Формирование топологических понятий в лекциях Вейерштрасса 1886 года.

УДК 512 (091)

Синкевич Г.И., СПбГАСУ.

Опубликовано: Синкевич Г.И. Формирование топологических понятий в лекциях Вейерштрасса 1886 года / Г.И. Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск 19. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера / СПбГАСУ. – СПб. – 2013. – С. 4 – 23.

Понятие связности ввёл Листинг в 1847 году, развивали его Риман, Жордан, Пуанкаре. Понятие и строгое определение метрического и топологического пространства формируется в работах Фреше 1906 года и Хаусдорфа 1914 года. Понятие континуума корнями уходит в античность, но его математическое определение формировалось в XIX веке в работах Кантора, Дедекинда, позже Хаусдорфа и Рисса.

Карл Вейерштрасс (1815-1897) привёл математический анализ к строгой форме, при этом в его рассуждениях формировались понятия математики будущего – функционального анализа и топологии.

Работы Вейерштрасса на русский язык не переводились, а его лекции не издавались даже в Германии. В 1989 году были опубликованы конспекты его лекций по дополнительным главам теории функций, материал которых и послужил основой данной статьи.

Топология ведёт свою историю с задачи о Кёнигсбергских мостах, поставленной и решённой Л.Эйлером в 1736 году [1].

Первая работа, в которой топология получает своё название, была написана Листингом в 1848 году [2]. И.Б. Листинг (1808-1882) был профессором Геттингенского университета, где преподавал Гаусс и где учился Риман. Как и Риман, Листинг уделяет основное внимание комбинаторным свойствам преобразований и ещё не мыслит область как точечное множество. В 1862 году Листинг продолжил комбинаторную топологическую тему в работе «Описание пространственного многообразия или обобщение теоремы Эйлера о многограннике»[3]. Это был ранний период развития топологии, ещё до появления работ Г. Кантора (1845-1918) по теории множеств.

Понятие связности впервые появляется у Б. Римана (1826-1866) в диссертации «Основания теории функций комплексной переменной» (1851 год), в докладе «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854 год) и в «Теории абелевых функций» (1857 год). Риман рассматривал пространство в реально-физическом смысле, а не как точечное множество; поверхность рассматривал как лист, разостланный по плоскости или над плоскостью [4, с. 52]; односвязной называл «кусок» поверхности, ограниченный замкнутой несамопересекающейся кривой. В «Основах общей теории функций одной комплексной переменной» 1851 года Риман писал: «Две части поверхности считаем связными, если из точки одной части в точку другой части можно провести кривую, принадлежащую поверхности; в противном случае две части поверхности называются несвязными или отдельно расположенными»[4, С. 54].

Понятие связности в работах Георга Кантора.

Топология получила новое направление с появлением теории множеств Кантора в период с 1872-1884 годов. Кантор начинал с анализа сходимости тригонометрических рядов и анализа точек на прямой, и в первых своих работах создал теорию точечных областей. Он ввёл понятие действительного числа на основании фундаментальной последовательности, развил понятие предельной точки, данное Вейерштрассом в 1865 году, на её основе создал понятие производного множества, а также и равномерной сходимости[1]. Затем он построил иерархию бесконечных множеств, что привело его к трансфинитным числам. Кантора интересовала природа континуума и многие его исследования приводили к топологическим результатам, например, вопрос о возможности взаимно-однозначного отображения двумерного континуума на область действительных чисел (1878 год). В период с 1879 по 1884 год Кантор опубликовал цикл из шести статей «О бесконечных линейных точечных многообразиях»[5, С. 40-139], в которых содержатся основные его результаты по теории множеств. Кантор

[1] Одновременно с Э.Гейне, который уступал приоритет Кантору.

определил множества первого рода, у которых n-е производное множество пусто, и все остальные - множества второго рода. Ввёл понятие плотности в интервале и показал, что множества первого рода нигде не плотны в интервале, показал счётность множеств первого рода и некоторых второго рода. Ввёл понятие изолированного множества, как не содержащего своих предельных точек, и доказал счётность изолированных множеств в R^n. В пятой работе Кантор ввёл трансфинитные порядковые числа и сформулировал гипотезу континуума, а также рассмотрел вопрос, о том, когда подмножество из R^n может быть названо «континуумом». Для этого он определил понятие совершенного[2] множества и связного точечного множества. Совершенное множество по определению совпадает со своим производным. Множество T по определению связно, если t и t' из T для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число точек $t_1, t_2, ... t_n$ из T, что все расстояния $tt_1, t_1t_2, t_2t_3, ..., t_{n-1}t_n, t_nt'$ не превосходят ε. Подмножество R^n определёно как континуум, если оно совершенно и связно.

В восьмидесятые годы XIX века в работах немецких математиков по математическому анализу появилось много новых результатов и понятий, которые нужно было привести к строгому единообразию. Как пишет Кетсиер, «Коши создал новый концептуальный аппарат, чтобы дать прочную основу существовавшего анализа, и в его математике функция всегда останется связана с формулой. Во второй половине XIX века концептуальный аппарат сам стал объектом исследования. Это произошло с обобщением понятия функции: она стала произвольным соответствием между числами»[6, С. 3]. В то же время теория действительного числа ещё была недостаточно развита – хотя имелись различные определения иррационального числа, но не было известно, как много иррациональных чисел по

[2] Совершенным Кантор назвал множество, содержащее все свои предельные точки.

