

Синкевич Г.И., (СПб, Россия)

**МОСКОВСКИЕ МАТЕМАТИКИ И ФИЛОСОФЫ
ПЕРВОЙ ТРЕТИ XX ВЕКА. ЛУЗИН, ФЛОРЕНСКИЙ,
ЛОСЕВ. ДЕСКРИПТИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И
ПРОБЛЕМА ИМЕНОВАНИЯ**

Опубликовано: Синкевич Г.И. Московские математики и философы первой трети XX века: дескриптивная теория множеств и проблема именованя / Г.И. Синкевич // Генеалогия ценностей в русской философии Серебряного века. Сборник научных трудов под редакцией М.И. Панфиловой, Е.А. Трофимовой. – СПб:СПбГЭУ. – 2013 г. – С. 444 – 456.

Одной из проблем, вставшей перед математиками XIX века, была арифметизация понятия непрерывности, геометрическое понятие которой происходило из античности. Понятие континуума в XIX веке разрабатывали чешский математик Б.Больцано, французы О.Коши и Ш.Мере, немецкие математики К.Вейерштрасс, Э.Гейне, Г.Кантор и Р.Дедекинд.

Связь между числами и точками на прямой, т.е. непрерывности множества действительных чисел, составляла проблему арифметического представления континуума, создание теории действительных чисел. В 1872 году появились сразу четыре работы по теории действительного числа К.Вейерштрасса, Э.Гейне, Р.Дедекинда и Г.Кантора. В последующее двадцатилетие Георг Кантор создал теорию множеств. Эта теория позволила математике приобрести самостоятельное обоснование, но принесла и новые трудности. Обнаружились противоречия, разрешить которые

средствами традиционной классической математики было невозможно.

Конец XIX века и начало XX ознаменовались развитием теории функций в работах французских математиков Р.Бэра, Э.Бореля и А.Лебега. Их подход был различен. Возможность получения числовых множеств с помощью аналитических выражений, применённых конечное, счётное и несчётное количество раз отличал интуиционистов (Вейля и Брауэра) и конструктивистов (Борель). Бэр признавал функции, получаемые из некоторых простых функций (например, непрерывных или многочленов) при помощи некоторых аналитических выражений; Лебег – функции, которые можно «назвать», т.е. для которых можно логически определить некоторое характеристическое свойство, индивидуализирующее функции. По Лебегу, объект является определённым или заданным, когда мы произносим конечное число слов, применяющихся к этому объекту и только к нему, т.е. когда мы назвали характеристическое свойство объекта. Название, или имя в математике - это всегда конечная цепочка букв некоторого алфавита, т.е. *слово*.

Смятение внесла и аксиома выбора, сформулированная немецким математиком Э.Цермело в 1904 году. Она утверждала, что из любого множества можно выбрать один элемент, и из неё следовало, что любое множество можно вполне упорядочить. Методы, отвергавшие аксиому Цермело, получили название эффективных, а методы, допускающие её применение, стали называться неэффективными. Конструктивисты, приверженцы

эффективного подхода, столкнулись с огромными трудностями при построении математических объектов и доказательств теорем. К ним относились Борель и Пуанкаре. В России и в Польше в первой трети XX века возникли научные направления с очень сильными результатами благодаря неэффективному подходу. Это были московская и варшавская школы теории множеств во главе с Лузиным и Серпинским соответственно.

О проблеме называемости и существования в 1904 г. французский математик Лебег говорил: «Итак, можно назвать (nommer) функцию, непредставимую аналитически, и то исследование, которое мы только что предприняли, не следует смешивать с изучением *функций, которые можно называть* (fonctions qu'on peut nommer), т.е. с исследованием, к которому было бы интересно приступить»[1].

До появления теории множеств математика оперировала с объектами, имеющими геометрическую или механическую интерпретацию (ньютоновская модель). Георг Кантор сделал математику самостоятельной абстрактной наукой, оперирующей с отвлечёнными понятиями. Появились функции и множества, которые трудно представить, зачастую утверждалось лишь их существование и какой-либо характеристический признак. В то же время их структура, аналитический вид или геометрическое представление не были определены. По сути, математика приняла дескриптивные способы определения, при которых в начале исследования известен лишь один признак объекта, в процессе

исследования находятся новые признаки, а по окончании исследования объект получает более полный набор свойств.

