История таблицы производных.

Г. Синкевич, СПбГАСУ.

Опубликовано: Синкевич Г.И. История правил дифференцирования / Г.И. Синкевич // Наука и техника: Вопросы истории и теории. Материалы XXXIV международной годичной конференции Санкт-Петербургского отделения Российского национального комитета по истории и философии науки и техники РАН (25–29 ноября 2013). – Санкт-Петербург. – 2013. – с. 151–152.

Правила дифференцирования формировались постепенно, начиная с XVII века. Ещё когда Ньютону было 5 лет, а Лейбницу 4 года, алгебраисты знали процедуру дифференцирования многочлена – Гудде 1658 год, Ролль 1690 год. Для нахождения вспомогательного алгебраического уравнения каждый элемент исходного умножался на показатель степени и делился на неизвестное, что для нас равносильно взятию производной.

В работах Ньютона функции представляются рядами с помощью интерполирования – в 1665 логарифм, в 1676 бином, затем синус, косинус, как обращение ряда арксинус и экспонента. У Ньютона $y = y(t)$ - функция времени, и её производные обозначались $\dot{y}, \ddot{y}$. Вот, например, как выводит Ньютон производную степенной функции (ок. 1691 г., опубл. в 1704 г.):

«*Величина* x *течёт равномерно. Требуется найти флюксию величины* x^n.

В то же время, когда величина x в своём течении обращается в $X + o$, величина x^n переходит в $\overline{x+o}^{\,n}$, то есть, согласно методу бесконечных рядов в $x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \ldots$. Приращения o и $nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \ldots$ относятся между собой как 1 к $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2} + \ldots$

Если теперь эти приращения исчезают, то последнее их отношение будет 1 к nx^{n-1}, и поэтому флюксия величины x относится к флюксии величины x^n, как 1 к nx^{n-1}»[1, с. 169].

Лейбниц (1646-1716) ввёл символы $dx, dy, {dx}/{dy}, \frac{d^n y}{dx^n}$ и сформулировал правила дифференцирования суммы, произведения и частного в 1675 году. Он же сформулировал правило дифференцирования сложной функции $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ [2, с. 166-169].

Первый систематический свод правил дифференцирования был опубликован Эйлером в 1748 году во «Введении в анализ бесконечных» [3]и в 1755 году в «Дифференциальном исчислении»[4]. Он даёт правила исчисления конечных разностей первого и высших порядков степенной функции с любым показателем, далее логарифма, синуса, косинуса, представленных рядами, даёт формула для ряда обратных функций (без современной символики аркфункций, она была введена в 1770 году Клюгелем). Приводит правила дифференцирования произведения, частного, сложной функции. После этого Эйлер говорит: «правила дифференцирования, которые мы только что изложили, являются настолько общими, что нельзя придумать никакой алгебраической функции от x, которая не могла бы дифференцироваться с их помощью.

Каждая функция состоит из частей, связанных друг с другом сложением, вычитанием, умножением, или делением; эти части будут либо рациональными, либо иррациональными. Назовём эти количества, составляющие какую-либо функцию, её частями:

Тогда предложенная функция сперва будет дифференцироваться поочерёдно относительно каждой её части так, как если бы лишь одна эта часть была переменной, другие же все части – постоянными. После этого *отдельные дифференциалы, полученные из отдельных частей описанным способом, нужно собрать в единую сумму, и таким образом получится дифференциал предложенной функции»* [4, с. 127-128].

Правила дифференцирования трансцендентных, то есть неалгебраических функций (круговых дуг, логарифмов и показательных функций, а также арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса) Эйлер рассматривает отдельно с помощью разложения в ряд [4, с. 138]. Здесь же он вводит правило дифференцирования степенно-показательной функции.

Рассматривает Эйлер и правила дифференцирования функции двух аргументов $V = V(x, y)$: «Сперва будем считать переменным только количество x, другое же количество y будем рассматривать как постоянное и найдём дифференциал количества V, который пусть будет равен pdx. Затем будем считать переменным только количество y, другое же количество x - постоянным и будем искать дифференциал количества V, который пусть будет равен qdy. Тогда, считая оба количества x и y переменными, мы будем иметь $dV = pdx + qdy$». Далее Эйлер даёт правило для функции трёх и более переменных. Также он рассматривает вопрос о возможности восстановления функции нескольких переменных по её полному дифференциалу $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, называя это свойство изящным [4, с. 154-161]. Демонстрирует независимость смешанных производных от порядка дифференцирования. Приводит правила повторного дифференцирования, правило Лопиталя (без имени) [4, с. 489]. У Эйлера обозначение $D_x f(x)$ носит характер оператора.

