УДК 51(091)

К ИСТОРИИ ЭПСИЛОНТИКИ

Г.И. Синкевич

Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д. 4
e-mail: Galina.sinkevich@gmail.com

Опубликовано: Синкевич Г.И. К истории эпсилонтики // Математика в высшем образовании. – 2012. - №10. – С. 149–166.

Рассмотрена история возникновения языка «ε–δ» в работах математиков XIX века. Показано, что хотя обозначения впервые ввёл Коши в 1823 году, в полной мере метод «эпсилон-дельта» проявился в определении предела только у Вейерштрасса в 1861 году. Приводятся различные интерпретации этого вопроса математиками более позднего времени.

Ключевые слова: история математики, математический анализ, непрерывность, Лагранж, Ампер, Коши, Больцано, Гейне, Кантор, Вейерштрасс, Лебег.

> Читая Коши, так и хочется понимать его с позиций Вейерштрасса, но это антиисторический подход. Хотя переходный период до Вейерштрасса тоже нуждается в реконструкции.
>
> *А. Граттан-Гиннесс* [34, с. 176].

> Первый этап любого историко-математического исследования состоит в «переводе» изучаемого текста на язык современной науки. После уяснения математического

содержания текста наступает второй, более трудный этап работы. Необходимо вложить изучаемое произведение в контекст науки его времени. Нужно выяснить, каковы были исследования предшествующих авторов, какие проблемы стояли перед наукой того времени, кто и как продолжил изыскания, содержащиеся в тексте, как понимались те или иные понятия. После первой, чисто математической интерпретации текста, встаёт более сложный вопрос о его историко-математической интерпретации, о месте изучаемого текста в той модели развития математики, которую мы строим для данной эпохи.

И.Г. Башмакова [2, с.191].

Понятие непрерывности с раннего античного времени имело много аспектов – пространственно-временной, физический, геометрический. С расширением круга задач и с развитием представления о функции физического и геометрического понимания непрерывности становилось недостаточно, требовалась арифметизация этого понятия.

В XVII веке Г. Лейбниц сформулировал «Закон непрерывности»: «Если явления (или данные) непрерывно сближаются так, что напоследок одно переходит в другое, то это же должно произойти и с соответствующими последующими или результатами (или искомыми)[1]»[5, с. 35].

Валлис в «Арифметике бесконечного» ввёл определение: «предел переменной величины – это величина постоянная, к которой переменная приближается так, что разность между ними может быть сделана менее любой данной величины». Экземпляр этой книги Валлиса, принадлежавший Эйлеру, сейчас находится в фонде Эйлера[2] в Архиве академии наук в Санкт-Петербурге.

Эйлер считал непрерывными функции, изображаемые одной формулой (для него функция $y = 1/x$ непрерывна в своей области определения, а функция $y = |x|$ разрывна, потому что определяется двумя формулами). По Эйлеру «правила исчисления опираются на закон непрерывности, согласно которому кривые линии описываются непрерывным движением точки», «непрерывная линия строится так, что её природа выражается с помощью одной определённой функции от *x*» [29, с. 21]. Знаменитой стала эйлерова формулировка непрерывности: «Нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги».

В 1765 г. Ж. Даламбер даёт следующее определение предела: «Говорят, что величина является пределом другой величины, если вторая может приблизиться к первой ближе, чем на любую данную величину, сколь бы малой её не предположить, без того, однако, чтобы приближающаяся величина могла когда-либо превзойти величину, к которой она приближается; таким образом, разность между такой величиной и её пределом абсолютно неопределима» [12, с. 155 – 156]. Определение предела у Даламбера носило кинетический характер: «Не раньше, чем вы пройдёте предел, и не позже, но в момент прохождения предела» [21, с. 14].

---

[1] Подробно этот вопрос изложен в [5]. Благодарю С.С. Демидова, обратившему внимание на близость этой идеи Лейбница и понимание непрерывности Больцано и Коши.

[2] Архив АН. Ф. 136. Д. 137. Оп. 1.

Усилению интереса к инфинитезимальным вопросам способствовал конкурс, объявленный по инициативе Ж. Лагранжа Берлинской академией наук в 1786 году: «... требуется *ясная и точная теория того, что в математике называют бесконечным»* [14, с. 140]. 23 сочинения, присланные на конкурс, не удовлетворили Академию: «…требуемый принцип не должен ограничиваться исчислением бесконечно малых, но распространяться также на алгебру и на геометрию, трактующую на манер древних» [14, с. 141]. Лауреатом стал швейцарский математик, проживавший в те годы Варшаве, Симон Люилье (1750 – 1840). В его работе «Элементарное изложение принципов высших исчислений», изданной Академией в 1786 году, впервые появляется символ $\lim \frac{\Delta P}{\Delta x}$ [37, с. 31]. Потом этот символ стал использовать Лакруа[3].

Лагранж был разочарован инфинитезимальными методами и в последующие годы избегал использования бесконечно малых.

Самым востребованным методом геометров XVIII века была аппроксимация. Например, «решая уравнение типа $(x+1)^{\mu} = a$ при нецелом μ, мы не можем найти точное решение, но аппроксимируем его бесконечным рядом. Определив конечное число элементов аппроксимирующего ряда, геометры XVIII века старались вычислить верхнюю границу ошибки аппроксимации (error, ε) – разность между суммой ряда и её n-й частичной суммой. Доказательной техникой здесь служила алгебра неравенств» [32, с. 4 эл. версии].

Первые десятилетия XIX века можно охарактеризовать как период «наивной» теории функций – математический анализ развивался на базе элементарных функций, непрерывных и

[3] Сильвестр Лакруа (1765 – 1843) был последователем Лагранжа в Политехнической школе и профессором анализа у Коши. В 1850-х годах Вейерштрасс стал использовать обозначение $\lim\limits_{x=c}$; в 1905 году английский математик Джон Лезем впервые использует $\lim\limits_{x \to c}$ в книге [42].

дифференцируемых, на основе интуитивных, качественных определений предела, окрестности, непрерывности и сходимости.

В 1797 г. Лагранж публикует «Теорию аналитических функций, содержащую начала дифференциального исчисления, освобождённые от всякого рассмотрения бесконечно малых, исчезающих пределов и флюксий и сведённые к алгебраическому анализу конечных величин». Рассматривая функцию fx и подставляя вместо x новую величину $x + i$, Лагранж утверждает, что $f(x+i)$ может быть разложена в ряд по положительным степеням i, а коэффициенты при них находятся дифференцированием, что справедливо для известных функций. Рассматривая первый член разложения, Лагранж получает $f(x+i) = fx + iP$, откуда $P = \frac{f(x+i) - fx}{i}$. При этом i может быть настолько малым, чтобы любой член разложения был более суммы всех следующих членов разложения, и это имеет место также для всех меньших значений i [12, с. 160–168]. Лагранж добавляет: «Совершенство методов приближения, в которых применяются ряды, зависит не только от сходимости рядов, но ещё от возможности оценить ошибку, происходящую от членов, которыми пренебрегают; и можно сказать, что все приближённые методы, употребляемые в геометрических и механических задачах, ещё очень несовершенны. Предыдущая теорема во многих случаях сможет сообщить недостающее им совершенство, без чего их часто бывает опасно применять» [41, с. 67 – 68][4].