сравнению с рациональными числами[3], есть ли ещё другие, неопределяемые с помощью последовательностей числа, а главное, - как распределены иррациональные числа на числовой прямой. Теорема о равномерной непрерывности была сформулирована для функции, заключённой между двумя рациональными пределами. Вейерштрасс отдавал себе отчёт, что построение действительных чисел происходит умозрительно, «в мире наших мыслей», и стремился согласовать арифметическое понимание числа и общее понимание величины как результата измерения геометрического или физического объекта. Наряду с увеличением значения понятия иррациональных чисел росла и критика расширения понятия действительного числа. Коллега Вейерштрасса по Берлинскому университету Л. Кронекер (1823-1891) резко выступал против теорий Вейерштрасса и Кантора, утверждая, что все числа должны быть выражаемы через натуральные и их отношения. Его резкие выступления как в публикациях, так и в коллегиальном кругу, и даже в лекциях для студентов, были направлены на необоснованность теории функций Вейерштрасса [7, с. 327]. Клейн рассказывает о переживаниях Вейерштрасса по поводу нападок Кронекера, изложенных в письме Вейерштрасса к С. Ковалевской 24 марта 1885 года. Видимо, желание защититься и продемонстрировать обоснованность теории функций в свете нового понимания действительного числа и вызвали у Вейерштрасса намерение прочитать дополнительный курс лекций, посвящённый основаниям анализа. Он осуществил это в 1886 году.

О лекциях Вейерштрасса 1886 года.

Карл Вейерштрасс (1815-1897) читал лекции в Берлинском Торговом институте и Берлинском университете с 1856 года. Он систематизировал курс математического анализа, ввёл понятие непрерывной функции на языке "$\varepsilon - \delta$"; многое сделал в теории

---

[3] Это показал Кантор в работах 1874-1878 годов.

действительного числа. Благодаря ему математический анализ приобрёл строго обоснованную форму. Он стремился упорядочить новые открытия, совершённые в семидесятые годы Шарлем Мере [8][4], Эдвардом Гейне [9][5], Рихардом Дедекиндом и Георгом Кантором [10], стремясь изложить их классическим языком и согласовав с традиционным представлением о числе как об отношении величин.

Именно для этого в летнем семестре 1886 года он читает специальный дополнительный курс, посвящённый базовым понятиям математического анализа. Лекции проходили три раза в неделю в мае-июне. Конспект этих лекций, сделанный его студентами, был издан относительно недавно, в 1989 году [11]:

Вейерштрасс начинает курс словами: «Эти лекции составлены таким образом, чтобы дополнить лекции по теории аналитических функций зимнего семестра 1884/85. Та цель, которая имелась в виду, была достигнута, но более синтетическим методом, и некоторые результаты не получили желаемого обобщения, качество доказательств не было в полной мере удовлетворительным. Таким образом, представляется полезным после этих лекций рассказать о различных методах, лежащих в основании теории функций, проследить их исторически и критически, чтобы продемонстрировать различные точки зрения и попытаться их примирить. Короче говоря, показать тенденцию исторического развития математической науки, особенно в области анализа, и таким образом объяснить основные понятия науки. Нашей целью будет показать, что принципы математической науки основаны на действительно прочном фундаменте». [Вейерштрасс, с. 20].

Для обоснования представимости функции Вейерштрасс использовал понятие действительного числа, включавшее его

---

[4]Синкевич Г.И. Развитие понятия непрерывности у Шарля Мере // Труды X Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: Издательство ЯГПУ – 2012 г. – С. 180–185.

[5] Гейне Эдвард Генрих. Лекции по теории функций. Перевод и примечания Г.И.Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск 18. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера / СПбГАСУ. – СПб. – 2012. – С. 26 – 46.

собственное учение о числе как об агрегате (обозримой совокупности), то есть конечной или бесконечной десятичной (или иной) записи, которая в бесконечном случае есть абсолютно сходящийся ряд, отвечающем отношению равенства (эквивалентности для бесконечных представлений) и порядка.

Как и Дедекинд, Вейерштрасс разделяет физическую реальность и «мир наших мыслей», в котором формируется идея числа для описания чисел и функций, следовательно, можно расширить множество чисел с помощью предельного перехода. Отсюда следует, что любые длины могут быть представлены числами, но не всякому числу соответствует длина.

Для него конечны все величины, выраженные через пропорции (отношения), бесконечная числовая величина называется определённой, если задан каждый элемент составляющего её сходящегося ряда[6]. Каждому из слагаемых вполне упорядоченного ряда соответствует определённая точка, но только в случае абсолютной сходимости ряда[7]. Условием этого является равномерная сходимость. Тогда при любой перестановке членов ряда пределом будет являться одна и та же числовая величина, расширяющая понятие числа.