Традиция французской математики, происходившая из «Метода» Декарта, «Логики Пор-Рояля» А.Арно и П.Николя, и позитивизма О.Конта, не позволяла изменять объём и структуру понятия в процессе исследования. Утверждался принцип сохранности объёма и структуры понятия в процессе рассуждения¹. Логически строгий французский язык не допускал противоречий, не позволял появляться смысловым зияниям в понятиях. Русский язык более толерантен к противоречиям, нежели французский.

Трудности, с которыми встретила французская и в целом европейская математика, были разрешены в русской математике, в московской школе теории функций первой трети XX века. Благодаря работам Д.Ф.Егорова и Н.Н.Лузина появилась дескриптивная теория множеств. Характерной особенностью московских математиков была философская направленность, прежде всего в работах профессора московского университета Н.В.Бугаева (1837-1903), хотя математические результаты Бугаева и лекции не оценивались так высоко [2]. Его монадология и теория разрывных функций была предназначена не столько для математических, сколько для мировоззренческих задач. Как пишет польский профессор Е.Медушевский, только русские пытаются через математику объяснять мировоззрение, а через мировоззрение решать математические проблемы [3]. Философский подход и

¹ Например, если в рассуждении используется понятие «чётное число», что означает число, которое делится на 2, то в любой момент рассуждения мы тождественно можем вместо слов «чётное число» подставить слова «число, которое делится на 2».

послужил фактором успешного развития теории множеств и теории функций в Московском университете в три первых десятилетия XX века.

Во главе школы стоял Д.Ф.Егоров (1869-1931), его учеником, а с 1915г. и лидером школы стал Н.Н.Лузин (1883-1950). Ровесником и другом Лузина был студент механико-математического факультета Павел Флоренский (1882-1937), сначала предполагавший готовиться к кандидатскому званию по физико-математическому факультету, но в 1904 поступивший в Московскую духовную академию, которую закончил в 1908 г.

Павел Флоренский увлёкся теорией множеств Кантора, ещё в 1900 году на первом курсе Флоренский написал предисловие к диссертации «Идея прерывности как элемент мирозерцания»[4], в которой он утверждает единство математических идей Бугаева и Кантора с мировоззрением. С 1902 года Флоренский делал доклады на заседаниях студенческого математического кружка при Московском математическом обществе, где проводил мысль о соединении математики и философии: «Для меня не составляет сомнения, что наши учителя, по крайней мере некоторые, и среди них я не могу не указать Н.В.Бугаева, что они в значительной мере обладают таким цельным мировоззрением, в центре которого стоит математика» [5]. В 1904 г. он написал работу «О символах бесконечности» [6]. В этой работе он впервые в русской литературе целостно пересказывает учение Кантора, с попыткой перенести его теорию на мировоззрение. Его увлечение способствовало созданию атмосферы, благоприятной для развития теории множеств. С 1907

идеи Кантора вошли в курс, читанный в Московском университете И.И.Жегалкиным.

Дружба Флоренского с Лузиным началась в студенческие годы, сохранилась их переписка периода 1904-1922 годов (32 письма Лузина и 7 писем Флоренского)[7]. Начавшись как студенческая, переписка отражает периоды подготовки и защиты ими обоими диссертаций, женитьбы, вопросы здоровья, необходимости иметь развитое философское мировоззрение. Отражён в переписке и сильный духовный кризис Лузина² 1905-1908 гг. Сначала Флоренский выступает как старший товарищ, более опытный в духовных вопросах. Позже Лузин обретает уверенность и признание как математик, но тон его писем сохраняет теплоту. Особое место в переписке и в беседах уделено важности понятия имени. Во время работы Флоренского над трудом «Священное переименование» в 1906 году Лузин обращается к нему в письмах «Петр Афанасьевич», что вероятно, связано с их беседами об имени.

Начало московской школы теории множеств положили работы Егорова и Лузина. Лузин стал прекрасным руководителем, его окружало много талантливых учеников. Один из них, М.Я.Суслин (1894-1919), исправляя ошибку Лебега, в 1917 году открыл аналитические множества. Направление исследований московской школы приобрело ценность самостоятельной теории.

² Заметим, что Егоров, опасаясь влияния Флоренского на Лузина, отправил последнего в Париж для подготовки диссертации.

Одной из отличавших её черт было отношение к определению, называемости функций и множеств, иное, чем у Лебега³.