В 1800 г. появляется работа К.Ф. Гаусса «Основные понятия учения о рядах» (см. [31]), где он рассматривает ряды как последовательности частичных сумм.

В 1806 г. вышла статья Анри Ампера «Исследование некоторых вопросов дифференциального исчисления, позволяющих получить новое представление ряда Тейлора и его

[4] Цитируется по [8, с. 298], перевод А.П. Юшкевича.

выражение в конечном виде, если ограничить суммирование»[19], имеющая непосредственное отношение к нашей истории. Здесь на 33 страницах Ампер доказывает теорему Лагранжа о среднем значении и на её основании получает то, что мы называем рядом Тейлора с остаточным членом в виде Лагранжа. А.П. Юшкевич называет эту работу Ампера попыткой аналитически доказать дифференцируемость непрерывной функции [8, с. 243].

Основным инструментом доказательств у Ампера были неравенства[5], с их помощью он оценивал приближения, характеризовал погрешность интерполяции. Следуя Лагранжу, Ампер рассматривает $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ как функцию двух переменных x и i, выражающую разностное отношение двух значений x и $x+i$ одной переменной, причём эта разность не равна ни нулю, ни бесконечности ни при каком x, а при $i=0$ превращается в $\frac{0}{0}$, но не равна ни нулю, ни бесконечности. Эту функцию Лагранж назвал *следующей из производной*.

Заметим, что символ i здесь означает действительное число, мнимую единицу тогда обозначали символом $\sqrt{-1}$. Ампер оговаривает, что будет рассматривать только функции действительной переменной. Разумеется, в рассмотрение по умолчанию включались только «хорошие» функции – непрерывные и дифференцируемые на конечном интервале[6]. Ампер замечает, что эта функция должна уменьшаться или увеличиваться с изменением i. Переменная x изменяется от $x=a$ до $x=k$, соответствующие значения функции $f(x)$ обозначаются через A и K. Ампер делит интервал от $x=a$ до до $x=k$ промежуточными величинами b, c, d,

---

[5] В работах Ж. Лагранжа, Ж.-Б. Фурье (1822 г.), П.А. Рахманова (1803 г.) используется этот же метод.

[6] Сам Ампер в своём мемуаре нигде не употреблял термины точка, интервал, наклон, хорда, касательная, и не делал рисунков.

e, которым отвечают значения функции B, C, D, E . Затем он строит разностные отношения вида $\frac{K-E}{k-e}$ и $\frac{E-A}{e-a}$ и доказывает справедливость неравенств вида $\frac{E-A}{e-a} < \frac{K-A}{k-a} < \frac{K-E}{k-e}$. Далее между старыми значениями вводятся новые и записываются новые неравенства, в результате для некоторого x происходит постепенное приближение $f'(x)$ к величине $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$. Отсюда получается, что эта величина всегда расположена между двумя значениями производной, вычисленными между x и $x + i$.

Пусть $x+i=z$ и $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=p$. Тогда $f(z)=f(x)+p\cdot(z-x)$. Продолжая процедуру, Ампер получает $f(z)=f(x)+f'(x)\cdot(z-x)+p'\cdot(z-x)^2$,

$$f(z)=f(x)+f'(x)\cdot(z-x)+\frac{f''(x)}{2}\cdot(z-x)^2+\frac{p''}{2}(z-x)^3,$$

$$f(z)=f(x)+f'(x)\cdot(z-x)+\frac{f''(x)}{2}\cdot(z-x)^2+\frac{f'''(x)}{2\cdot 3}(z-x)^3+\frac{p'''}{2\cdot 3}(z-x)^4,$$

и так далее.

Ампер приводит примеры разложения некоторых элементарных функций. Далее, рассматривая $f(x)$ как примитивную (первообразную) по отношению к $f'(x)$, он получает связь знака производной с возрастанием или убыванием функции [19]. Доказательство Ампера выглядит громоздким и неуклюжим. Именно это несовершенство и вызвало у Огюстена Луи Коши (1789 – 1857) желание дать лаконичное и красивое построение, что, как мы увидим далее, послужило источником создания языка «ε–δ».

С 1813 г. Коши преподавал в Политехнической школе, в 1816 стал академиком. В 1821 году был опубликован его «Курс анализа» [26] (перевод на русский язык – [9]), прочитанный в Королевской Политехнической школе, в котором Коши определяет понятие непрерывной функции: «Функция $f(x)$, данная между двумя известными пределами переменной x, является непрерывной функцией этой переменной, если для всех значений переменной x, взятой между этими пределами, численное значение разности $f(x+\alpha)-f(x)$ бесконечно уменьшается вместе с α. Иными словами, функция $f(x)$ остаётся непрерывной для x между двумя данными пределами, если между этими пределами бесконечно малое приращение переменной всегда влечёт бесконечно малое приращение самой функции. Добавим также, что функция $f(x)$, непрерывная для x, будет непрерывна и для соседних (voisinage) значений переменной x, лежащих между этими же пределами, как бы близко к этим пределам ни находился x »[26, с. 43][7]. Здесь он понимает предел как крайнюю точку рассматриваемого интервала.

В дальнейшем при всех обращениях к непрерывной функции Коши повторял и использовал только это определение. Английский историк математики Дж. Грей замечает: «Хотя пределы действительно появились в определениях Коши, но только в смысле конечной точки области определения» [35, с. 62]. Грей выделяет лишь один из двух аспектов понимания предела у Коши – как границы интервала (инселимитный предел), оставляя без внимания исследования Коши неопределённостей в предельной точке (интралимитный предел), например, предел отношения синуса к дуге.

В § 3 первой главы «Курса анализа» Коши рассматривает особые значения функции и доказывает теорему, которая будет ему

[7] Перевод Г. Синкевич.

нужна для рассмотрения эквивалентности бесконечно малых [9, с. 46][8]:

«Если с возрастанием переменной x разность $f(x+1)-f(x)$ стремится к известному пределу k, то и дробь $\frac{f(x)}{x}$ в то же время стремится к тому же пределу.

Доказательство. Предположим, что количество k имеет конечное значение и что ε есть произвольно малое число. По условию, с возрастанием x разность $f(x+1)-f(x)$ стремится к пределу k; кроме того, всегда можно взять столь большое число h, что при x, равном или большем h, эта разность постоянно будет между пределами $k - \varepsilon$, $k + \varepsilon$. Приняв это, означим через n какое-нибудь целое число, тогда каждое из количеств примет вид: $f(h+1)-f(h), f(h-2)-f(h+1), \ldots, f(h+n)-f(h+n-1)$, а потому их средняя арифметическая, т.е. $\frac{f(h+n)-f(h)}{n}$, будет заключаться между пределами $k - \varepsilon$, $k + \varepsilon$. Поэтому $\frac{f(h+n)-f(h)}{n}=k+\alpha$, где α – количество между пределами $-\varepsilon$, $+\varepsilon$.

