АРХИМЕД: ПИСЬМА К ДОСИФЕЮ И АКСИОМА ПОЛНОТЫ

Г.И. Синкевич

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Российский Федерация

galina.sinkevich@gmail.com

Опубликовано: *Синкевич Г.И. Архимед: письма к Досифею и аксиома полноты // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Сборник статей Международной конференции. под ред. А. И. Кириллова, С. А. Розановой. Москва, 2015. С. 366-370.*

Аннотация. К концу XIX века в математическом анализе в работах Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда сформировалась концепция непрерывности. Гильберт добавил в аксиоматику геометрии аксиому Архимеда и аксиому полноты. Позже Колмогоров показал, что аксиома полноты может быть заменена принципом вложенных отрезков вместе с аксиомой Архимеда. В статье рассматривается развитие названных принципов в работах Архимеда.

Ключевые слова: аксиома полноты, аксиома Архимеда, принцип стягивающихся отрезков, непрерывность.

ARCHIMEDES' LETTERS TO DOSITHEUS AND COMPLETENESS AXIOM

Abstract. By the end of the XIX century in mathematical analysis the concept of continuity was formed in the works of Weierstrass, Cantor and Dedekind. Gilbert added the Archimedean axiom and the axiom of completeness to the axiomatic of geometry. Later researches showed that the axiom of completeness can be replaced with the principle of nested intervals and Archimedean axiom jointly. The article discusses the early development of these principles in Archimedes' works.

Keywords: axiom of completeness, Archimedean axiom, nested interval, continuity.

Процесс реформы и арифметизации математического анализа XIX века завершился созданием концепции действительного числа, непрерывности и аксиоматизации арифметики [1]. Было установлено взаимно-однозначное соответствие между областью действительных чисел и геометрической прямой [2]. Появление неевклидовой геометрии привело к необходимости анализа аксиом геометрии, понятия непрерывности и полноты. В 1899 году Гильберт ввёл новую систему аксиом, к которой добавил аксиому Архимеда и аксиому полноты:

«*Аксиома измерения или аксиома Архимеда*. Пусть A_1 есть произвольная точка на прямой между произвольно данными точками A и B; строим затем точки $A_2, A_3, A_4,\ldots$ так, что точка A_1 лежит между точками A и A_2, A_2 между A_1 и A_3, A_3 между A_2 и A_4, и сверх того, отрезки $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,\ldots$ равны между собою: тогда в ряду точек $A_2, A_3, A_4,\ldots$ всегда существует такая точка A_n, что точка B лежит между A и A_n.

Аксиома полноты. Элементы (точки, прямые, плоскости) геометрии образуют систему вещей, которая, при условии сохранения всех указанных выше аксиом, не допускает расширения, то есть к системе точек, прямых, плоскостей невозможно присоединить другую систему так, чтоб в новой расширенной системе были по-прежнему удовлетворены вместе все аксиомы» [3].

Мы хотим показать, как первые теоретические методы работы с геометрическими величинами составили основу современного понимания действительного числа, рассмотрев здесь только тот аспект, который касается непрерывности области действительных чисел и его обоснования с помощью последовательности стягивающихся сегментов. Эта конструкция зародилось в античных методах – в методе исчерпывания Евдокса, принципе Евклида, их развитии в методах Архимеда. Логические схемы, предшествующие возникновению принципа стягивающихся последовательностей, встречаются в работах Ж. Буридана, П. Ферма, Д. Грегори, Ньютона, К. Гаусса, Ж.-Б. Фурье. Сам метод возникает в XIX веке в работах Б. Больцано, О.-Л. Коши, П. Лежена Дирихле, Ш. Мере, Э. Гейне, Г. Кантора, Г. Дарбу. В XX веке принцип вложенных отрезков признан одним из фундаментальных в аксиоматике действительного числа.

V век до н.э,. Пифагор. «Пифагор открыл область иррациональных чисел[1]» [4]. В IV веке теорией иррациональных величин занимался Теэтет Афинский.

В IV веке до н.э. Евдокс создал теорию отношений для её применения к геометрическим величинам – длинам, площадям и объёмам. «Евдокс Книдский был немного младше Леонта и был дружен с окружением Платона; он первый увеличил число так называемых общих теорем, прибавил к трем пропорциям еще три и — взяв у Платона основу — разработал множество видов сечения, используя при этом метод анализа» [4]. В III веке до н.э. его теорию отношений изложил Евклид в V книге «Начал», содержащей 18 определений и 25 предложений (теорем). Здесь ratio ещё не число, но может быть сравнимо по величине с другими отношениями: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга» (Начала, Книга V, определение 4) [5, с. 142]. Метод исчерпываний Евдокса изложен X и двух последующих Книгах «Начал» Евклида.