Вейерштрасс вводит понятие переменной величины, связывая с ним понятие предельной точки[8], и следуя Кантору, определяет иррациональное число как предельную точку рациональных чисел. Он приводит пример: «число *e*, состоящее из элементов $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, ..., \frac{1}{n!}, ...$, это хорошо определённый ряд, который определяет конкретную числовую величину, тем не менее можно показать, что не существует рациональной числовой величины, которая равна ей

[6] О сходимости ряда как о критерии существования числа говорил и Кантор в 1883 году

[7] Здесь Вейерштрасс критикует определение иррационального числа, данное Коши в 1821 году, как предела последовательности рациональных чисел.

[8] Понятие предельной точки, введённое Кантором в 1872 году, сразу же стало популярным у математиков, например, Г. Шварц написал о нём Улиссу Дини, который использовал его в своём курсе анализа [12].

по определению, что показывает, что числовая область рациональных чисел не полна[9]»[Вейерштрасс, с. 58].

Вейерштрасс обращается к теореме Больцано о точной верхней границе переменной величины[10], но подвергает сомнению, всякая ли числовая величина соответствует точке[11]. Для него вся совокупность положительных числовых величин шире, нежели вся совокупность всех возможных отрезков от *A* в направлении *AB*. Если числовая величина определена, то есть выражена абсолютно сходящимся рядом, ей несомненно соответствует геометрический отрезок, например, в десятичной системе в виде $a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots$, где $0\le a_k<10$, когда $k\ge1$, может представлять на отрезке любую числовую величину, которая возникает в вышеприведённом выражении ряда как первая, вторая [частичная сумма] и так далее. Прерывая выделение элементов, мы определим таким образом бесконечно много числовых величин, в окрестности которых сгущено бесконечно много определённых точек, и без определённых точек можно образовать непрерывную последовательность. Таким образом, можно определить положение точки *D*, разделяющей отрезок на два непрерывных отрезка «так, чтобы оно как-то согласовывалось с нашим врождённым, естественным понятием предела, после чего мы можем представить себе, что прямая не ограничена ничем, кроме точек, так что можно предположить, что *D* представляет собой определённую величину».

Сечения и их распространение на плоские и многомерные области. Окрестность.

---

[9] Иррациональность числа *e* была доказана в конце XVIII века (1776 год) И. Ламбертом, а его трансцендентность в 1873 году Ш. Эрмитом.

[10] В 1817 году Больцано формулировал эту теорему так: «Если свойство *M* не принадлежит *всем* значениям переменной величины *x*, однако, если оно принадлежит *всем* тем, которые *меньше*, чем известное *u*, то всегда существует величина *U*, являющаяся наибольшей из тех, о которых можно утверждать, что все *x*, меньшие, чем она, обладают свойством *M*»[13, с. 192].

[11] Кантор постулировал это как аксиому.

Таким образом, должна быть одна и только одна точка отделения двух отрезков друг от друга, и этой точкой является рассматриваемая числовая величина. Определив сечение на отрезке как точную верхнюю границу частичных сумм сходящегося ряда, Вейерштрасс переходит к определению окрестности и границы в пространстве точек $(x_1, x_2, ..., x_n)$, определив точку *n*-кратного многообразия как $(a_1, a_2, ..., a_n)$:

«Предположим, что в *n*-кратном точечном многообразии, определённым произвольным образом, однако так, что этому определению отвечает бесконечно много точек, имеется по крайней мере одна точка, в непосредственной окрестности которой сосредоточено бесконечно много определённых точек. Назовём совокупность всех точек, образованных, когда x_1 может принимать все значения от $a_1 - d$ до $a_1 + d$, x_2 может принимать все значения от $a_2 - d$ до $a_2 + d$ и так далее, и мы полагаем, что таким образом можно сформировать все возможные числовые комбинации *n* величин окрестности точки $(a_1, a_2, ..., a_n)$, таким образом, мы утверждаем, что если *d* является сколь угодно малым, то в каждой сколь угодно малой окрестности по крайней мере одной точки существует бесконечно много точек, удовлетворяющих определению.

Теперь есть возможность определить окрестность точки $(a_1, ..., a_n)$ в области *n*-кратного многообразия действительных переменных через неравенства $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2} \le d$, таким образом для *n*-кратного комплексного многообразия величин вида $x_k = \xi_k + \eta_k\, i,\ k = 1, 2, ..., n$ будет $\sqrt{\sum_1^n (\xi_k - a_k)^2 + \sum_1^n (\eta_k - b_k)^2} \le d.$

Величина *d* называется радиусом окрестности рассматриваемой точки $(a_1, ..., a_n)$, это выражение для пространства переносится на произвольные *n*-кратные многообразия.

Теперь возможны два подхода: либо мы относим к определённым такую точку, в каждой окрестности которой находится бесконечно много определённых точек, либо нет. В последнем случае будем называть её граничной (предельной, Grenzstelle) точкой».

Определение континуума.