Пусть теперь $h + n = x$, тогда предыдущее уравнение обратится в

$$\frac{f(x)-f(h)}{x-h}=k+\alpha, \tag{1}$$

отсюда $f(x)=f(h)+(x-h)\cdot(k+\alpha)$ и

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(h)}{x}+\left(1-\frac{h}{x}\right)\cdot(k+\alpha). \tag{2}$$

Чтобы значение x могло возрастать неопределённо, достаточно неопределённо увеличивать число n, не изменяя значение h. Поэтому положим h постоянным в уравнении (2), а x примем за переменную, стремящуюся к пределу ∞; тогда количества $\frac{f(h)}{x}, \frac{h}{x}$,

---

[8] Перевод Ф. Эвальда, В. Григорьева, А. Ильина.

содержащиеся во второй части, будут стремиться к пределу нуль, и вся вторая часть к пределу вида $k+\alpha$, где α постоянно заключается между –ε и +ε. Поэтому отношение $\frac{f(x)}{x}$ будет иметь пределом количество, заключающееся между $k - \varepsilon$ и $k + \varepsilon$.

Так как это заключение справедливо как бы мало ни было ε, то искомым пределом функции будет количество k. Другими словами

$$\lim \frac{f(x)}{x} = k = \lim\left[f(x+1) - f(x)\right]».$$

Аналогично рассматривается случай стремления x к $\pm\infty$ [9, с. 46 – 49].

Как видно, здесь уже имеется структура, развитие которой привело к появлению метода «ε–δ». Но ε является здесь конечной, хотя и произвольно малой оценкой погрешности. Коши улучшает построение Ампера. Спустя два года он усовершенствует аргументацию из этого доказательства. Но необходимость читать курс традиционно, не отклоняясь на новшества, пока не позволяла Коши экспериментировать с введением новых методов. Судя по тому, что Коши приходилось рассказывать студентам основы (приведение к общему знаменателю, основания тригонометрии, свойства показательных функций), базовая подготовка слушателей была скромной. Известно, что студенты шумно протестовали против изучения комплексных чисел – совершенно бесполезного, по их мнению, раздела математики.

В основном курсе Коши содержится изложение элементарных функции одной и нескольких переменных, функций действительной и мнимой (комплексную переменную тогда называли мнимой) переменной, их свойств, теория пределов со сравнением бесконечно малых, теория рядов, интерполяционные формулы Лагранжа.

В 1822 году вышла «Аналитическая теория тепла» Ж.-Б. Фурье, в которой он пользуется δ-приращениями [30, с.139].

В 1823 году опубликован «Конспект курса лекций по инфинитезимальному исчислению» [27], прочитанных Коши в Политехнической школе. Курс рассчитан на 40 лекций. На русском языке он вышел под названием «Дифференциальное и интегральное исчисление» в переводе В.Я. Буняковского в 1831 году [10]. В нём содержатся определение предела: «Ежели величины, приписываемые какому-либо переменному количеству, приближаются более и более к величине определённой так, что наконец различествуют от оной столь мало, сколь угодно, то сии последние величины называются пределом всех прочих» [10, с. 3] и определение непрерывной функции: «Ежели функция $f(x)$ изменяется с величиною x таким образом, что для каждого значения сей изменяемой величины, заключающейся в данных пределах, она имеет одну совершенно определённую величину, тогда разность $f(x+i) - f(x)$ между пределами величины x будет количество бесконечно малое; функция же $f(x)$, удовлетворяющая сему условию, называется между теми пределами непрерывною функцией изменяемой x» [10, с.11]. И далее во второй лекции:

«Если переменные величины связаны между собой так, что по значению одной данной величины можно получить значения остальных, под этим понимают, что эти различные величины выражены с помощью одной из них, называемой *независимой переменной,* а представимые через неё величины называют *функциями* от этой переменной.

Часто при вычислениях пользуются буквой Δ для обозначения одновременного увеличения двух переменных, зависящих одна от другой[9]. Тогда переменная y будет выражена как функция от переменной x равенством

---

[9] Этого замечания не было в курсе 1821 года. Здесь Коши указывает на наличие связи между приращением функции и приращением аргумента, но не конкретизирует зависимость в их изменении, как это сделал сорок

$$y = f(x). \qquad (1)$$

Тогда, если переменная y выражена как функция переменной x равенством $y = f(x)$, то Δy, или приращение y от приращения Δx переменной x, будет определено формулой

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \qquad (2)$$

<…> Очевидно, (1) и (2) связаны, следовательно

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \qquad (5)$$

Пусть теперь h и i – две различные величины, первая из них конечная, а вторая бесконечно малая, и пусть $\alpha = \frac{i}{h}$ – бесконечно малая величина, данная отношением этих двух величин. Если Δx соответствует конечная величина h, тогда величина Δy, заданная равенством (5), будет так называемой конечной разностью функции $f(x)$, и будет, естественно, конечным количеством.

Если же, наоборот, придать Δx бесконечно малое значение, например, $\Delta x = i = \alpha h$, значение Δy будет $f(x + i) - f(x)$ или $f(x + \alpha h) - f(x)$, и будет, естественно, бесконечно малым. В этом легко убедиться на примере функций $A^x, \sin x, \cos x$, которым соответствуют разности

$$A^{x+i} - A^x = \left(A^i - 1\right) \cdot A^x,$$

$$\sin(x+i) - \sin x = 2\sin\frac{i}{2}\cos\left(x + \frac{i}{2}\right),$$

$$\cos(x+i) - \cos x = -2\sin\frac{i}{2}\cos\left(x + \frac{i}{2}\right),$$

каждая из которых имеет множитель $\left(A^i - 1\right)$ или $\sin\frac{i}{2}$, который вместе с i бесконечно приближается к пределу, равному нулю.

лет спустя Вейерштрасс. Вместо этого следует типичный для XVIII и XIX века термин «одновременно» (simultané). Добавим, что метод исчерпывания соизмерялся с антропоморфным временем. Ньютон говорил, что может сосчитать площадь под параболой за половину четверти часа, у него же (см. [25, с.103]): «в мгновение, когда истекает час, нет уже более какой-либо вписанной или описанной фигуры; но каждая из них совпадает с криволинейной фигурой, которая есть предел, которого они достигают». Другие математики XVIII века также определяли предельный процесс как занимающий некоторое количество часов, обозримый во времени. При этом символ ɛ обозначал погрешность вычисления, в том числе и у Коши.

Таким образом, для функции $f(x)$, принимающей единственным образом конечные значения для всех x, содержащихся между двумя данными пределами, разность $f(x + i) - f(x)$ будет всегда между этими пределами бесконечно малой, т.е. $f(x)$ есть непрерывная функция в тех пределах, в которых она изменяется.

Ещё говорят, что в окрестности какого-либо частного значения переменной x функция $f(x)$ всегда является непрерывной функцией этой переменной, если она непрерывна между двумя, даже весьма близкими, пределами, содержащими эту данную точку» [27, с.17][10].

