a+2{,}5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3a-1, \\ x<3a, \\ x>a, \\ x>-a+2{,}5. \end{cases}$$

Вторая система имеет вид:

$$\begin{cases} \ln(2x+2a-5)=\ln(x-a), \\ x<3a, \\ x>a, \\ x>-a+2{,}5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2a-5=x-a, \\ x<3a, \\ x>a, \\ x>-a+2{,}5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a+2{,}5, \\ x<3a, \\ x>a, \\ x>-a+2{,}5. \end{cases}$$

Построим образ исходного уравнения в координатно-параметрической плоскости aOx, где Oa – ось абсцисс, Ox – ось ординат. Прямыми $x = a$ и $x = 3a$ вся числовая плоскость разбивается на четыре частичные области. Системе неравенств $x > a$, $x < 3a$ соответствует частичная область, лежащая ниже прямой $x = 3a$ и выше прямой $x = a$. Прямая $x = –a + 2{,}5$ от уже имеющейся частичной области отрезается часть области. Системе неравенств $x > a$, $x < 3a$, $x > –a + 2{,}5$ соответствует частичная область, лежащая ниже прямой $x = 3a$, выше прямых $x = a$ и $x = –a + 2{,}5$. На этом же рисунке построим решения – прямые $x = –3a + 5$ и $x = 3a – 1$ (рис. 9.7). Так как необходимо выбрать решения уравнения (9.8) из отрезка [0; 2], то построим также и прямые $x = 0$ (ось абсцисс) и $x = 2$. Решения, входящие в отрезок [0; 2], выделены жирной линией.

Исходное уравнение имеет столько решений, сколько общих точек на вертикальной прямой $a = 0$ и частях прямых $x = –3a + 5$, $x = 3a – 1$, выделенных жирным на рис. 9.7. Используя рисунок как графическую опору для рассуждений, можно установить, что уравнение (9.8) может иметь одно или не иметь решений, входящих в отрезок [0; 2].

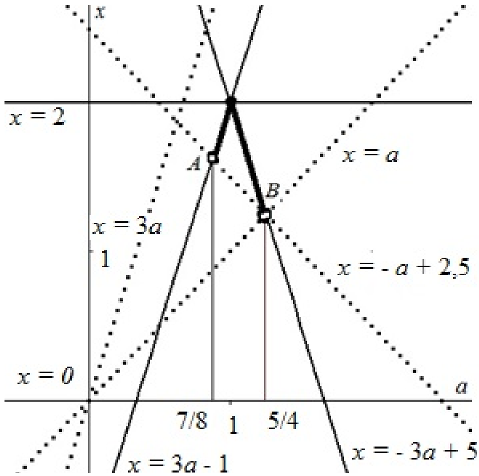


Рис. 9.7

Найдем контрольные значения параметра a, проходя через которые исходное уравнение меняет количество решений, кроме того, учтем, что решения должны входить в отрезок $x \in [0;\ 2]$. Этими контрольными значениями параметра a являются абсциссы точек A и B. Прямые $x = -a + 2{,}5$ и $x = 3a - 1$ пересекаются в точке A (рис. 9.7), значит, $3a - 1 = -a + 2{,}5$, $a = \dfrac{7}{8}$. При $a = \dfrac{7}{8}$ уравнение (9.8) на отрезке [0; 2] решений не имеет. Прямые $x = -a + 2{,}5$ и $x = a$ пересекаются в точке B (рис. 9.7), значит, $-a + 2{,}5 = a$, $a = \dfrac{5}{6}$. При $a = \dfrac{5}{4}$ уравнение (9.8) на отрезке

[0; 2] решений не имеет. Значит, при $a \in \left(\frac{7}{8}; \frac{5}{4}\right)$ уравнение (9.8) на отрезке [0; 2] имеет ровно одно решение.

Ответ: $a \in \left(\frac{7}{8}; \frac{5}{4}\right)$.

Уравнение (9.8) будет интересным для решения, если переформулировать вопрос.