Вейерштрасс определяет континуум в n-кратном многообразии. Сначала он рассматривает функцию двух независимых переменных, областью определения которой является часть плоскости с некоторыми исключёнными точками. Переход от одной неисключённой точки к другой такой же возможен непрерывным связным путём. Всегда можно выделить такую часть плоскости, которая соединяет первую точку со второй. Это возможно с помощью последовательности кругов, таких, что центр следующего круга лежит внутри предыдущего круга, а радиусы выбраны так, что все исключённые точки останутся снаружи. Если же количество исключённых точек бесконечно велико, нет необходимости строить линию. Например, исключённые точки лежат на окружности таким образом, что u' в каком-либо направлении из произвольной начальной точки проецируется на дугу, и этот круг имеет единичный радиус, для $u'=2\xi\pi$, где ξ пробегает все рациональные значения от 0 до 1, тем самым устраняется определённая часть плоскости без точек, непрерывно расположенных на линии. Внутри круга не содержится исключённых точек, возьмём какую-нибудь точку в качестве центра круга, все точки которого должны быть определены; можно убедиться, что его радиус не превышает определённого предела; вновь возьмём в круге новую точку и очертим вокруг неё круг, так же как вокруг первой точки. Можно сделать вывод, что если неограниченно продолжать эту процедуру, мы никогда не выйдем из внутренней области, через исключённые точки, ограничивающие круг, за пределы круга, подобно тому, как аналогично рассуждая, точка извне никогда не сможет попасть в круг. Таким образом, мы видим, что для разложения двукратного многообразия на части совсем не нужно выбирать непрерывную последовательность точек. Как мы видим из примера, даже априорно невозможно определить виды разложения плоскости на части.

Теперь перейдём к рассмотрению n-кратного многообразия; мы можем определить его как множество определённых точек, и поговорим об основной теореме, подробное обоснование которой у нас было для случая простого многообразия. Точечное множество называется <u>замкнутым</u>, если любая окрестность каждой из его определённых точек содержит бесконечно много определённых точек. Если мы определим, например, все точки круговой области, то каждая точка окружности определена и одновременно является граничной, в то время как за пределами круговой области не найдётся ни одной точки, про которую можно сказать, что в любой её малой окрестности находятся определённые точки. Теперь любое точечное множество P мы можем сделать замкнутым, причислив к нему его предельные точки P'. Полагая, что точка не принадлежит ни к P, ни к P', мы можем в любом случае описать вокруг неё круг конечного радиуса, не содержащий P, в противном случае он содержал бы P'. Но он также не может содержать и P', потому что, по определению, в P' содержится бесконечно много точек P.

С помощью такого замкнутого точечного множества мы сейчас или выделим из n-кратного многообразия <u>один</u> континуум, <u>или</u> <u>несколько,</u> находящихся на расстоянии друг от друга. Пусть дана точка A, не принадлежащая множеству точек, мы можем окружить её окрестностью такого радиуса ρ, что в неё не попадут определённые (definierten) точки; ρ является переменной величиной, имеющей верхнюю границу в том смысле, что принимает любые меньшие значения. <u>Абсолютной</u> <u>окрестностью</u> A

будет такая, чей радиус ρ_0 и является этим верхним пределом. Отправляясь из точки *A*, построим последовательность точек $A_1, A_2, ..., A_n$ таким образом, что каждая последующая содержится в окрестности предыдущей. Далее возможны два случая: либо мы приходим из *A* в любую точку, не принадлежащую точечному множеству P, либо нет. В первом случае все те точки, которые не входили в точечное множество P, образуют континуум, во втором случае в силу нашего предположения точка *A* всего лишь определяет оставшуюся после исключения P часть *n*-кратного многообразия. Выберем теперь в оставшейся части *n*-кратного многообразия точку *B*, так чтобы благодаря ей вновь определить в нём новый континуум. Таким образом мы видим, что в силу определения точечного множества *n*-кратное многообразие может быть разделено на бесконечно много частей.

Связность континуума.

Теперь возникает вопрос, будут ли две точки, изначально принадлежащие одному и тому же определённому континууму, всегда приводить к этому континууму или нет. Чтобы ответить на этот вопрос, представим, что между *A* и *B* находится последовательность таких точек, что мы можем перейти по ним из *A* в *B*, причём каждая следующая точка находится в окрестности предыдущей. Тогда сразу получается, что из *A* можно достичь всех точек, в которые мы можем попасть из *B*, потому что мы просто после *B* сможем попасть в *A*. Не совсем ясно, как из *B* мы сможем достичь всех точек, достижимых из *A*. Чтобы показать это, нужно доказать, что из *B* можно вернуться в *A*, а именно, что можно выйдя из *B* к *A*, можно пройти через все точки, достижимые из *A*. Для того, чтобы доказать это, соединим *A* и *B* последовательностью точек, которые смогут обеспечить переход от *A* к *B*. Соединим эти точки ломаной линией; то есть $A_{n-1}\,A_n$ полностью в окрестности A_{n-1} и так далее. Пусть эта линия проходит через точку так, чтобы каждому положению соответствовал абсолютный радиус окрестности ρ, являющийся переменной величиной и имеющий нижний предел, не равный нулю; и если мы применим принцип классификации, который мы использовали в доказательстве основной теоремы, то прежде всего мы получим, что нужно попасть в одно или несколько **конкретных** мест, для которых фактически достигается нижняя граница. Но во всякой ли точке ломаной линии ρ имеет конечное значение, потому что иначе упомянутое место (точка) является предельной точкой для *A*, то есть принадлежит точечному множеству P, так что можно использовать его как любое продолжение континуума.