В предположении, что любая непрерывная функция дифференцируема, Коши доказывает теорему о среднем значении (см. [27, с. 44 – 45]; [10, с. 36]):

«Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна между двумя пределами $x = x_0, x = X$. Обозначим через A наибольшее значение её производной, B – наименьшее значение её производной между теми же пределами. Тогда разностное отношение $\dfrac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$ необходимо будет заключаться между A и B.

Обозначим буквами δ, ε бесконечно малые числа, из которых первое пусть будет такого рода, что для численных величин i, меньших чем δ, и для какой-нибудь величины x, заключённой между пределами x_0, x, отношение $\dfrac{f(x+i) - f(x)}{i}$ будет всегда больше, чем $f'(x) - \varepsilon$ и меньше, чем $f'(x) + \varepsilon$ ».[11]

Коши упоминает, что следует в этом доказательстве мемуару Ампера,

который мы цитировали выше. Подобно Амперу, Коши

---

[10] Перевод Г. Синкевич.
[11] Перевод В.Я. Буняковского.

вставляет между x_0 и x новые значения[12] $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ так, чтобы разность $X - x_0$ была разложена на положительные части $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}$, не превосходящие δ. «Дроби $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \frac{f(X) - f(x_{n-1})}{X - x_{n-1}}$, находясь между пределами: первая: $f'(x_0) - \varepsilon, f'(x_0) + \varepsilon$, вторая: $f'(x_1) - \varepsilon, f'(x_1) + \varepsilon$, будут более $A - \varepsilon$, но менее чем $B + \varepsilon$. Так как дроби имеют знаменатели одного знака, то разделив сумму их числителей на сумму их знаменателей, получим среднюю дробь, то есть такую, значение которой лежит между меньшей и большей из дробей. Но так как $\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$ является средней дробью, следовательно, оно заключается между пределами $A - \varepsilon$ и $B + \varepsilon$. И так как это справедливо при сколь угодно малом ε, то, следовательно, $\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$ лежит между пределами A и B» [9, с. 36] и [27, с. 44][13].

Иными словами,

$$A < f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+i) - f(x)}{i} < f'(x) + \varepsilon < B \quad \text{для} \quad i < \delta.$$

Коши гениально упростил доказательство Ампера, введя более простые обозначения. У Ампера доказательство занимает половину из 33 страниц, у Коши – две страницы. Ампер вводит восемь вспомогательных величин и для каждой строит оценку отношения, вместо усреднения он доказывает громоздкие неравенства. У Коши доказательство изящно и лаконично.

---

[12] Как и Ампер, Коши не использует никаких геометрических образов – ни точек, ни отрезков.

[13] Перевод В.Я. Буняковского.

Но Коши не анализирует зависимости ε и δ друг от друга и зависимости δ от очередной разности между соседними значениями переменной. Практически δ входит декларативно, вне всякой связи с остальным построением.

Американская исследовательница Джудит Грабинер считает [32], что Коши трансформировал доказательную технику алгебры неравенств в строгий инструмент оценки погрешности аппроксимации.

Голландский исследователь Т. Кётсиер полагает [38], что Коши пришёл к своей концепции непрерывности, анализируя своё доказательство теоремы о среднем, возможно, только в случае многочленов. Очевидно, что x_n у него – это переменные величины, отличающиеся от бесконечно малой на постоянную величину a. По определению непрерывности Коши, $f(x_n)$ должны отличаться от $f(a)$ на бесконечно малую величину. В отличие от точки зрения Грабинер, Кётсиер, анализируя доказательство Коши, не обнаруживает никаких следов ε – δ.

Анализируя предположение Грабинер о том, что Коши лишь оценивал погрешность приближения, П. Блащик (Польша), М. Кац (Израиль) и Д. Шерри (США) приходят к выводу: «Это были в большей степени затруднения инфинитезимального анализа, нежели затруднения эпсилонтики.

После построения нижней и верхней оценок Коши заключает, что последние значения отличаются от первоначальных сколь угодно мало. Здесь слышатся слабые отзвуки ε – δ. Между тем Лейбниц использовал язык, близкий Коши: “Когда говорят, что какие-то бесконечные ряды имеют сумму, я понимаю это как то, что любые конечные ряды с тем же правилом имеют сумму, и что ошибка уменьшается с убыванием ряда, и становится произвольно малой”. Коши пользовался эпсилонтикой? – в таком случае за сто лет до него ею пользовался Лейбниц» [21, с.18].

Как пишет московская исследовательница А.В. Дорофеева о теореме о среднем у Коши, «это заключение верно только если можно подобрать одно и то же δ для всех *x*, а этот факт нуждается в доказательстве» [6, с. 48].

В 1985 году в Париже вышла книга Бруно Белоста[14] «Коши. 1789 – 1857» [20]. В 1997 году опубликован её перевод [3] на русский язык. Вот что пишет написано в [3, с. 90] по поводу доказательства Коши этой теоремы Лагранжа: «Вместо формулы $f(x+i)-f(x)=pi+qi^2+ri^3+\dots$, которая позволяла Лакруа представить приращение разложимой в ряд функции и определить дифференциал, Коши доказал теорему о конечных приращениях: если функция f непрерывно дифференцируема между x и $x+i$, то существует действительное положительное число $\theta < 1$, такое, что

$$f(x+i)-f(x)=i\cdot f'(x+\theta i).$$

[14] Правильной является именно такая транскрипция фамилии автора книги[20], хотя, к сожалению, написание Белхост уже закрепилось в русскоязычной библиографии.

Он вывел эту формулу, применяя теорему о промежуточных величинах, изложенную в «Алгебраическом анализе», из неравенства

$$\inf_{x \in [x_0, X]} f'(x) \le \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} \le \sup_{x \in [x_0, X]} f'(x), \qquad (*)$$

которое верно для любой непрерывной функции (и, значит, дифференцируемой в смысле Коши) между x_0 и X».

Заметим, что теорема о промежуточных значениях в «Курсе анализа» 1821 года [26, с.50] приведена так: *Теорема о непрерывной функции.* Если функция $f(x)$ – непрерывная функция переменной x между пределами $x=x_0$, $x=X$ и b расположено между $f(x_0)$ *и* $f(X)$, то уравнение $f(x)=b$ всегда имеет решение, расположенное между x_0 и X.

Белост сопровождает теоремы Коши рисунками, подобно тому, как мы, читая студентам лекцию, сопровождаем теорему Лагранжа графиком функции и изображаем хорду, стягивающую крайние точки. Но в курсе Коши нет ни одного рисунка, и нигде не говорится о геометрической интерпретации теорем[15]. Формулировка, приведённая Белостом, носит современный характер.

Далее Белост продолжает: «Доказательство, данное Коши в 1823 году только для функций непрерывно-дифференцируемых на

---

[15] Рисунков нет ни у Коши, ни у Лагранжа, ни у Ампера. Появляются они только у Лакруа [39], но не к этой теореме. Белост даёт современную геометрическую интерпретацию. Автор благодарит С.С. Демидова за следующее замечание: «*Престарелый Лакруа, конечно, работает в стиле 18-го века. Поэтому рассматривать его в контексте развития анализа как следующего за Лагранжем, Коши и Ампером не стоит. Просто он не усвоил манеры, введённой Лагранжем, которой следуют и Коши, и Ампер* (*но не Лакруа*)*: в тексте не должно быть чертежей – никакой ссылки на наглядность!*».