«*Немного младше ... – Евклид*, составивший "Начала", собравший многое из открытого Евдоксом, улучшивший многое из открытого Теэтетом, а помимо этого сделавший неопровержимыми доказательствами то, что до него доказывалось менее строго. Он жил при Птолемее Первом, потому что и Архимед, живший при Птолемее Первом, упоминает об Евклиде и, в частности, рассказывает, что Птолемей однажды спросил его, есть ли более короткий путь изучения геометрии, нежели "Начала"; а тот ответил, что нет царского пути к геометрии. Таким образом, он моложе платоновского кружка и старше Эратосфена и Архимеда, — они-то жили в одно время, как где-то говорит Эратосфен. Он принадлежит к платоникам и близок их философии [4].

Евклид развивает идеи Евдокса, анализируя несоизмеримые в X Книге: «Соизмеримыми величинами называются измеряемые одной и той же мерой, несоизмеримыми же – для которых никакая общая мера не может быть образована» (Начала, книга X, определение 1) [6, с. 101]. В X книге Евклид доказывает предложение 1: «Для двух заданных неравных величин, если от большей отнимается больше половины, и от остатка больше половины, и это делается постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше заданной меньшей величины» [6, с. 102]. Таким образом, искомая величина «исчерпывалась» последовательностью сумм известных величин, приближаясь к ней *с одной стороны* – либо с недостатком, либо с избытком. Заметим, что именно к X Книге Евклида обращались Штифель, Больцано и Кантор в своих работах, посвящённых концепции числа [2, 7, 8].

---

[1] Величин.

III век до н. э. Архимед. Следующим этапом в развитии понимания числа было пять работ Архимеда, изложенных в его письмах к Досифею: «Квадратура параболы», «О шаре и цилиндре», «О коноидах и сфероидах», «О спиралях» и венчающая этот цикл работа «Об измерении круга».

В «Квадратуре параболы» Архимед доказывает, что «всякий сегмент, заключённый между прямой и параболой, составляет четыре трети треугольника, имеющего с сегментом то же самое основание и равную высоту» [9, с. 89]. Для этого он использует две суммы трапеций, площади которых соответственно не достигают и превосходят описанный треугольник. «Я утверждаю, что треугольник ВΔΓ будет меньше утроенных трапеций КЕ, ΛZ, МН, NI вместе с треугольником ΣΙΓ, но больше утроенных трапеций ZΦ, ΠΘ, ΠΙ с треугольником ΙΟΓ» [9, с. 85].

Это *первое* в истории математики применение двух последовательностей вписанных и описанных площадей, приближающихся к искомому с разных сторон. Во второй части своей работы Архимед, следуя Евдоксу, «исчерпывает» искомую площадь сегмента с помощью сумм площадей треугольников, то есть приближаясь к искомому с недостатком.

В работе «О шаре и цилиндре» Архимед показывает, что отношение сумм двух последовательностей всё ближе и ближе к единице. В работах «О спиралях», «О коноидах и сфероидах» Архимед показывает, что разность между этими суммами может быть сделана сколь угодно малой. Эта же идея использована в «Измерении круга», где Архимед получает приближение числа π. В сочинении «О спиралях» Архимед формулирует следствие: «Около упомянутой площади можно описать, как указано, плоскую фигуру так, чтобы описанная фигура была больше этой площади на величину, меньшую всякой наперёд заданной площади и затем вписать так, чтобы упомянутая площадь была больше вписанной фигуры на величину, меньшую всякой наперёд заданной площади». [9, с. 254].

В античности метод исчерпываний мог быть применим лишь к однородным величинам: от отрезка можно было отнимать только отрезок, от площади площадь и так далее. Отношения были возможны лишь между однородными величинами. Длина, площадь, объём выражались не числом, а равновеликой длиной, площадью, объёмом известной элементарной фигуры (квадрат, треугольник, куб, цилиндр). Евклид говорит, что величины могут быть в математическом отношении, если меньшая из них, взятая кратно, может превзойти большую, то есть рассматривает это как свойство, присущее однородным величинам. Архимед заменяет эту формулировку на более сильную: величины могут находиться в отношении, если их *разность*, взятая кратно, может превзойти любую из них. Эта формулировка повторена им для площадей в «Квадратуре параболы»; для линий, поверхностей или тел в сочинении «О шаре и цилиндре», для отрезков в сочинении «О спиралях». Возможно, именно этим Архимед исключает появление неделимых, когда, например, точка может считаться частью линии и так далее. Это принцип был нарушен в Новое время в работах Кавальери и Кеплера, где точка входила как неделимая часть в линию, линия была неделимой частью плоскости и так далее.

В XIX веке к аксиоме Архимеда обратились многие математики, пытавшиеся построить геометрию без неё: Джузеппе Веронезе (1854-1917), который в 1890 году предложил концепцию линейного неархимедова континуума [10], Отто Штольц [11], Давид Гильберт [12]. Как пишет Гильберт, «*Выполнимость аксиомы полноты существенно обусловливается предварительным установлением аксиомы Архимеда*; это значит – аксиома полноты привела бы к противоречию, если бы к аксиомам I-IV не была ещё присоединена аксиома Архимеда» [3, с. 20].