При исследовании числовой прямой оказалось, что помимо рациональных и иррациональных чисел, каждое из которых можно назвать⁴, существует бесконечно много неназываемых чисел.

Используя все известные в математике операции и алгоритмы, даже применяя их бесконечно много раз, невозможно назвать многие числа, лежащие на интервале от нуля до единицы⁵. Тем не менее эти числа существуют и с помощью теории множеств можно оценить их количество (мощность). Из этих чисел можно образовывать множества, но иногда невозможно назвать ни один из элементов этого множества. Адамар, Бэр, Борель и Лебег обсуждали этот вопрос в 1905 году в знаменитых «Пяти письмах»[8]. Лузин уделял много внимания общности и различию между понятиями «определённое» и «описанное», «выбрать» и «назвать». Он проводил границу между конструктивными, дескриптивными, апофатическими определениями, и пришёл к выводу (1930 г.), что приходится «предполагать данной совокупность иррациональных чисел (*актуальная бесконечность, имеющая мощность континуума*) или употреблять отрицательные определения.

Но если мы будем стремиться изгнать эти отрицательные определения, мы неизбежно наткнёмся на совокупность всех чисел

³ Лузин, относившийся к Лебегу с глубоким уважением, заметил, что не имея действительно исчерпывающего каталога всех возможных аналитических выражений, нельзя называть названную с помощью конечного или счётного количества слов (операций) функцию существующей, изученной, преобразующейся в выражение Бэра.

⁴ Например, пять, одна вторая, корень из двух, предел последовательности $1/n$, $\sin 0$.

⁵ Проблему называемости иллюстрирует парадокс Ришара-Берри.

второго класса по Кантору (*трансфинитное*). Таким образом, отрицательное понятие может стать эквивалентным трансфинитному»[9,с.268].

Лузин рассматривает свои примеры как словесные образования, как виртуальности. В частности, он рассматривает проективные множества как объекты, определение которых не может быть вполне закончено: это чисто отрицательные понятия, которые ускользают от всякого вида положительного определения. По мнению Лузина, «эти понятия попарно неприводимы, т.е. лишены логических отношений»⁶.

Таким образом, арифметический континуум заведомо содержит неопределимые точки. Эти точки, каждая из которых имеет бесконечное определение, являются паразитическими во всяком рассуждении, которое можно сделать эффективно⁷, и таком, что оно устанавливает вполне определённую связь между уже определёнными объектами. Можно было бы отметить, что в истории математической науки введение *идеальных* элементов оказало важные услуги, чего никто не станет отрицать. Но на это легко возразить, что истинно полезные идеальные элементы

⁶ Область проективных множеств есть область, где принцип исключённого третьего уже неприменим, хотя всякое проективное множество формально определимо при помощи счётного множества условий. Но если допускать *все* множества, измеримые В, то необходимо допустить проективные множества, как справедливо заметил Лебег. Следовательно, если желать ограничивать математический анализ лишь изучением вполне законченных объектов и вполне определённых взаимоотношений, то нужно, с точки зрения эмпиристов, пожертвовать некоторыми множествами, измеримыми В, и даже некоторыми иррациональными числами. В конечном итоге, и вопреки возражениям, вполне определимых иррациональных чисел имеется лишь счётное множество, хотя их перенумерование и не может быть осуществлено при помощи *математического* закона [9, с.268-269].

⁷ Здесь эффективное рассуждение понимается в смысле отрицания аксиомы Цермело.

индивидуально различимы, чего нет в данном случае. Исключение этих точек создало бы большое упрощение в методах математического анализа (Борель). Однако в данный момент из таких *неопределимых* точек можно образовать множества, которые можно назвать, но нельзя ни назвать индивидуальную точку такого множества, ни узнать, «существуют» ли точки в таком множестве, ни узнать его свойства» [9, с.269].

Созданная Лузиным и его школой дескриптивная теория множеств была высоко оценена европейскими математиками как по результатам, так и по новым методам. В 1933 году Лебег в предисловии к лекциям Лузина по аналитическим множествам писал: «Лузин исследует вопросы с философской точки зрения и приходит к математическим результатам»[10].

Новое отношение к имени и символу, к наименованию пронизывало всё направление символизма в России Серебряного века, это отражалось и в живописи, и в литературе, и в музыке, и в философии⁸.