Лагранж в 1770 году ввёл удобные обозначения производных y' в статье «Новый метод решения буквенных уравнений с помощью рядов» [5]. Раскладывая функцию в ряд, что он считал чисто алгебраической операцией, Лагранж выражал каждую очередную производную через предыдущую (dérivées) с помощью повторного дифференцирования. В1772 в работе «О новом роде исчисления, относящемся к дифференцированию и интегрированию переменных величин» [6] он рассматривает разложение функции $u=u(x+\xi)$ по степеням ξ: $u+u'\xi+\frac{u''}{2}\xi^2+\frac{u'''}{2\cdot 3}\xi^3+\ldots$и последовательно определяет функции $u, u', u'', u'''\ldots$ начиная с u', как коэффициенты при первой степени предшествующего разложения по степеням ξ. Так все функции могут быть произведены (dérivées) из начальной u с помощью одного и того же алгебраического закона разложения в степенной ряд. Здесь же у него впервые встречается запись $u'={du}/{dx}, du=u'dx$. Лагранж использовал свою терминологию в «Теории аналитических функций» 1797 года [7], ввёл термин «примитивная».

С. Ф. Лакруа ввёл термин «дифференциальные коэффициенты».

В России термин «производная функции» впервые встречается у В.И. Висковатова (1779/80-1812).

Коши с 1821 года читал курс «Алгебраического анализа» в Политехнической школе, в 1823 году опубликовал «Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении», в переводе В. Буняковского [8]. Коши рассматривает непрерывную функцию $y=f(x)$, при $\Delta x=i$ определяет производную как предел отношения бесконечно малых разностей $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, обозначая её y' или $f'(x)$. Коши определяет правила дифференцирования и приводит формулы производных для следующих функций: $a+x, a-x, ax, \frac{a}{x}, x^a, A^x, L(x), \sin x, \cos x, \arcsin x, \arccos x$, где $L(x)$ - натуральный логарифм, а также формулы тангенса, котангенса, секанса, косеканса и обратных к ним. Приводит правила дифференцирования сложных и неявных функций как для функции одной, так и нескольких переменных, нахождения производных высших порядков.

В 1907 году Улисс Дини в «Лекциях по инфинитезимальному анализу» [9] вводит понятие производной традиционно, по Коши, формулу производной степенной функции выводит через бином, а формулы тригонометрических функций получает, используя классические пределы [9, с. 24-64].

Литература.

1. Ньютон И. Рассуждения о квадратуре кривых / И. Ньютон. Математические работы. Перевод с латыни Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: Гостехиздат. – 1937. – С. 167-194.
2. Лейбниц Г.-В. Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница (перевод и редакция А.П. Юшкевича) / Г.-В. Лейбницю – УМН, 3 (23). – 1948. – С. 165-204. Электронный ресурс: http://www.mathnet.ru/links/07b74bb6a794e9811ee3fd185b4f6a57/rm8687.pdf
3. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных / Л. Эйлер. – М.: ГИФМЛ. – 1961. – 392 с.
4. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер. – ГИТТЛ. – 1949. – 580 с.
5. Lagrange J. L.Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries / J.L. Lagrange. - Oeuvres, Vol. III, pp. 5-76. Электронный ресурс: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k229222d/f6
6. Lagrange J. L. Sur une nouvelle espece de calcul relatif a la différentiation et a l'integration des quantités variables / J.L. Lagrange //Nouveaux Memoires de l'Academie royale des Sciences etBelles-Lettres de Berlin. – Oeuvres. - Vol. III. - pp. 441-478. Электронный ресурс: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k229222d/f442
7. Lagrange J. L. Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des

quantités finies. Oeuvres. - Vol. IX. - p.13-413. Электронный ресурс: http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE_LAGRANGE__9

8. Коши, О. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении (1823). Перевод Буняковского / О. Коши. – СПб.: 1831. – 254 С., электронный ресурс: http://ru.wikisource.org/w/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8_%D0%B8%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D1%81%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%28%D0%9A%D0%BE%D1%88%D0%B8%29.djvu&page=22

9. Dini, U. Lezioni di analisi infinitesimale, due voi / U. Dini. – Pisa: Succ. Nistri – 1907 – 1915. - CI +720+483 P.