В 1887 году Георг Кантор, обсуждая попытки Веронезе и Штольца ввести в геометрию актуально бесконечные и построить неархимедову геометрию, в письме к Вейерштрассу писал: «Архимед, по-видимому, впервые обратил внимание на то, что применяемая в Евклидовых «Началах» теорема, согласно которой из любого сколь угодно малого ограниченного отрезка можно получить произвольно большие конечные отрезки путём умножения на конечные достаточно большие числа, нуждается в доказательстве, и он считал себя поэтому вправе назвать эту теорему «допущением»<…>. Факт существования актуально бесконечно малых чисел не только не является основанием для существования актуально бесконечно малых величин, но, скорее, как раз с помощью первых доказывается невозможность последних». Кантор приводит свою теорему: «Не существует отличных от нуля линейных числовых величин (т.е., короче говоря, таких числовых величин, которые можно представить в образе ограниченных непрерывных прямолинейных отрезков), которые были бы меньше сколь угодно малой конечной числовой величины, т.е. такие величины противоречат понятию линейной числовой величины», и добавляет, что «Потребность в нашей теореме особенно очевидна на фоне новейших попыток О. Штольца и П. Дюбуа-Реймона обосновать актуально бесконечно малые величины с помощью так называемой аксиомы Архимеда. Я думаю также, что этот результат невозможно вполне строго получить иным путём. Ход мыслей цитированных выше авторов (О. Штольц, указ. работы) заключается в том, что если отбросить эту мнимую «аксиому», то мы будем вправе создавать актуально бесконечно малые величины, названные там «моментами». Но из доказанной мною выше теоремы, если применить её к прямолинейным непрерывным отрезкам, непосредственно следует необходимость евклидова постулата. Следовательно, так называемая аксиома Архимеда вовсе не является аксиомой, а есть теорема, вытекающая с логической необходимостью из понятия линейной величины. В первую очередь следует указать на теорию иррациональных числовых величин, обоснование которой невозможно, если не привлечь в какой-нибудь форме а.б. Что это привлечение может совершаться по-разному, я вкратце указал в §9 «Основ общего учения о многообразиях». Для этого я ещё ранее (Math. An., Bd. 5, S. 123) [I.1] воспользовался особыми актуально бесконечными множествами рациональных чисел, которые я называю фундаментальными последовательностями. Г-н Э. Гейне последовал в этом за мной (Crelles, Bd.74, S. 172). » [13, с. 294-297].

В XX веке исследования Колмогорова показали, что аксиома полноты может быть заменена принципом вложенных отрезков (фундаментальных последовательностей Коши-Кантора) вместе с аксиомой Архимеда [14, 15, 16, 17].

Литература

1. Sinkevich G. Concepts of a Numbers of C. Méray, E.Heine, G. Cantor, R. Dedekind and K. Weierstrass//Technical Transactions. Kraków. – 2014. – 1NP. – p. 211–223.
2. Синкевич Г.И. Эволюция понятия числовой прямой //Труды Международной научной конференции «Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство» 24–29 марта, Цахкадзор, 2014. – т. I. – с. 450-455.
3. Гильберт. Основания геометрии // Перевод А.В. Васильева. СПб. – 1923 г. – с. 20.
4. Прокл. Комментарии к «Началам» Евклида, часть II, глава 8, электронный ресурс: http://centant.spbu.ru/plat/proklos/works/euklid/2_08.htm
5. Евклид. Начала // Перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ОГИЗ ТТЛ. – 1948 г. - Т.1. 447 с.

6. Евклид. Начала // Перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ОГИЗ ТТЛ. – 1949 г. - Т.2. – 511 с.
7. Синкевич Г.И. Михаэль Штифель (1487-1567) и теоретико-множественные представления XVI века / Г.И. Синкевич // История науки и техники. – 2013. - № 10. – С. 11-16.
8. Синкевич Г.И. Понятие непрерывности у Дедекинда и Кантора. // Труды XI Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: Издательство ЯГПУ, 2013. – С. 336-347.
9. Архимед. Сочинения /Перевод И.Н. Веселовского. Москва: ГИФМЛ, 1962. – 640 с.
10. Veronese, G. Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Padova: Tipografia del Seminario, 1891. – 629 p.
11. Stolz O. B. Bolzano’s Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung//Math. Ann., 1881. – Bd. 18. – s. 255-279.
12. Hilbert D. Grundlagen der geometrie. Leipzig, 1903. – 175 s.
13. Кантор Г. Труды по теории множеств/Перевод Ф.А. Медведева и П.С. Юшкевича. Москва: Наука, 1885 г. – 430 с.
14. А.Н. Колмогоров. К обоснованию теории вещественных чисел. УМН. 1946 №1. С. 217- 219.
15. Русаков А.А., Чубариков В.Н. О двух подходах к обоснованию вещественных чисел//Математика в высшем образовании. 2006, №4. – С. 37- 44.
16. А.В.Гладкий, Ю.Н.Козиоров . Действительные числа как последовательности обыкновенных дробей (Теория действительных чисел по Колмогорову). Математика в высшем образовании. 2009, No7.– С. 21- 38.
17. Тихомиров В.М. Аксиоматический метод и теория действительных чисел в лекциях А.Н. Колмогорова / Математика в высшем образовании. 2014, №12. – С. 149-154