Пример 9.7. Найти все решения уравнения в зависимости от значения параметра a:

$$\ln(3a - x) \cdot \ln(2x + 2a - 5) = \ln(3a - x) \cdot \ln(x - a). \qquad (9.8)$$

Решение. Используем уже имеющиеся рассуждения. Уравнение (9.8) эквивалентно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x = 3a - 1, \\ x < 3a, \\ x > a, \\ x > -a + 2{,}5, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -a + 2{,}5, \\ x < 3a, \\ x > a, \\ x > -a + 2{,}5. \end{cases}$$

Геометрическим образом совокупности являются точки прямых $x = -3a + 5$ и $x = 3a - 1$, лежащих в частичной области, задаваемой системой трех неравенств. Решения уравнения (9.8) показаны на рис. 9.8 жирными линиями. Исходное уравнение имеет столько решений, сколько общих точек на вертикальной прямой $a = p$ и частях прямых $x = -3a + 5$, $x = 3a - 1$, выделенных жирным на рис. 9.8. Используя рисунок как графическую опору для рассуждений, можно установить, что уравнение (9.8) может иметь одно, два решения или не иметь решений.

Найдем граничные значения параметра a, проходя через которые исходное уравнение меняет количество решений. Этими контрольными значениями по-прежнему являются абсциссы точек A и B, $a = \frac{7}{8}$, $a = \frac{5}{4}$ соответственно. Прямые

$x = -3a + 5$ и $x = 3a$ пересекаются в точке C, значит, $-3a + 5 = 3a$,

$a = \frac{5}{6}$. Поэтому при $a = \frac{5}{6}$ уравнение (9.8) решений не имеет.

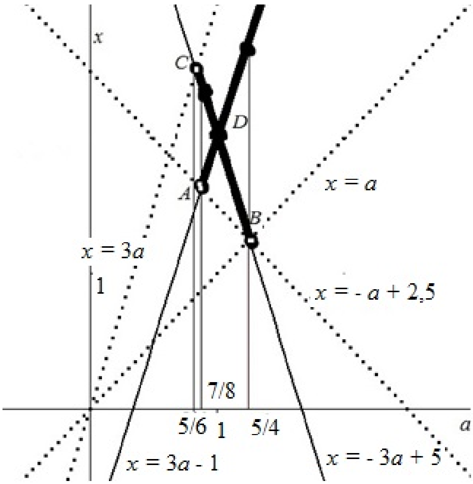


Рис. 9.8

При $a = 0{,}875$ исходное уравнение имеет единственное решение. Прямые $x = -3a + 5$ и $x = 3a - 1$ пересекаются в точке D, значит, $-3a + 5 = 3a - 1$, $a = 1$. При $a = 1$ исходное уравнение имеет единственное решение. При $a = \frac{5}{4}$ исходное уравнение также имеет единственное решение.

Ответ: если $a \in \left(-\infty; \frac{5}{6}\right]$, то решений нет; если $\left(\frac{5}{6}; \frac{7}{8}\right]$, то решение одно: $x = -3a + 5$; если $a \in \left(\frac{7}{8}; 1\right) \cup \left(1; \frac{5}{4}\right)$, то решений два: $x = -3a + 5$ и $x = 3a - 1$; если $a = 1$, то решение одно: $x = 2$; если $\left[\frac{5}{4}; \infty\right)$, то решение одно: $x = 3a - 1$.

Следующий пример взят из материалов сайта «Решу ЕГЭ» [105], задание 18 № 511110.

Пример 9.8. Найдите все значения параметра a, при которых любое число из отрезка $2 \le x \le 3$ является решением уравнения

$$\left| x-a-2 \right| + \left| x+a+3 \right| = 2a+5. \qquad (9.9)$$

Решение. Решим уравнение координатно-параметрическим методом с использованием метода сечений. Проведем эквивалентные преобразования. По определению модуля:

$$\left| x-a-2 \right| = \begin{cases} -x+a+2, \text{ если } x-a-2<0; \\ x-2-a, \text{ если } x-a-2 \ge 0. \end{cases}$$

Аналогично можно раскрыть выражение, стоящее под знаком другого модуля. В результате при раскрытии двух модулей одновременно получим четыре варианта частичных областей, на которые разбивается вся плоскость прямыми $x - a - 2 = 0$ ($x = a + 2$) и $x + a + 3 = 0$ ($x = -a - 3$).