$[x_0, X]$, прославило его новые методы и позволило увидеть различие, которое существует между простой и равномерной непрерывностью.

Но его доказательство неравенства (*) было основано на неверном вообще предположении: если функция f непрерывна (и, значит,

дифференцируема в смысле Коши) между x_0 и X и если ε положительное число настолько малое, как мы того хотим, то существует, как утверждает Коши, положительное число δ такое[16], что для всех i, меньших δ и для всех x между x_0 и X

$$f'(x)-\varepsilon \leq \frac{f(x+i)-f(x)}{i} \leq f'(x)+\varepsilon.$$ [17]

В самом деле, это неравенство истинно только для всех x, расположенных между x_0 и X, если только f' равномерно непрерывна между двумя этими числами (или непрерывна в замкнутом ограниченном интервале $[x_0, X]$). Отсутствие чёткого разграничения между непрерывностью и равномерной непрерывностью, как показывает эта ошибка, было слабым местом курса Коши. Как бы то ни было, теорема о конечных приращениях постоянно использовалась и показала себя как центральная теорема дифференциального исчисления» [3, с. 90–91].

Заметим, что и Ампер, и Коши имели в виду как раз замкнутый ограниченный интервал. Все примеры к этой теореме были приведены для элементарных функций, которые равномерно непрерывны на замкнутом интервале. Повторим ещё раз слова Коши: «Ещё говорят, что в окрестности какого-либо частного значения переменной x функция $f(x)$ всегда является непрерывной

[16] Отметим, что у Белоста явно сказано, что по эпсилон выбирается дельта, тогда как у Коши такого явного указания нет.

[17] Заметим, что в русском переводе [3] потеряны штрихи в этой формуле и в цитированной выше формуле (*). Выражаю признательность Г.М. Полотовскому, обратившему внимание на это обстоятельство.

функцией этой переменной, если она непрерывна между двумя, даже весьма близкими, пределами, содержащими эту данную точку»[27, с. 17]. Возможно, я увлекаюсь, но здесь оговаривается равномерная непрерывность, пусть определение и не формализовано. Эту формализацию сделал Э. Гейне в 1872 году [36].

Никогда больше в своих работах, даже в поздних, Коши не пользовался языком «ε–δ»[18]. Как пишет А.П. Юшкевич, «определение непрерывности у Коши столь же далеко от «эпсилонтики», как и его определение предела» [15, с. 69]. Для того чтобы метод работал, ε и δ должны быть связаны между собой и со структурой интервала (области). Для этого в 1823 году ещё не было развито понимание континуума. Приведём ещё точку зрения Х. Путнама: «Если бы Вейерштрасс не обосновал метод эпсилон–дельта, пришлось бы актуализировать бесконечно малые, как это случилось с мнимыми числами. Мы постепенно расширяем систему вещественных чисел» [44][19].

Развитию эпсилонтики сопутствовало развитие понятия непрерывности. Рассмотрим вопрос о сходстве определения непрерывной функции у Больцано и Коши.

В 1817 году в Праге вышла небольшая брошюра Бернарда Больцано «Чисто аналитическое доказательство теоремы, о том, что между двумя значениями, имеющими разные знаки, лежит по крайней мере один действительный корень уравнения» (см. [22, с. 417–476]). Он определяет непрерывную функцию так: «под выражением, что функция f (x) изменяется по закону непрерывности для всех значений x, которые лежат внутри или вне известных границ, понимают лишь то, что если x есть какое-нибудь из этих значений, то разность $f(x + \omega) - f(x)$ может быть сделана меньше, чем любая данная величина, если можно принять

[18] Ответственность за это утверждение лежит на авторе статьи. Все труды Коши доступны в интернете.
[19] Перевод Г. Синкевич.

ω столь малым, сколь угодно, или пусть будет $f(x + \omega) = f(x) + \Omega$» [22, с. 427 – 428].

Мы можем отсюда заключить, что Больцано был знаком с работами Лагранжа и Лакруа.

Заметное сходство идей Коши и Больцано привело английского историка математики Айвора Граттан-Гиннесса к спорной мысли о заимствовании [33][20]. Он предполагает, что Коши мог прочитать работы Больцано, имевшиеся в Национальной библиотеке (тогда Bibliothèque Impériale) в Париже, что в «Курсе анализа» Коши 1821 года встречаются идеи и формулировки Больцано 1817 года. Сравнивая формулу 1797, 1806 и 1813 годов Лагранжа [41, с. 24]: $f(x+i) = f(x) + iP$, формулу Коши 1823 года [10, с.10]: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, а также формулу конечных приращений, приведённую выше, мы видим, что Коши следовал своим учителям Лагранжу и Лакруа. В предисловии к «Курсу анализа» Коши благодарит Пуассона, Ампера и Кориолиса [26, с.VII], но не упоминает о Больцано. Теорема о непрерывной функции у Больцано звучит так: «Между двумя значениями функции, имеющей разные знаки, лежит хотя бы один корень уравнения»; у Коши: «Если между пределами $x = x_0$, $x = X$ дана функция непрерывной переменной $f(x)$, и b расположено между $f(x_0)$ и $f(X)$, то уравнение $f(x) = b$ всегда имеет решение для x, расположенного между x_0 и X» [26, с. 50].

Граттан-Гиннесс соглашается с тем, что в бумагах Коши не сохранилось никаких письменных свидетельств о работах

---

[20] По поводу этой спорной статьи с разрешения С.С. Демидова привожу его мнение: *«О возможных* (*или невозможных*) *идейных связях Больцано и Коши, о которых идёт речь в путанной и очень субъективной статье А. Граттан-Гиннеса: Айвор, конечно, волен любить или не любить любого из математиков существующих и уже умерших, но статья его крайне бездоказательная и реакция на неё специалистов* (*например, А.П. Юшкевича*) *была далеко не положительная. Крайняя нелюбовь, которую испытывает к Коши, основана на идеологии: Коши «был одним из самых неприятных людей своего времени: католический фанатик и бурбонист до абсурда» ! Отсюда нелюбовь к нему Абеля, его студентов в Политехнической школе. Отчасти такое отношение переламывает Бруно Белост. В его книге Коши просто человек определённых убеждений, которые никогда не были популярны во Франции. Человек, который всегда плыл против течения. Делать отсюда крайние выводы («невысокая научная щепетильность» и т.п.*) *следом за Граттан-Гиннесом нужно очень аккуратно. Его «щепетильные» противники рассыпали набор его книг, содержавших выдающиеся научные результаты».*

Больцано, в библиотеках нет пометок о том, что Коши читал Больцано. Но он приводит много параллельных формулировок теорем Больцано и Коши. Приводит он также богатый материал о сложном характере Коши и о его невысокой научной щепетильности: «Если Коши и был величайшим математиком своего времени, он был одним из самых неприятных людей своего времени: католический фанатик и бурбонист до абсурда, он всё время утверждал своё превосходство во всех направлениях своей работы [33, с. 393]. Хорошее подтверждение этому мы найдём в письме одного молодого человека: “Коши глуп, и никто не может его понять, хотя он такой математик, что всегда знает, как нужно рассуждать о математике, <…> он крайний католик и фанатик” [16, с. 45 – 46]; [17, с. 259]. Этим человеком был Нильс Хенрик Абель, посетивший Париж в октябре 1826 года»[21].