Проблема имени и символа выразилась и в появившемся в 1907 течении имяславия. Оно возникло среди русских афонских монахов, было изложено в книге схимонаха Иллариона «На горах Кавказа», и в книге «Апология» о.Антония (Булатовича). Корни этого учения происходили из традиций восточного монашества и мистического православного богословия. В 1913 году Синод

⁸ Это сформулировал и сын Бугаева, друг Флоренского, поэт Андрей Белый: «Когда я называю словом предмет, я утверждаю его существование» [11].

признал учение Иллариона и Антония еретическим, но не квалифицировал как ересь⁹.

В среде клерикальной и светской интеллигенции было много сочувствовавших этому учению. Среди них П.Флоренский, написавший доброжелательное предисловие к книге Булатовича, о.С.Булгаков, о.И.Кронштадский, В.Эрн, А.Ф.Лосев, Д.Ф.Егоров. Теоретические разработки имяславия были созданы в 1920-е годы, не столько богословами П.Флоренским, С.Булгаковым, сколько философами, прежде всего А.Ф.Лосевым. Всю свою жизнь Лосев исповедовал имяславие и это отражено во всех его работах. «С начала 20-х годов А.Ф.Лосев сближается с известными математиками, людьми православными, такими как Н.М.Соловьёв, С.П.Фиников, Д.Ф.Егоров, Н.Н.Лузин» [13].

«С 1922 г. начались регулярные имяславские собрания в доме Лосевых на Воздвиженке, а также у П.С.Попова и Д.Ф.Егорова... В кружке читал доклады о.П.Флоренский[14]. Лосев был чрезвычайно увлечён теорией множеств Кантора, о которой он пишет статью «Имяславие»[15]: «Сущностно-теоретической опорой имяславия стало учение Г.Кантора и его современных последователей о «множествах», в которых можно найти в высшей

⁹ В июне 1913 года Синодом на Афон была командирована канонерская лодка «Донец», пароход «Царь» с 118 солдатами и 5 офицерами на борту, и пароход «Херсон». 517 монахов Пантелеймоновского монастыря и иноки Андреевского скита, объявившие себя имяславцами, были погружены на «Херсон» и отправлены сначала в Одессу, а затем по разным монастырям. В 1918 году открылся Собор Синода, на котором предполагалось рассмотреть спор об имени Божиим, но революционные события прекратили деятельность Собора, вопрос остался открытым[12].

степени интересные конструкции таких понятий, как «актуальная бесконечность, «мощность», «тип» множества, а также ряд так называемых «парадоксов». Будучи приложенным к имяславию, всё это даст ясный образ логической структуры имени в его бесконечном и конечном функционировании¹⁰».

Флоренский поддерживал дружеские отношения с Егоровым и Лузиным, но характер этих отношений был сложен. Математические работы Флоренского не были высоко оценены Егоровым и Лузиным. Как писал Лузин в 1908 году жене о Флоренском: «Как только он показал свои работы по математике – опять старое зашевелилось во мне мнение: все его работы не имеют цены в области математики. Намёки, красивые сравнения – что-то упивающее и обещающее, дразнящее, манящее и безрезультативное. И под конец я перестал понимать, что же такое Флоренский? Или это предвестник нового, буреветник, или способный человек с подсознательным адским себялюбием, который из-за желанья быть всех лучше удалился сюда»[7, с.150].

О неоднозначности личности Флоренского и его отрицательном обаянии пишет также Сабанеев (1915 г.) в своих мемуарах: «Очень черный и очень худой, он всегда смотрел почему-то вниз и слегка вбок, глаз своих не любил показывать. Он никогда не улыбался. Странное дело — у него было много учеников, по-видимому, он их обучал не только обычным для духовных наук классическим богословским предметам, но и давал

¹⁰ Правда, заметим, что сам Лосев Кантора не читал, и знаком с теорией множеств по книге А. *Fraenkel*, *Einleitung in die Mengenlehre*, Berlin 1919. Weitere erweiterte Auflagen: 1923 (ссылка в «Философии имени» 1927 г.)

им эзотерические знания и привычки. Трое из его учеников покончили жизнь самоубийством, — из него исходили мощные флюиды, и я сам это чувствовал, чувствовал и то, что не все флюиды были благостные, были и очень демонические.

Не помню точно кто, но один из группы русских «неохристиан», говоря о нем, называл его «умным и жестоким лаврским священником». Во всяком случае, он был человек совершенно необыкновенный, и я очень благодарен судьбе, что она свела его со мною, хотя и ненадолго»[16].