Получим совокупность четырех смешанных систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-a-2 \le 0, \\ x+a+3 \le 0, \\ -x+a+2-x-a-3-2a-5=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-a-2 \le 0, \\ x+a+3 \ge 0, \\ -x+a+2+x+a+3-2a-5=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-a-2 \ge 0, \\ x+a+3 \le 0, \\ x-a-2-x-a-3-2a-5=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-a-2 \ge 0, \\ x+a+3 \ge 0, \\ x-a-2+x+a+3-2a-5=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le a+2, \\ x \le -a-3, \\ x=-a-3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \le a+2, \\ x \ge -a-3, \\ 0=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge a+2, \\ x \le -a-3, \\ a=-2{,}5, \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge a+2, \\ x \ge -a-3, \\ x=a+2. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (9.10)$$

В результате равносильных преобразований исходное уравнение «распалось» на совокупность систем линейных уравнений и неравенств, графики которых абитуриенты хорошо знают из школьного курса математики.

Построим геометрический образ уравнения, заданного совокупностью (9.10). На частичной области, заданной системой неравенств $x \le a+2$, $x \le -a-3$, построим прямую $x=-a-3$. Геометрическим образом верного числового тождества 0 = 0 на частичной области, заданной системой неравенств $x \le a+2$, $x \ge -a-3$, является внутренняя часть плоскости, лежащая ниже прямой $x = a + 2$ и выше прямой $x = -a - 3$. На частичной области, заданной системой неравенств $x \ge a+2$, $x \le -a-3$, построим прямую $a = -2{,}5$. На частичной области, заданной системой неравенств $x \ge a+2$, $x \ge -a-3$, построим прямую $x = a + 2$ (рис. 9.9).

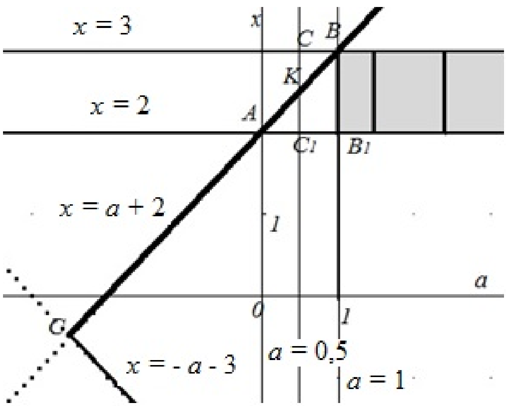


Рис. 9.9

Решением уравнения (9.9) является вся правая частичная область, заданная системой неравенств $x \le a+2$, $x \ge -a-3$, включая сами граничные прямые $x = a + 2$, $x = -a - 3$.

Чтобы выбрать все значения параметра a, при которых любое число из отрезка $2 \le x \le 3$ является решением уравнения (9.9), построим на рис. 9.9 прямые $x = 2$, $x = 3$. Решения, удовлетворяющие неравенству $2 \le x \le 3$, это отрезки вертикальных прямых $a = p$, лежащие в полосе между прямыми $x = 2$, $x = 3$. Однако если параметр принимает значения из $a \in [0; 1)$, то не все точки отрезка, например точки CC_1, входят в закрашенную полосу. Начиная со значения параметра $a = 1$ все точки вертикального отрезка входят в закрашенную полосу. Значит, при $a \ge 1$все решения уравнения входят в промежуток $2 \le x \le 3$. Других значений параметра a, при которых выполняется условие уравнения (9.9), нет.

Ответ: $a \in [1; \infty)$.

Библиографический список

1. *Амелькин В. В.* Задачи с параметрами: справочное пособие по математике / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич. – 3-е изд. – Минск: Асар, 2004. – 464 с.

2. *Апостолова Г. В.* Первые встречи с параметром / Г. В. Апостолова. – Киев: Факт, 2006. – 324 с.

3. *Балан В. Г.* Квадратный трехчлен с параметром на вступительных экзаменах / В. Г. Балан, В. И. Лавренюк, Л. И. Шарова. – Киев, 1999. – 80 с.

4. *Бестужева Л. П.* Решение и конструирование задач с параметрами / Л. П. Бестужева. – Ярославль: Яр. ГУ, 2003. – 120 с.

5. *Бондаревская Е. В.* Гуманистическая парадигма личностно-ориентированного образования / Е. В. Бондаревская // Педагогика. – 1997. – № 4. – С. 11–17.

6. *Бондаревская Е. В.* Педагогическая культура как общественная и личная ценность / Е. В. Бондаревская // Педагогика. – 1999. – № 3. – С. 37–43.