Мы хотим представить другое доказательство, которое основано на следующем предложении. Если две точки *A* и *B* находятся на расстоянии δ, и ρ это радиус окрестности *A*, тогда между $\rho-\delta$ и $\rho+\delta$ существует радиус ρ' окрестности *B*. Теперь можно выбрать ρ настолько малым, чтобы разность между $\rho-\delta$ и $\rho+\delta$ была сколь угодно мала. Пусть точка пробегает отрезок от A_1 до A_n, тогда соответствующее значение ρ достигнет своей наименьшей величины, не равной нулю, как мы оговаривали выше. Пусть точка пробегает отрезок в обратном направлении $A_n, A_{n-1}, ..., A_1$, выберем расстояние $A_{\nu-1}\,A_\nu$ настолько малым, чтобы как A_ν лежало в окрестности $A_{\nu-1}$, так и $A_{\nu-1}$ лежало в окрестности A_ν, что получится, если $A_{\nu-1}\,A_\nu < \frac{1}{2}\rho$; это тот самый радиус окрестности A_ν, о котором мы говорили, что он $> \frac{1}{2}\rho$, $A_{\nu-1}$ таким образом попадает в окружность, описанную вокруг A_ν. Если мы выберем промежуточные точки таким образом, чтобы все расстояния между ними были $< \frac{1}{2}\rho_0$, где ρ_0 есть нижняя граница ρ, то мы уверены, что можно вернуться из A_n в A_1, о чём говорилось выше, то есть из всякой точки мы можем попасть только в те точки континуума, которые ему принадлежат, и это в самом деле так, или, иначе говоря, точка может принадлежать только континууму, что и доказано полностью.

Среда, 23.6.1886.

Эта теорема прежде всего применима к плоскости, то есть к двумерному многообразию, и теперь наша задача продолжить доказательство на произвольное n-кратное многообразие. Здесь мы будем использовать геометрические выражения, приведённые к следующему виду: пусть $x_k = a_k + t(b_k - a_k), \quad (k = 1, \ldots, n)$, где t это неограниченная действительная переменная, тогда назовём совокупность точек[12], удовлетворяющих этому выражению, линией в соответствующем многообразии. Основания для такого названия не нуждаются в комментарии. Совокупность значений системы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые следуют из этого выражения, когда t принимает значения от 0 до 1, называется отрезком ab. Придавая t значения >1, получим продолжение отрезка ab за пределы b, придавая t отрицательные значения, получим продолжение за пределы a. Выражение $\sqrt{\sum_1^n (b_k - a_k)^2}$ называется расстоянием точки b до точки a. Если оно $= r$, мы понимаем под окрестностью точки a радиуса r совокупность всех значений системы, для которых $\sqrt{\sum_1^n (b_k - a_k)^2} < r$.

[Неравенство треугольника, вариационный метод].

Докажем теперь теорему, которая является прямым обобщением следующего утверждения для пространства: Если a, b, c – три точки пространства, то $ac < ab + bc$, если они не лежат на одной прямой. Теперь пусть c изменяется, но так, чтобы bc всегда имело одно и то же значение, так что есть положения, при которых

---

[12] Gesamtheit der Stellen, геометрическое место точек.

ac достигает максимума, и такие, при которых *ac* является минимальным. Для *n*-кратного многообразия эта теорема звучит следующим образом: Если *a*, *b*, *x* три точки, то $ax < ab + bx$, или $\sqrt{\sum(x_\lambda - a_\lambda)^2} < \sqrt{\sum(b_\lambda - a_\lambda)^2} + \sqrt{\sum(x_\lambda - b_\lambda)^2}$, кроме тех случаев, когда $x_\lambda = a_\lambda + t(b_\lambda - a_\lambda)$. В последнем случае из приведённого выше неравенства получается уравнение. Теперь мы можем доказать это чисто алгебраически, но поступим сначала следующим образом. Пусть *a*, *b* фиксированы, *x* – переменная, но такая, что *bx* имеет постоянное значение ρ, так что сначала нужно показать, что существует точка, для которой $\sqrt{\sum(x_\lambda - a_\lambda)^2} = R$ есть максимум, и другая точка, для которой R является минимумом. Он также должен быть $\sum(b_\lambda - a_\lambda)^2 = r^2$. Будем действовать обычным образом и составим выражение $\sum(x_\lambda - a_\lambda)^2 - \varepsilon\sum(x_\lambda - b_\lambda)^2$, оно должно принимать минимальное или максимальное значение, и притом мы домножим слагаемое на неопределённую постоянную ε, потому что эта задача сродни <u>вариационному</u> <u>исчислению.</u> Таким образом, мы имеем систему уравнений $(x_\lambda - a_\lambda) - \varepsilon(x_\lambda - b_\lambda) = 0 \quad (\lambda = 1, \dots, n)$ или $x_\lambda - a_\lambda = -\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(b_\lambda - a_\lambda)$, что доказывает, что искомые точки действительно лежат на линии. Дальше получаем $R = \pm\varepsilon\rho = \pm\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}r$, а также $\varepsilon = 1 \pm \dfrac{r}{\rho}$.