Известно, что в том же году Абель опубликовал заметку о сходимости рядов [18, с. 311–329] и об ошибке Коши[22], после чего Коши не стал печатать его работу об эллиптических функциях. Более того, когда Берт Михаэль Хольмбоэ, школьный учитель Абеля, приехал в 1839 в Париж для того, чтобы получить в Академии наук работу Абеля для посмертного издания его трудов, ему не возвращали рукопись до тех пор, пока он в 1841 году не поднял этот вопрос на правительственном уровне[23]. В этой же работе впервые сформулирована связь между непрерывностью функции в точке и пределом: «Функция $f(x)$ называется непрерывной функцией x между пределами $x = a$ и $x = b$, если для любого значения между этими пределами величина $f(x-\beta)$ при постоянно убывающих значениях β сколь угодно приближается к пределу $f(x)$» [15, с. 72, пер. А.П. Юшкевича].

---

[21] Перевод Г. Синкевич.

[22] «Сходящийся всюду ряд непрерывных функций имеет суммой непрерывную функцию». В 1826 году Абель первый заметил ошибку Коши и привёл контрпример.

[23] Известны и другие эпизоды из жизни Коши, связанные с утратой присланных авторами работ, и с появлением в публикациях Коши сходных результатов. Можно назвать истории с рукописями Фурье, Галуа, Грассмана.

Известно, что Больцано прочитал «Курс анализа» Коши, так как в 1830 году в рукописи по анализу он полемизирует с Коши в вопросе о формулировке непрерывности [23, с.15, с. 94]. Возможно, Больцано прочитал немецкий перевод «Курса анализа», изданный в 1828 в Кёнигсберге. После свержения Бурбонов в 1830 году Коши был в изгнании, сначала в Италии, в Турине, а затем, между 1833 и 1835, в Праге, где он стал учителем сына свергнутого французского короля Карла X. Узнав о приезде Коши в Прагу, Больцано в августе 1833 пишет своему другу Ф. Прихоньскому: «Новость о присутствии Коши необычайно интересна для меня. Среди всех ныне живущих математиков он единственный, кого я больше всех уважаю и с кем я чувствую наибольшее родство; я обязан его изобретательному мышлению некоторыми наиболее важными доказательствами. Я очень тебя прошу рекомендовать меня ему и сказать, что я сразу приеду в Прагу, чтобы с ним познакомиться, если – после того, что ты скажешь мне о его распоряжении – не смогу надеяться на встречу с ним в конце сентября» [24, с.156].

Несколько встреч состоялось. Больцано пишет в декабре 1843 года: «Математик Коши в 1834 и 1835 годах был в Праге, где мы несколько раз встречались в течение нескольких дней, которые я обычно провожу в Праге (на Пасху и осенью). После моего отъезда я попросил Кулика передать ему (1834) очерк на четвертушке листа, где я набросал для Коши отчасти по-французски по поводу известной задачи о спрямляемости кривой, потому что я и в самом деле боялся, что он найдёт «Записку о трёх проблемах спрямляемости, вычисления площадей и объёмов», опубликованную в 1817, слишком трудной. В начале прошлого года я просматривал некоторые сочинения Коши в обычной цветной обложке и, отогнув последнюю страницу с анонсом работ, я с удивлением обнаружил его небольшую заметку по тому же вопросу, которую он издал литографией в Париже в 1834 (как будто бы сразу после прочтения моей маленькой заметки). Естественно, я очень захотел прочитать эту заметку» [45, с. 225 – 226].

В 1847 году Больцано полемизирует с Коши, упрекая его в ошибочном определении бесконечного как переменной величины и в определении границы безграничного возрастания, а в определении бесконечно малого – границы бесконечного убывания [4, с.14].

Выводы, которые делает Граттан-Гиннесс из своего исследования, таковы: «Характеризуя гений Коши, я не хотел бы слишком подчёркивать, как чутко реагировал он на внешние стимулы, я пытался не осуждать, а описать глубину и широту его оригинальности. Вне всякого сомнения, он и Гаусс были главными математиками первых десятилетий девятнадцатого века: поэтому его труды и вызывают особенный интерес историков. Обратившись к памфлету Больцано 1817, возможно, что Коши, занятый и активный математик-исследователь и профессор трёх парижских колледжей, просто не обеспокоился упомянуть его или даже забыл, что он его читал (хотя лично я не считаю это объяснение удовлетворительным).

Я отмечал, что Коши знал европейские языки: в отношении немецкого, то возможно ясные указания (судя по многочисленным примерам), что он в 1817 рецензировал рукопись на немецком, посланную в Академию наук, и он рецензировал Der barycentrische Calcul Мёбиуса в 1828 году. Отметим также ещё одно «совпадение идей» с малоизвестными немецкими сочинителями, поразительно похожие на историю с памфлетом Больцано. В апреле 1847 Грассман, тогда школьный учитель в Штеттине, послал Коши два экземпляра своего Ausdehnungslehre 1844 г., но не получил никакого подтверждения; спустя некоторое время тем не менее с 1847 по 1853 Коши публикует несколько работ по «clefs algébriques», которые были основаны на тех же идеях и даже имели те же обозначения» [33, с. 398][24].

[24] Перевод Г. Синкевич.

В истории науки есть немало примеров одновременного возникновения идеи у разных учёных. Можно не согласиться с Граттан-Гиннесом в том, что в основе этого лежало заимствование. Традиция предшествующей постановки проблемы могла быть настолько сильна, что обусловила одинаковый отзыв у математиков, работавших в разных странах. Так было с неевклидовой геометрией. Так было с понятием непрерывной функции, в чём Больцано и Коши шли от Лагранжа. Так было с понятием иррационального числа и непрерывности континуума, когда Мере, Гейне и Кантор одновременно предложили схожие концепции, которые основывались на критерии сходящейся последовательности Коши.

В 1868, 1869 и 1872 гг. выходят работы Шарля Мере, где он с помощью предела строит теорию иррациональных чисел. Наиболее полное изложение его теории в томе 1872 года [43], комментарии можно найти в работах Пьера Дюгака [7] и [28].

С 1854 года Карл Вейерштрасс начинает читать лекции в Берлинском университете. Именно у него появляется такая символика, как $\lim_{n=\infty} p_n = \infty$ (опубликовано в 1856 году) [15, с.76]).