7. *Виноградова И. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий; под. общ. ред. В. А. Садовничего. – М.: Изд-во МГУ. – 1988. – 416 с.

8. *Вирченко Н. А.* Графики функций: справочник / И. А. Вирченко, И. И. Ляшко, К. И. Швецов. – Киев: Наукова думка, 1979. – 320 с.

9. *Вишенский В. О.* Задачи по математике / В. О. Вишенский, М. О. Перестюк, А. М. Самойленко. – Киев: Высш. шк., 1985. – 264 с.

10. *Высоцкий В. С.* Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ / В. С. Высоцкий. – М.: Научный мир, 2011. – 316 с.

11. *Горбачев В. И.* Технология развивающего обучения в курсе алгебры средней школы: дис. … д-ра пед. наук, 13.00.02 / В. И. Горбачев. – Брянск, 2000. – 335 с.

12. *Горнштейн П. И.* Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Киев: Евро индекс Лтд., 1995. – 336 с.

13. *Грамбовська Л. В.* Вдосконалення умінь розв’язувати лінійні рівняння з параметрами як один з аспектів професійної компетентності

вчителів математики / Л. В. Грамбовська, В. В. Сорока // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 3. – С. 43–46.

14. *Грамбовська Л. В.* Методика розв'язування лінійних рівнянь з параметром, що містять модуль / Л. В. Грамбовська // Математика в школі. – 2011. – № 9. – С. 13–17.

15. *Грамбовська Л. В.* Розв'язування лінійних рівнянь з параметрами різними способами / Л. В. Грамбовська // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 2. – С. 23–29.

16. *Гусев В. А.* Психолого-педагогические основы обучения математике / В. А. Гусев. – М.: Вербум-М, 2003. – 432 с.

17. *Давыдов В. В.* Виды обобщения в обучении: Логико-психологические проблемы построения учебных предметов / В. В. Давыдов. – 2-е изд. – М.: Педагогическое общество России, 2000. – 480 с.

18. *Давыдов В. В.* Проблемы развивающего обучения: опыт теоретического и экспериментального психологического исследования / В. В. Давыдов. – М.: Педагогика, 1986. – 239 с.

19. *Давыдов В. В.* Теория развивающего обучения / В. В. Давыдов. – М.: Интор, 1996. – 544 с.

20. *Дорофеев Г. В.* Пособие по математике для поступающих в вузы: учеб. пособие / Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. – М.: Наука, 1976. – 638 с.

21. *Дорофеев Г. В.* Решение задач, содержащих параметры. Ч. 2 / Г. В. Дорофеев, В. В. Затакавай. – М.: Перспектива, 1990. – 38 с.

22. *Дорофеев Г. В.* Гуманитарно-ориентированный курс – основа учебного предмета «Математика» в общеобразовательной школе / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. – 1997. – № 4. – С. 59–67.

23. *Дорофеев Г. В.* Математика для каждого / Г. В. Дорофеев. – М.: Аякс, 1999. – 292 с.

24. *Дорофеев Г. В.* Непрерывный курс математики в школе и преемственность обучения / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. – 1998. – № 5. – С. 70–76.

25. ЕГЭ. Математика: Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под. ред. И. В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2015. – 272 с.

26. ЕГЭ. Математика: Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под. ред. И. В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2018. – 256 с.

27. ЕГЭ. Математика: Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов; под. ред. И. В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2019. – 256 с.

28. *Елисеев О. П.* Практикум по психологии личности / О. П. Елисеев. – СПб.: Питер, 2005. – 509 с.

29. Загальна психологія: підручник / С. Д. Максименко, В. О. Зайчук, В. В. Клименко та ін. – Вінниця: Нова книга, 2004. – 704 с.

30. Задачи вступительных экзаменов по математике / под общ. ред. Е. А. Григорьева. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – 116 с.

31. *Заслонкина Л. С.* Задачи с параметрами / Л. С. Заслонкина. – Харьков: Основа, 2012. – 108 с.

32. *Зимняя И. А.* Педагогическая психология: учебное пособие / И. А. Зимняя. – 2-е изд. – М.: Логос, 2005. – 384 с.

33. *Козко А. И.* Задачи с параметрами и другие сложные задачи / А. И. Козко, В. Г. Чирский. – М.: МЦНМО, 2007. – 96 с.