Отношения Лузина и Флоренского были неровными, влияние Флоренского на математический поиск Лузина проблематично.

Флоренский на допросе (1928 г.), принужденный дать показания против Н.Н.Лузина, свидетельствовал, что Н.Н.Лузин являлся одним из лидеров выше упомянутого центра, руководил его внешнеполитической деятельностью, встречался с Гитлером и получал от него руководящие инструкции [17]¹¹.

Вышел русский перевод книги Грэхема и Кантора «Имена бесконечности. Правдивая история о религиозном мистицизме и математическом творчестве»[18]. Это не первая публикация авторов по истории русской науки, позволяющая взглянуть со стороны на процессы, происходившие в культурном и научном мире России и Европы.

¹¹ Вместе с Н.Н.Лузиным по делу проходил и С.А.Чаплыгин. Примечательно, что ни Н.Н.Лузин, ни С.А.Чаплыгин по этому делу не привлекались Существует труднопроверяемая легенда об этих показаниях П. А. Флоренского. В ней говорится, что доведённый до крайности он начал давать показания, но так, чтобы построенные на них обвинения рассыпались при малейшей проверке. Например, он мог утверждать, что Лузин встречался с Гитлером тогда, когда он заведомо не выезжал из СССР, и т. п.

Книга посвящена связи имяславия с русской математикой. Авторы исследовали огромный материал, посвящённый научной жизни Франции и России последней трети XIX – первой трети XX века, а также по имяславию. Можно не согласиться с ведущей ролью, которую придают авторы этому течению, но следует высоко оценить их глубокий анализ связи имяславия с особенностями развития дескриптивной теории множеств в Москве, а также связи особенностей математической культуры Франции с рационалистическими традициями картезианства и позитивизма. Авторы приписывают ведущую роль в формировании философского мировоззрения московских математиков П.Флоренскому.

Весьма интересна концепция авторов о рационализме французских математиков Эмиля Бореля, Анри Лебега и Рене Бэра, позволившим им анализировать противоречия «учения о множествах» Кантора и развивать его теорию, но остановившую их, когда начались логические трудности. Авторы полагают, что русские математики Д.Ф.Егоров и Н.Н.Лузин смогли продолжить эти исследования, и получить значительные результаты благодаря русской религиозности, и особенно благодаря имяславию. «Воодушевлённые мистической верой в силу имяславия, которую афонские монахи распространили по России, русские сумели перешагнуть через пропасть. В разной реакции французов и русских на теорию множеств очевидно влияние различных культурных традиций» [18, с.35]. К сожалению, авторы не раскрывают глубокие причины французского рационализма,

приведённый материал носит скорее личностный характер. Несомненно, интересно прочитать об особенностях, личных и семейных отношениях французских математиков, но, к сожалению, различие взглядов Бэра, Бореля и Лебега не проанализировано.

Авторы познакомились с большой литературой по истории русского имяславия. Восхищает уделённое ими большое внимание истории русской математики. Хочется заметить, что оценка «Русские математики, которые позже изучали теорию множеств у Бореля и Лебега, хотели объединить философские – и более того, религиозные – проблемы с математикой» [18, с.39], - не может быть распространена на всех русских математиков, хотя, конечно, для русских характерен интерес к философии и влияние религиозной национальной философии XIX века. Нельзя согласиться со следующей идеей. «В той разновидности мистицизма, что была представлена русскими имяславцами, связь между математикой и религией выходила на новый уровень. В начале XX столетия математики были озадачены появлением новых разновидностей бесконечности, предложенных Георгом Кантором, который, казалось, сделал их реальными, дав им имена. Некоторые полагали, что их создавал сам акт именованя. И здесь русские имяславцы совершили открытие: они верили, что делали Бога реальным, славя его имя, а математики из их числа считали, что делают бесконечности реальными, сходным образом сосредоточившись на их именах» [18, с. 96].

Но из математиков к кружку имяславцев принадлежали лишь Д.Ф.Егоров, Н.Н.Бухгольц, В.Н.Лосева-Соколова. Лузин не

принадлежал этому кружку, никогда его не посещал, что следует из воспоминаний Вл.Щелкачёва «Дорога учёного к истине» [19]. Сам же Егоров подчёркнуто не смешивал математику и религию [12], и кроме того, в своей деятельности не был связан с созданием новых понятий теории множеств. Судя по языку его работ, он не был склонен к введению философских рассуждений в математику. Все определения, введение новых понятий в его лекциях производится по классической традиции, от общего к частному, сложные проблемы разбиваются на мелкие, влияние Декарта и Коши чувствуется в каждом разделе.