К сожалению, сам Вейерштрасс не публиковал и не редактировал своих лекций, в большинстве случаев они дошли до нас в записях его слушателей. Эдвард Гейне сокрушался по этому поводу: «Принципы г-на Вейерштрасса изложены непосредственно в его лекциях и косвенных устных сообщениях, в рукописных копиях его лекций, и имеют весьма широкое распространение, но они не опубликованы в авторской редакции под контролем автора, что мешает целостному восприятию»[36, с.172][25]. Но основная концепция метода «ε–δ» формировалась в его берлинских лекциях. Как пишет А.П. Юшкевич, «Современное изложение дифференциального исчисления, с его ε, δ-техникой формулировок и доказательств, восходит, как известно, к лекциям Вейерштрасса в

[25] Перевод Г. Синкевич.

Берлинском университете, обработки которых были изданы его слушателями» [12, с. 192].

Наиболее ранний известный текст Вейерштрасса с использованием техники «ε–δ» – это конспект его лекции по дифференциальному исчислению, прочитанной в летнем семестре 1861 года в Берлинском королевском ремесленном институте. «Конспект был составлен учеником Вейерштрасса Г.А. Шварцем и хранится теперь в институте Миттаг-Леффлера в Швеции. Шварцу было тогда 18 лет и конспект он составил для себя лично, а не для печати» [12, с.192]. Записи Шварца были обнаружены и опубликованы П. Дюгаком [28]. В этих записях впервые появляется определение непрерывной функции на языке эпсилонтики: «Если $f(x)$ есть функция x и x – определённое значение, то при переходе x в $x+h$ функция переменится и будет $f(x+h)$; разность $f(x+h) - f(x)$ называют изменением, которое получает функция в силу того, что аргумент переходит от x в $x + h$. Если возможно определить для h такую границу δ, что для *всех* значений h, по абсолютному значению ещё меньших, чем δ, $f(x+h) - f(x)$ становится меньше, чем какая-либо сколь угодно малая величина ε, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции. Ибо говорят, что некоторая величина может стать бесконечно малой, если её абсолютное значение может стать меньше какой-либо произвольно взятой малой величины. Если некоторая функция такова, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствует бесконечно малые изменения функции, то говорят, что она – *непрерывная функция* аргумента, или что она непрерывно изменяется вместе со своим аргументом»[12, с.189].

В 1872 году выходит статья Э. Гейне «Лекции по теории функций», где он даёт определение непрерывной функции по Вейерштрассу на языке эпсилон-дельта [36, с.182].

В 1885 году вышел учебник О. Штольца «Лекции по общей арифметике согласно новой точке зрения» [46], в котором Штольц излагает определение Коши по Вейерштрассу, на языке «ε–δ».

Легенда о том, что язык эпсилонтики создал Коши, появилась с лёгкой руки А. Лебега в его «Лекциях по интегрированию и отысканию примитивных функций» 1904 года: «Для Коши функция $f\ (x)$ непрерывна для значения x_0 , если, каково бы ни было положительное число ε, можно найти число η(ε) такое, что неравенство $|h| \le \eta(\varepsilon)$ влечёт за собой $|f(x_0+h)-f(x_0)| \le \varepsilon$; функция f (x) непрерывна в $(a,\ b)$, если соответствие между ε и η(ε) может быть выбрано независимо от x_0 для любого x_0 в $(a,\ b)$» [11, с.13]. По этому поводу А.П. Юшкевич пишет: «В своём знаменитом труде по теории интегрирования А. Лебег почему-то приписывает Коши определение непрерывности функции в точке, сформулированное в терминах «эпсилонтики» начала XX века и характеризует это определение как классическое. Это один из многих примеров того, как модернизируют высказывания авторов прежних времён даже столь крупные математики, каким был А. Лебег» [15, с. 69].

К сожалению, большинство исторических ошибок происходит оттого, что авторы не обращаются к первоисточникам, а верят опосредованному вольному пересказу, как правило, использующему современный язык. Мы видели выше интерпретацию Белоста через супремум и инфинум, добавление им геометрического образа, интерпретации Лебега, Штольца и другие. В 1978 году вышел справочник [1], в котором в статье «Предел» написано: «Определение предела через ε и δ дал Больцано (1817), а за ним Коши (1820)» [1, с.13]. Как мы с вами убедились, это не так. Больцано в 1817 и Коши в 1821 году дали определения предела в качественной форме и определения непрерывной функции на языке приращений; Коши один раз применил ε и δ при улучшении доказательства Ампера, но Коши использовал ε и δ как конечные оценки погрешности, где δ не зависит от ε. Больцано нигде не использует эту технику. Согласно конспекту лекции Вейерштрасса

1861 года, именно Вейерштрасс был первым, кто использовал язык ε и δ как метод.

В 1821 году, когда Коши писал свой «Курс анализа», в Берлине родился Эдвард Гейне, который спустя 51 год сформулирует понятие равномерной непрерывности. Вейерштрассу в 1821 году было 6 лет, и прошло около 40 лет, прежде чем он использовал эпсилонтику на полную мощь.

Литература

1. Александрова, Н.В. Математические термины: Справочник / Н.В. Александрова. – Москва. : Высшая школа, 1978. – 190 с.
2. Башмакова, И.Г. О роли интерпретации в истории математики / И.Г. Башмакова // Историко-математические исследования. – Москва: Наука, 1986. – Вып. XXX. – С. 182 – 194.
3. Белхост, Б. Огюстен Коши / Б. Белхост. – М.: Наука, Физматгиз. – 1997. – 176 с.
4. Больцано, Б. Парадоксы бесконечного / Б. Больцано. – Перевод под ред. И.В. Слешинского. Одесса: Mathesis, 1911. – 140 с. – С. 14.
5. Демидов, С.С. «Закон непрерывности» Г.-В. Лейбница и понятие непрерывности функции у Эйлера / С.С. Демидов // Историко-математические исследования. – М.: Наука. – 1990. – Вып. XXXII-XXXIII. – С. 34 –39.
6. Дорофеева, А.В. Формирование понятия непрерывной функции /А.В. Дорофеева // История и методология естественных наук. Вып. XI – математика и механика. – М.: МГУ. – 1971. – 37–50 с.
7. Дюгак, П. Понятие предела и иррационального числа, концепции Шарля Мере и Карла Вейерштрасса / П. Дюгак // Историко-математические исследования. – 1973. – XVIII. – С.176–180., электронный ресурс: http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1970_num_23_4_3163
8. История математики. – М.: Наука, 1972. – Т. 3. – 496 с.