34. *Колесникова С. И.* Задачи с параметрами. ЕГЭ. Математика / С. И. Колесникова. – 2-е изд., стер. – М.: Азбука-2000, 2019. – 112 с.

35. Компетентностный подход в педагогическом образовании: коллективная монография / под ред. А. В. Козырева, Н. Ф. Радионовой, А. П. Тряпицыной. – СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2005. – 392 с.

36. *Коннова Е. Г.* Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА. Задания с параметром. Теория, методика, упражнения и задачи; под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – 2-е изд. – Ростов-на-Дону: Легион, 2014. – 112 с.

37. *Крайг Г.* Психология развития / Г. Крайг; пер. с англ. – СПб.: Питер, 2000. – 992 с.

38. *Леднёв В. С.* Содержание образования: сущность, структура, перспективы / В. С. Леднёв. – М.: Высш. шк., 1991. – 224 с.

39. *Леонтьев А. Н.* Деятельность, сознание, личность / А. Н. Леонтьев. – М.: Политиздат, 1977. – 304 с.

40. *Локоть В. В.* Задачи с параметрами. Линейные и квадратные уравнения, неравенства, системы: учеб. пособие / В. В. Локоть. – М.: АРКТИ, 2005. – 96 с.

41. *Мерзляк А. Г.* Алгебра: 8 класс: самостоятельные и контрольные работы: пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович и др. – М.: Вентана-Граф, 2018. – 112 с.

42. *Мерзляк А. Г.* Алгебра: 8 класс: учебник / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков. – М.: Вентана-Граф, 2014. – 384 с.

43. *Мерзляк А. Г.* Алгебра: 9 класс: учебник / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков. – М.: Вентана-Граф, 2018. – 368 с.

44. *Мерзляк А. Г.* Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2010. – 352 с.

45. *Мерзляк А. Г.* Математика. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень: 11 класс: учеб. пособие / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков; под. ред. В. Е. Подольского. – М.: Вентана-Граф, 2019. – 412 с.

46. Методика и технология обучения математике: курс лекций / Н. Л. Стефанова, Н. С. Подходова, В. В. Орлов [и др.]; под ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.

47. Методика обучения геометрии: учеб. пособие / В. А. Гусев, В. В. Орлов, В. А. Панчишина [и др.]; под ред. В. А. Гусева. – М.: Академия, 2004. – 368 с.

48. *Мирошин В. В.* Формирование содержательно-методической линии задач с параметрами в курсе математики общеобразовательной школы: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / В. В. Мирошин. – М., 2008. – 223 с.

49. *Моденов В. П.* Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод: учеб. пособие / В. П. Моденов. – М.: Экзамен, 2007. – 285 с.

50. *Моденов В. П.* Математика: пособие для поступающих в вузы / В. П. Моденов. – М.: Новая Волна, 2002. – 800 с.

51. *Натяганов В. Л.* Методы решения задач с параметрами: учеб. пособие / В. Л. Натяганов, Л. М. Лужина. – М.: МГУ, 2003. – 368 с.

52. *Нелин Е. П.* Алгебра. 11 класс: учебник / Е. П. Нелин, О. Е. Долгова. – Харьков: Гимназия, 2011. – 448 с.

53. *Никольский С. М.* Алгебра: учебник / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 2006. – 285 с.

54. *Никольский С. М.* Алгебра: учебник / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2018. – 303 с.

55. *Никольский С. М.* Алгебра: учебник / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2018. – 335 с.

56. *Никольский С. М.* Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – 10-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 464 с.

57. *Никольский С. М.* Математика: алгебра и начала математического анализа: учебник / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 431 с.

58. *Новик И. А.* Методы решения стандартных и нестандартных задач, содержащих знак модуля (с использованием программного обеспечения): учеб.-метод. пособие / И. А. Новик, Н. В. Бровка, О. В. Хайновская. – Минск: Ольден, 2006. – 108 с.

59. *Ньюкомб Н.* Развитие личности ребенка / Н. Ньюкомб; пер. с англ. – 8-е изд. – СПб.: Питер, 2003. – 640 с.

60. *Орлов В. В.* Построение основного курса геометрии общеобразовательной школы в концепции личностно-ориентированного обучения: дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 / В. В. Орлов. – СПб., 2000. – 384 с.