Таким образом, получаем две точки, и не более, удовлетворяющих требуемому. Тогда, в первом случае $R = \left(1 + \dfrac{r}{\rho}\right)\rho = r + \rho$, во втором $R = \left(\dfrac{r}{\rho} - 1\right)\rho = r - \rho$. По сути, мы имеем в одном случае максимум, в другом минимум, так что фактически в остальных случаях $ax < ab + bx$. Эта теорема послужит основой доказательств наших теорем для *n*-кратных многообразий. Пусть в замкнутом многообразии дано замкнутое точечное множество, но так, что есть точки, не принадлежащие ему. Тогда для каждой точки, которая ему не принадлежит, обязательно определена окрестность. Наверняка точки множества P не лежат в произвольной близости к упомянутым точкам, то есть может быть точка, обозначенная a, с окрестностью радиуса ρ, внутри которой нет точек из P. Несомненно, этот радиус не превышает конечного предела r, то есть окрестность r определена так, что при небольшом увеличении в неё попадёт точка P. Взяв в окрестности точки a некоторую точку b, можно показать, что, когда $ab = d$, радиус окрестности b не меньше чем $r - d$ и не больше, чем $r + d$. Если c является точкой в из окрестности b, то в силу только что доказанной теоремы прежде всего $ab + bc > ac$ или $bc > r - d$, а также $bc < ab + ac$, $bc < r + d$, что и требовалось доказать. Во второй части c означает точку, которая находится на границе окрестности b, расположенной в окрестности a. Итак, мы можем сформулировать следующее определение: если в окрестности точки a содержится точка b, в окрестности точки b содержится точка c и так далее, то любая точка s, по которой мы можем перейти из a в c, называется связной (смежной) с точкой a. Покажем, что если s связано с a, то и a связано с s. Если это будет доказано, то само собой разумеется, что исходя из любой точки континуума мы всегда в нём и останемся.

Пусть теперь в окрестности точки a лежит точка b, так что $ab < \frac{1}{2} r$, где r это окрестность [радиус окрестности] точки a, тогда окрестность [радиус окрестности] точки b будет в силу доказанной теоремы $> \frac{1}{2} r$. Соединим ab отрезком прямой, тогда, как только $ab = d$, для любой точки всегда определена такая окрестность, которая $> r - d$, нам нужно лишь – что всегда возможно – соединить a и b последовательностью точек такого рода, чтобы при переходе от a к b каждая точка всегда лежала в окрестности предыдущей, чтобы быть уверенным, что из b в a можно вернуться обратно, но это всегда возможно, потому что расстояние между точками $< r - d$. Но a связано с b, и мы можем из b попасть в любую точку, в которую можно попасть из a, значит нужно отправиться из b через a. Эта теорема справедлива для любого *n*-кратного многообразия.

Границы континуума.

Пятница, 25. 6. 1886. Теперь поставим вопрос о создании концепции границ континуума. А именно, могут ли все точки многообразия принадлежать континууму, или нет, в последнем случае тогда должны существовать точки, в произвольной близости к которым находятся как точки, принадлежащие континууму, так и не принадлежащие ему. Совокупность этих точек мы будем называть **границей (пределом)** континуума. Это и есть наибольшее возможное многообразие. Например, на плоскости ограничителем может быть единственная точка, бесконечное количество точек, расположенных дискретно, и, наконец, непрерывный контур. Нам нужно доказать две вещи: 1) что за исключением упомянутого плоского случая в континууме имеются границы; 2) что всё это можно найти в замкнутом точечном множестве, с помощью которого мы с самого начала определяли континуум. Совсем не обязательно, чтобы все точки, принадлежащие замкнутому множеству точек, были граничными (предельными); например, определим в пространстве замкнутое множество с помощью точек, которые находятся внутри сферы или на её поверхности, в этом смысле если отделить от шара континуум его граничных точек, то оставшиеся внутренние точки сферы уже не будут замкнутым точечным множеством.

Поэтому сначала нужно доказать существование предельных точек. Пусть a это точка внутри континуума, b это любая другая точка; по ранее данному определению *n*-кратного многообразия $x_\lambda = a_\lambda + t(b_\lambda - a_\lambda)$, $(\lambda = 1, \ldots, n)$, где t принимает все положительные и отрицательные действительные значения, то a и b соединены прямой линией. Теперь пусть τ – произвольная положительная величина, такая, что при подстановке её вместо t в выражения для координат отрезка получается точка P этого отрезка, лежащая в континууме, и такая, что все точки от a до неё принадлежат отрезку (участку) континуума, тогда расстояние (отрезок) aP имеет переменную величину и как таковое имеет верхнюю границу. Если оно будет бесконечно большим, тогда все точки прямой принадлежат континууму; если нет, то для P_0 должно быть предельное положение для данного P, в этом случае P_0 будет просто границей для P, как это следует из его определения. Отрезки, для которых такие предельные точки P_0 действительно существуют, должны быть в любом случае; в самом деле, можно взять какую-нибудь точку, для которой в континууме определено точечное множество, связанное с a; разумеется, эта точка является точкой класса P_0, иначе на отрезке не было бы точек, предшествующих ей в соединении с точкой a, то есть соответствующих меньшей величине t.