9. Коши, О. Алгебрический анализ: переведён с французского Ф. Эвальдом, В. Григорьевым, А. Ильиным / О. Коши. – Lepzig : Druck von Bär & Hermann, 1864. – 252 с.
10. Коши, О. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении (1823). Перевод Буняковского / О. Коши. – СПб.: 1831. – 254 С., электронный ресурс: http://ru.wikisource.org/w/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8_%D0%B8%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D1%81%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%28%D0%9A%D0%BE%D1%88%D0%B8%29.djvu&page=22
11. Лебег, А. Интегрирование и отыскание примитивных функций / А. Лебег. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1934. – 324 с.
12. Хрестоматия по истории математики. Математический анализ / Под ред. А.П. Юшкевича. – Москва: Просвещение, 1977. – 224 с.
13. Эйлер, Л. Введение в анализ бесконечно малых (1748) / Л. Эйлер. – М. : Физматгиз, 1961 – Т. II.
14. Юшкевич, А.П. Л.Карно и конкурс Берлинской академии наук 1786 на тему о математической теории бесконечного / А.П. Юшкевич // Историко-математические исследования. – 1973. – XVIII. – С. 132–156.
15. Юшкевич, А.П. Развитие понятия предела до К. Вейерштрасса / А.П. Юшкевич // Историко-математические исследования. – 1986. – XXX – С. 1–81.
16. Abel, N. Mémorial publié à l’occasion du centenaire de sa naissance / Correspondance d`Abel. – Christiana, 1902. – 135 p.
17. Abel, N. / Oeuvres complètes de N. H. Abel, par S. Lie et L. Sylow. – Eds. 2 vols. Christiania, 1881.
18. Abel, N. / Untersuchungen über die Reihe / N. Abel // Journ. Rei. Ang. Math. –1826. – No. 1 – P. 311–329.
19. Ampére, A. Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrete cette série à un terme quelconque / Mémoir par M.

Ampére, Répétiteur à l'Ecole Politechnique // Journal de l'Ecole Politechnique. – 1806. – Cahier 13. – P. 148–181.
20. Belhoste, B. Cauchy. 1789–1857 / B. Belhoste. – Paris : Belin , 1985. – 224 P.
21. Błaszczyk, P., Katz, M., Sherry, D. Ten misconceptions from the history of analyses and their debunking / P. Błaszczyk, M. Katz, D. Sherry // Foundation of Science ArXiv : 12024153 v. 1 [math. HO] 19 Feb. 2012. 46 p. http://arxiv.org/abs/1202.4153
22. Bolzano B. Rein analytisches Beweis des Lehrsatszes, das zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. – Prag, 1817// Bernard Bolzano (1781–1848). Bicentenary. Early mathematical works. – Prague, 1981. – P. 417–476.
23. Bolzano, B. Schriften 1 / B. Bolzano. – Prague, 1930.
24. Bolzano, B. Der böhmische Vomärz in Briefen B. Bolzanos an F. Přihonský // Veröff. Inst. Slav., Dtsch. Akad. Wiss. Berlin. – 11. – 1958. – 306 p.
25. Cajory F. A history of the conception of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse / F. Cajory. – Chicago, London, 1919. – 322 p.
26. Cauchy, A.-L. Course d'Analyse de l'Ecole Royale Politechnique (1821). Analyse Algébrique / A.-L. Cauchy // Oeuvres. Ser. 2, t. 3. 1–471, электронный ресурс: http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE_CAUCHY_1_2
27. Cauchy A.-L. Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal / A.-L. Cauchy. – (1823). – Oeuvres ser. 2, IV, 9-261, электронный ресурс: http://mathdoc.emath.fr/cgi-bin/oeitem?id=OE_CAUCHY_2_3_P5_0
28. Dugac, P. Elements d`analyse de Karl Weierstrass / P. Dugac. – Paris, 1972.
29. Euler, L. Institutiones calcului differentialis (1755) / Л. Эйлер. Дифференциальное исчисление. В 2-х т. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
30. Fourier J.B. Théorie analytique de la chaleur (1822) / J.B.Fourier // Oeuvres. – Paris, 1888. – v. 1. – P. 139. Электронный ресурс: http://books.google.ru/books?id=TDQJAAAAIAAJ&redir_esc=y
31. Gauss, K.F. Grundbegriffe der Lehre von der Reihen / K.F. Gauss // Werke. Leipzig : B. Bd. X/1. – 1917. – S. 390 – 394.

32. Grabiner, J. Who gave you the Epsilon? Cauchy and the Origin of Rigorous Calculus / J. Grabiner // The American Mathematical Monthly. – 1983. – March. – Volume 90. – No 3. – P. 185–194.
33. Grattan-Guinness, I. Bolzano, Cauchy and the “New Analysis” of the Early Nineteenth Century / I. Grattan-Guinness // Archive for History of Exact Sciences. – Springer Verlag. Berlin-Heidelberg-New York. – 1970. – Vol. 6. – No 3-5. – P. 372–400.
34. Grattan-Guinness, I. The mathematics of the past: distinguish its history from our heritage / I. Grattan-Guinness // Historia mathematica 31 (2004), p. 163–185.
35. Gray, J. Plato`s ghost. The modern transformation of mathematics / J. Gray. Princeton University Press, Princeton, NY, 2008.
36. Heine E. Die Elemente der Functionenlehre / E. Heine // J. reine angew. Math. – 1872. – 74. – s. 172–188.
37. L`Huilier, S.-A.-J. Exposition élémentaire des principles des calcul suprieurs / S.-A.-J. L`Huilier. – 1786.
38. Koetsier, T. Lakatos, Lakoff and Núňez: Towards a Satisfactory Definition
of Continuity. In Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and
Educational Perspectives. Edited by G. Hanna, H. Jahnke, and H. Pulte.
Springer, 2009.

39. Lacroix, S. F. Traité du calcul differentiel et du calcul intégral / S. F. Lacroix. Paris, 1797, 1798, 1800. – 572 P. – Электронный ресурс: http://www.archive.org/stream/traitducalculdi02lacrgoog#page/n5/mode/2up
40. Lacroix, S. F. Traité élementaire de calcul différentiel et de calcul intégral / S. F. Lacroix. – Paris : 1806, 1828. – 646 P. Электронный ресурс: http://archive.org/stream/traitlmentaired00serrgoog#page/n6/mode/2up
41. Lagrange, J. Théorie des fonctions analytique / Oeuvres de Lagrange. – Paris: 1881. – V. 9. – – P. 24 , электронный ресурс http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2299441/f18.image
42. Leathem J.G. Volume and Superface Integrals Used in Physics / Leathem J.G. – 1905.

43. Méray, Ch. Nouveau précis d'analyse infinitesimale / Par Charles Méray. Publication : F. Savy. XXIII – Paris: 1872. – 310 p., электронный ресурс: http://mathdoc.emath.fr/cgi-bin/linum?aun=000839
44. Putnam, H.: What is mathematical truth? / H. Putnam. Proceedings of the American
Academy Workshop on the Evolution of Modern Mathematics (Boston,
Mass., 1974) // Historia Mathematica – 2 (1975). – No. 4. – P. 529–533.
45. Seiderlová, I. / Bemerkung zu den Umgängen zwischen B. Bolzano und A. Cauchy / I. Seiderlová // Čas. Pěst. Mat. – 1962. – 87 – C. 225 – 226.
46. Stolz, O. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik: Nach den neueren Ansichten / O. Stolz. – Bd. I. Leipzig: 1885. – S. 156-157.

Поступила 21.05.2012

To the history of epsilontika

G.I. Sinkevich

It is a history of the “epsilon-delta-language” origin. Although A. Cauchy was the first who used this symbols in 1821, only K. Weierstrass made the most out of this method in 1861 in the definition of the limit. The author is setting forth different interpretations of this priority in mathematical literature.

Key words: the History of Mathematics, Analysis, continuity, Lagrange, Ampère, Cauchy, Heine, Cantor, Weierstrass, Lebesgue.