61. *Первин Л.* Психология личности: теория и исследования / Л. Первин, О. Джон; пер. с анг. М. С. Жамкочан; под ред. В. С. Магуна. – М.: Аспект пресс, 2000. – 607 с.

62. *Петровский В. А.* Личность в психологии: парадигма субъективности / В. А. Петровский. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1996. – 512 с.

63. *Плигин А. А.* Личностно-ориентированное образование: история и практика: монография / А. А. Плигин. – М.: КСП+, 2003. – 435 с.

64. *Подмазин С. И.* Личностно-ориентированное образование: социально-философское исследование / С. И. Подмазин. – Запорожье: Просвита, 2000. – 250 с.

65. *Подходова Н. С.* К проблеме личностно-ориентированного обучения геометрии / Н. С. Подходова // Математика в школе. – 2000. – № 10. – С. 54–58.

66. *Подходова Н. С.* Теоретические основы построения курса геометрии 1–6 классов: дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 / Н. С. Подходова. – М., 1999. – 384 с.

67. *Потапов М. К.* Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 10 класс: учеб. пособие / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. – 11-е изд. – М.: Просвещение, 2018. – 159 с.

68. *Потапов М. К.* Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 11 класс: учеб. пособие / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. – 10-е изд. – М.: Просвещение, 2018. 189 с.

69. *Потапов М. К.* Алгебра. Дидактические материалы. 7 класс: учеб. пособие / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. – 12-е изд. – М.: Просвещение, 2018. – 96 с.

70. *Потапов М. К.* Алгебра. Дидактические материалы. 8 класс: учеб. пособие / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. – 11-е изд. – М.: Просвещение, 2018. – 111 с.

71. *Потапов М. К.* Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс: учеб. пособие / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 127 с.

72. *Потапов М. К.* Готовимся к экзаменам по математике: учеб. пособие / М. К. Потапов, С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко. – М.: НТЦ «Университетский»: АСТ_Пресс, 1997. – 352 с.

73. *Прус А. В.* Задачи с параметрами в школьном курсе математики: учеб.-метод. сборник / А. В. Прус, В. А. Швец. – Житомир: Рута, 2016. – 468 с.

74. Психология развития: учебник / Т. М. Марютина, Т. Г. Стефаненко [и др.]; под ред. Т. Д. Марцинковской. – М.: Академия, 2001. – 352 с.

75. *Реан А. А.* Психология и педагогика / А. А. Реан, Н. В. Бордовская, С. И. Розум; под общей ред. А. А. Реана. – СПб.: Питер, 2003. – 432 с.

76. *Репета В. К.* Задачи с параметрами. Решения, рекомендации, примеры: учеб. пособие / В. К. Репета, Н. О. Клешня [и др.]. – Тернополь: Учебники и пособия, 2002. – 260 с.

77. *Родионов Е. М.* Справочник по математике для поступающих в вузы. Решение задач с параметрами / Е. М. Родионов. – М.: Аспект, 1992. – 144 с.

78. *Рубинштейн С. Л.* Основы общей психологии / С. Л. Рубинштейн. – СПб.: Питер, 2000. – 720 с.

79. *Садовничий Ю. В.* ЕГЭ 2018. 100 баллов. Математика / Ю. В. Садовничий. – М.: УЧПЕДГИЗ, 2018. – 126 с.

80. *Сарана О. А.* Конкурсные задачи по математике: учеб. пособие / О. А. Сарана, В. В. Ясинский. – Киев: НТУУ «КПИ», 2005. – 260 с.

81. *Севрюков П. Ф.* Школа решения задач с параметрами: учеб.-метод. пособие / П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков. – М.: Илекса; Народное образование, 2009. – 212 с.

82. *Селевко Г. К.* Современные образовательные технологии: учеб. пособие / Г. К. Селевко. – М.: Народное образование, 1998. – 252 с.

83. *Селевко Г. К.* Социально-воспитательные технологи / Г. К. Селевко, А. Г. Селевко. – М.: Народное образование, Школьные технологии, 2002. – 176 с.

84. *Сергеев И. Н.* ЕГЭ: Математика. 1000 задач с ответами и решениями. Все задания части 2 / И. Н. Сергеев, В. С. Панферов. – М.: Экзамен, 2018. – 334 с.