Несмотря на упрёки, которые могут быть высказаны к авторам этой книги, будем благодарны им за то, что они обратили внимание на связь культурных процессов в математике и философии. Сопряжение истории имяславия и дескриптивной математики неоднозначно, этот вопрос требует более глубокого знакомства с обеими проблемами. Это течение лежит в общекультурном русле, оно шире, ближе к общим научным тенденциям, нежели к богословию. Можно говорить об общей тенденции времени, феномене ренессанса первой трети XX века и в математике, и в литературе, и в живописи, и в соединении богословия с философией – уникальное явление русской культуры.

Литература

1. Lebesgue H. Sur les fonctions représentables analytiquement.- C.R., 1904, 139, 29-31.
2. Выгодский М.Я.//Математика и её деятели в Московском университете во второй половине XIX века. Историко-математические исследования I, 1948, с.165-175 – страницы, посвящённые Бугаеву.
3. Медушевский Е. //Математики и философы:[пер. с польского Г.Синкевич]// Альманах «Русский миръ» №7. СПб, «Русская культура», 2012, в печати.

4. Флоренский П.А.// Введение к диссертации «Идея прерывности как элемент мирозерцания» (1900-1903)// Публикация и примечания С.С.Демидова и А.Н.Паршина//Историко-математические исследования,XXX, М., Наука 1986, с.159-177.
5. Флоренский П.А.//Черновик выступления на открытии студенческого математического кружка при Московском математическом обществе. Историко-математические исследования, XXXII-XXXIII, 1990, с.472.
6. Флоренский П.А.// О символах бесконечности. – Флоренский П.А. Соч. в 4-х тт., т.1, М., Наука, 1994, с.81-130.
7. Переписка Н.Н. Лузина с П.А.Флоренским (1904-1922)//Публикация и примечания С.С.Демидова, А.Н.Паршина, С.М.Половинкина и П.В.Флоренского// Историко-математические исследования,XXXI, М., Наука 1989, с.116-191.
8. Cinq lettres sur la théorie des ensembles.— Bulletin de la société mathématique de France,1905,3t. 33, p. 261—273.
9. Лузин Н.Н.//Собрание сочинений в трех томах. Т. 2. М., 1958.
10. Lebesgue H. Preface. – p.VII-XI. – Lusin N. Leçons sur les ensembles analytiques et leur applications/ - Paris : Gauthiers-Villars.1930.
11. Белый А.// Магия слова. Электронный ресурс http://az.lib.ru/b/belyj_a/text_0320.shtml
дата обращения 17.03.12
12. Демидов С.С. Профессор Московского университета Дмитрий Фёдорович Егоров и имяславие в России в первой трети XX столетия// Историко-математические исследования. Вып.4(39), М., Наука, 1999, с.125-156.
13. Тахо-Годи А.//«История античной эстетики» А.Ф.Лосева как философия культуры//Лосев А.Ф. История античной эстетики. Т.1. Ранняя классика. М.: «АСТ», 2000. С.3-38 (вступительная статья).
14. Лескин Д.//Спор об имени Божиим. Философия имени в России в контексте событий 1910-х гг.//Серия Византийская библиотека. СПб, Алетейя 2004, 368 с.
15. Лосев А.Ф.//Имяславие. Вопросы философии 1993 №9, с 53.
16. Сабанеев Л. Л. Воспоминания о России. — М.: Классика-XXI, 2005, с. 156.
17. Demidov S.S., Ford Ch. Luzin and the Affair of the "National Fascist Center" // History of Mathematics: States of Arts / Eds. J.Dauben, M .Folkerts, H.Wussing. San Diego, Boston, New York, London Sydney, Tokyo: Academic Press, 1996. P.137-148.
18. Грэхэм Л., Кантор Ж.-М.//Имена бесконечности. Правдивая история о религиозном мистицизме и математическом творчестве/Лорен Грэхем, Жан-Мишель Кантор;[пер. с англ. А.Ю.Вязьмина, под ред. Б.В.Останина]. – СПб.: Издательство Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2011. – 230 с.
19. Щелкачев В.// Дорога учёного к истине. М.:ЗАО «Издательство «Нефтяное хозяйство», 2007. - 304 с.