И наконец, легко видеть, что все граничные точки принадлежат замкнутому множеству; так как любая точка, не принадлежащая точечному множеству, принадлежит континууму, или, если многообразие расположено в точечных множествах в нескольких континуумах, то одному из этих континуумов.

Такой континуум, как только что описанный, назовём <u>незамкнутым континуумом;</u> мы думаем, что если добавить к нему все предельные точки, то получим структуру, которую вправе называть <u>замкнутым континуумом.</u> На самом деле тот континуум, что мы определили раньше, и есть замкнутое множество»[11, с. 63-73].

Дальнейшее развитие идей Вейерштрасса.

Как мы видим, в этих лекциях Вейерштрасса уже заложены понятия измеримого множества, метрического и топологического пространства. Теорема о том, что каждое ограниченное бесконечное подмножество в R^n имеет предельную точку рассматривалась Вейерштрассом для $n=2$ в курсе лекций 1865 года, общее доказательство было дано им в 1874 году. Но Вейерштрасс не выделял понятие предельной точки как базовое, это сделал Кантор в 1872 году, построив иерархию производных множеств. Лекции Вейерштрасса не публиковались, но идеи его расходились благодаря слушателям, студентам Германии, Италии и России. В Италии его идет продолжили Дж. Асколи (1843-1896), Ч. Арцела (1847-1912), У. Дини (1845-1918).

Идеи Вейерштрасса в Италии.

Курсы математического анализа в Италии приводились в соответствие с достижениями немецких и французских математиков. С этой целью Ф. Бриоши, Э. Бетти, Ф. Казорати (неоднократно) ездили в Германию для встреч с Вейерштрассом, Куммером, Кронекером и другими математиками [15, с. 221]. Благодаря интенсивной переписке между Г. Шварцем, Казорати и У.Дини итальянские математики были в курсе всех математических новостей Германии. Лучшим в Италии считался курс Улисса Дини «Основания теории функций действительной переменной»[12], который он читал в университете Пизы с 1871 по 1915 год. Новые результаты Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда были включены в этот курс [14]. В 1877-78 годах у Вейерштрасса обучался С. Пинкерле (1853-1936), и в 1880 году он начал читать в университете Павии курс «Теория аналитических функций по Вейерштрассу» (Teorica delle funzioni analitiche secondo Weierstrass), а позже издал его [17]. Так идеи Вейерштрасса распространялись в Италии.

В 1883 году Вольтерра начал создавать теорию функционалов, или «функций линий с действительными значениями». Эти функции рассматриваются как элементы множества, для которого могут быть определены понятия окрестности и предела последовательности. Вольтерра дал определения непрерывности и производной функции линии и попытался построить теорию функций линий аналогично римановой теории комплексных функций.

В 1884 году Джулио Асколи (1843-1896) распространил теорему Больцано-Вейерштрасса на множества функций. В 1889 году Ч. Арцела обобщил эту теорему и доказал, что равностепенно непрерывное множество F равномерно ограниченных функций на $[a, b]$ имеет предельную функцию.

Потом Арцела рассмотрел непрерывные действительнозначные функционалы, определённые на равностепенно непрерывном множестве функций F и показал, что если F замкнуто, то есть содержит все свои предельные функции, нижнюю границу множества величин функционалов, то достигается верхняя граница и все промежуточные значения.

Теперь фундаментальная теорема Асколи-Арцела в анализе формулируется в терминах компактности, на языке, созданном Фреше в 1904 году.

М. Фреше, Ф. Рисс и Ф. Хаусдорф.

В 1906 году Морис Фреше (1878-1973) в диссертации «О некоторых вопросах функционального исчисления» [18] ввёл понятие метрического пространства[18, с. 30], формализованное в 1914 году Хаусдорфом, с аксиомами тождества, симметрии и треугольника.

Ф. Рисс (1880-1956) в 1908 году в докладе «Непрерывность и абстрактная теория множеств»[19] на IV Международном математическом конгрессе в Риме характеризовал континуум с помощью понятия предельной точки, удовлетворяющей трём основным аксиомам: каждый элемент, являющийся предельной точкой, подмножества M, является также предельной точкой всякого множества, содержащего M; если подмножество разделить на два подмножества, то каждая предельная точка является предельной точкой по крайней мере одного из них; подмножество, состоящее только из одного элемента, не имеет предельной точки. Для усиления Рисс добавил четвёртую аксиому: каждая предельная точка множества единственным образом определяется через совокупность всех его подмножеств, где она является предельной точкой.