85. *Сериков В. В.* Личностный подход в образовании: концепция и технологии / В. В. Сериков. – Волгоград: Перемена, 1994. – 152 с.

86. *Толпекина Н. В.* Методика организации учебных исследований при обучении учащихся решению уравнений, неравенств и их систем с параметрами: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Н. В. Толпекина. – М., 2003. – 185 с.

87. *Фельдман Я. С.* Математика. Решение задач с модулями: пособие для абитуриентов и старшеклассников / Я. С. Фельдман, А. Я. Жаржевский. – СПб.: Оракул, 1997. – 304 с.

88. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – Изд. 5-е, стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1962. – 607 с.

89. *Холодная М. А.* Когнитивные стили. О природе индивидуального ума: монография / М. А. Холодная. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2004. – 384 с.

90. *Холодная М. А.* Психология интеллекта: парадоксы исследования / М. А. Холодная. – М.: Барс, 1997. – 392 с.

91. *Хон Р. Л.* Педагогическая психология. Принципы обучения; пер. с англ. / Р. Л. Хон. – М.: Деловая книга, 2002. – 736 с.

92. *Хуторской А. В.* Методика личностно-ориентированного обучения. Как обучать всех по-разному: пособие для учителя / А. В. Хуторской. – М.: Владос-пресс, 2005. – 383 с.

93. *Хуторской А. В.* Современная дидактика: учеб. пособие / А. В. Хуторской. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 2007. – 639 с.

94. *Хьелл Л.* Теории личности: основные положения, исследования и применение / Л. Хьелл, Д. Зиглер; пер. с англ. – 3-е изд. – СПб.: Питер, 2005. – 607 с.

95. *Шахмейстер А. Х.* Уравнения и неравенства с параметрами: пособие для школьников, абитуриентов, учителей / А. Х. Шахмейстер; под общ. ред. Б. Г. Зива. – СПб.: Петроглиф, 2010. – 304 с.

96. *Шестаков С. А.* Уравнения с параметром / С. А. Шестаков, Е. В. Юрченко. – М.: СЛОГ, 1993. – 108 с.

97. *Эльконин Д. Б.* Избранные психологические труды / Д. Б. Эльконин. – М.: Педагогика, 1989. – 555 с.

98. *Эльконин Б. Д.* Введение в психологию развития / Б. Д. Эльконин. – М.: Тривола, 1994. – 168 с.

99. *Эльконин Д. Б.* К проблеме периодизации психического развития в детском возрасте / Д. Б. Эльконин // Вопросы психологии. – 1971. – № 4. – С. 3–8.

100. *Якиманская И. С.* Личностно-ориентированное обучение в современной школе / И. С. Якиманская. – М.: Сентябрь, 2000. – 112 с.

101. *Якиманская И. С.* Психолого-педагогические основы математического образования: учеб. пособие / И. С. Якиманская. – М.: Академия, 2004. – 320 с.

102. *Якиманская И. С.* Технология личностно-ориентированного образования / И. С. Якиманская. – М.: Сентябрь, 2000. – 176 с.

103. *Ясинский В. В.* Математика: учеб.-метод. пособие / В. В. Ясинский. – Киев: НТТУ «КПИ», 2007. – 368 с.

104. *Ястребинецкий Г. А.* Задачи с параметрами / Г. А. Ястребинецкий. – М.: Просвещение, 1986. – 128 с.

105. Каталог заданий. Комбинация «кривых» // Сдам ГИА: решу ЕГЭ: образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильного уровня. – URL: https://ege.sdamgia.ru/test?filter=all&category_id=274 (дата обращения: 20.08.2019).

Оглавление

Научное издание

Грамбовская Лариса Владимировна

ПОДГОТОВКА АБИТУРИЕНТОВ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ В КОНТЕКСТЕ ЛИЧНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ

Монография

Редактор *Т. В. Середова*
Корректор *Е. Н. Апринцева*
Компьютерная верстка *М. В. Смирновой*

Подписано к печати 10.11.2021. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 15,23. Тираж 500 экз. Заказ 122. «С» 62.
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4.
Отпечатано на МФУ. 198095, Санкт-Петербург, ул. Розенштейна, д. 32, лит. А.

ДЛЯ ЗАПИСЕЙ