Феликс Хаусдорф (1868-1942) окончил университет в Лейпциге в 1891 году, слушал лекции в университетах Фрайбурга и Берлина. Возможно, он был знаком с лекциями Вейерштрасса, прочитанными в 1886 году. Ещё в 1912 году Хаусдорф, читая лекции по теории множеств в университете Бонна, ввёл понятие окрестности U_x точки x как множества всех точек y, для которых $x \cdot y < \rho$, где ρ - положительное число, внутренность сферы радиуса ρ, $x \cdot y = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \geq 0$ - расстояние между точками x и y. Окрестность у него обладает следующими свойствами: Каждая U_x содержит x и содержится в r (где r - это любое n-мерное пространство, например, плоскость). Для двух окрестностей одной и той же точки $U'_x \supseteq U_x$ или $U_x \supseteq U'_x$. Если y лежит в U_x, то существует окрестность U_y, которая содержится в U_x ($U_x \supseteq U_y$). Если $x \neq y$, то существуют две окрестности U_x, U_y без общих точек [20]. В 1914 году Хаусдорф написал одно из первых систематических изложений теории множеств[13] и теории топологических пространств «Основания теории множеств»[21], где ввёл понятие топологического пространства. В этой книге

[13] Первым был Шёнфлис.

Хаусдорф пользуется понятием верхней границы, введённым Вейерштрассом.

Заключение.

Намерение Вейерштрасса обосновать и систематизировать современный ему математический анализ привело к созданию им новых направлений и понятий в анализе и топологии. Как говорил Вейерштрасс, «даже введение в математические науки требует изучения различных проблем, что в первую очередь показывает нам значительность и состоятельность науки. Нужно иметь в виду, что конечной целью изучения оснований науки является стремление получить уверенность в справедливости исследования» [Вейерштрасс, с. 20]. Вейерштрасс настолько глубоко проанализировал методы и понятия классического анализа, что его построения привели к понятию метрического и топологического пространства, на основе которых зародился функциональный анализ.

Литература

1. Эйлер Л.. Письма к ученым. - М-Л.: Изд-во АН СССР, 1963. – С. 336-340.
2. Листинг И. Предварительные исследования по топологии. М. – 1932 г. – 119 с.
3. Listing J.B. (1808-1882), Der Census raumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyeder. 1862.
4. Риман Б. Сочинения. М.-Л. – 1948 г. – с. 52.
5. Кантор Г. Труды по теории множеств. М. - 1985. – С.40-139.
6. Teun Ketsier T., van Mill J. By their fruits ye shall know them: some remarks on the interaction of general topology with other areas of Mathematics. 43 p. http://www.math.vu.nl/~vanmill/papers/papers1999/teun.pdf p.3.
7. Ф. Клейн. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. I. - М.-Л., ГОНТИ, 1937, 432 с. – с. 327.
8. Синкевич Г.И. Развитие понятия непрерывности у Шарля Мере // Труды X Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: Издательство ЯГПУ – 2012 г. – С. 180–185.
9. Гейне Эдвард Генрих. Лекции по теории функций. Перевод и примечания Г.И.Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск 18. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера / СПбГАСУ. – СПб. – 2012. – С. 26 – 46.
10. Синкевич Г.И. Георг Кантор & Польская школа теории множеств. – Изд-во СПбГАСУ, – 2012. – 356 с.

11. K. Weierstrass. Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Teubner-Archiv für mathematic. Band 9, 272 s. Reprint 1989.
12. Dini, U. Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali / U. Dini // Pisa: tip. Nistri. - 1878. - VIII+407 P.].
13. Кольман Э. Бернард Больцано. – М. 1955. - С.192.
14. Синкевич Г.И. Улисс Дини и понятие непрерывности // История науки и техники. – 2012. - №10. – С. 3-11.
15. Borgato M. T. Continuity and discontinuity in Italian mathematics after unification: from Brioschi to Peano. – Organon. – 41. – 2009. – P. 219 – 232. – P. 221.
16. Dini, U. Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali / U. Dini // Pisa: tip. Nistri. - 1878. - VIII+407 P.
17. Pincherle S. Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi del prof. C Weierstrass. Napoli. – 1880. – 124 p. http://mathematica.sns.it/media/volumi/367/SAGGIO_TEO_F_AN_SECONDO_WEIERSTRASS.pdf
18. M. Fréchet in Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906), 1-74, p. 30.
19. Riesz F. Stetigkeit und Abstrakte Mengenlehre // Atti del IV Congresso Internationale dei Matematici, vol. 2. Rome (1908). P. 18-24.
20. Хаусдорф Ф. рукопись 1912 г., Архив университета Бонна. - Ketsier, van Mill. By their fruits ye shall know them: some remarks on the interaction of general topology with other areas of Mathematics. 43 p. http://www.math.vu.nl/~vanmill/papers/papers1999/teun.pdf - стр. 16.
21. Hausdorff, F. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: von Veit, 1914. На русском языке Хаусдорф Ф. Теория множеств. М. — Л., 1937 – 304 с.